Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *Najděte všechna prvočísla p, pro něž existuje přirozené číslo n takové, že $p^n + 1$ je třetí mocninou některého přirozeného čísla.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí
$$2^a + 4^b = 8^c.$$
[62–B–I–1]
2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b takové, že $ab = a + b$. [Všechny členy dáme na levou stranu a rozložíme ji na součin: $(a-1)(b-1) = 1$. Je jen jeden způsob, jak napsat číslo 1 na pravé straně jako součin dvou nezáporných celých čísel, proto $a = b = 2$.]
3. Najděte všechna prvočísla p, pro která existuje přirozené číslo x takové, že $p^5 + 4 = x^2$. [Zřejmě $x > 2$ a z upravené rovnice $p^5 = (x-2)(x+2)$ s ohledem na $x+2 > x-2 > 0$ plyne, že dvojice $(x+2, x-2)$ je buď $(p^5, 1)$, (p^4, p), nebo (p^3, p^2). V prvním případě je $p^5 - 1 = 4$, ve druhém $p^4 - p = 4$, avšak žádná z obou rovnic nemá prvočíselné řešení. Zbývá možnost $p^3 - p^2 = 4$, která dává $p = 2$ a $x = 6$.]

D1. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že
$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$
[62–A–I–1]

D2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že
$$\frac{xy^2}{x+y}$$
je prvočíslo. [58–A–I–3]

D3. Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n není číslo $27^n - n^{27}$ prvočíslem. [Slovenská verze 57–A–III–4, `https://skmo.sk/dokument.php?id=215`]

D4. Najděte všechna celá čísla n, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. [61–A–III–1]

2. *Máme n^2 prázdných krabic; každá z nich má čtvercové dno. Výška i šířka každé krabice je přirozené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Každé dvě krabice se liší alespoň v jednom z těchto dvou rozměrů. Jednu krabici je dovoleno vložit do druhé, má-li oba rozměry menší a alespoň jeden z rozměrů má alespoň o 2 menší. Takto můžeme vytvořit posloupnost krabic vložených navzájem do sebe (tj. první krabice je uvnitř druhé, druhá krabice je uvnitř třetí atd.). Každou takovou sadu uložíme na jinou poličku. Určete nejmenší možný počet poliček potřebný k uskladnění všech n^2 krabic.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dvě pole na šachovnici nazveme sousední, pokud mají společnou stranu. Kolik nejvíce polí lze vybrat na šachovnici $2n \times 2n$ tak, aby žádné dvě z vybraných polí nebyly sousední? [Polovinu. Celá šachovnice se dá rozdělit na disjunktní dvojice sousedních polí a z každé dvojice můžeme vybrat maximálně jedno pole. Polovina se dá dosáhnout např. výběrem všech polí jedné barvy při klasickém obarvení šachovnice.]
2. Vyřešte zadaný úkol pro $n = 4$ a $n = 5$. Nestačí uhodnout minimální počet políček: je třeba jednak ukázat, že je možné krabice na určený počet políček uložit, jednak zdůvodnit, že menší počet políček nebude stačit.
3. Pro $n \in \{3, 4\}$ najděte co největší sadu krabic takovou, že žádnou z nich nelze vložit do jiné. Zkuste svou sadu zobecnit pro větší n.

D1. Výborným doplňujícím materiálem (vhodným i pro samostatnou přípravu žáků) je kapitola 3.2 ve Sbírce KMS dostupné na stránce `http://kms.sk/zbierka`.

3. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AK, BL, CM. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, právě když platí rovnost*

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že přímky AB a CD ležící v jedné rovině jsou na sebe kolmé, právě když platí $|AC|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 - |BD|^2$. [Stačí dokázat, že pokud A, B jsou dva různé body v rovině a k je reálné číslo, je množinou bodů X takových, že $|AX|^2 - |BX|^2 = k$, přímka kolmá na přímku AB. V důkazu tohoto tvrzení stačí uvažovat patu P kolmice z bodu X na přímku AB a použít Pythagorovu větu v trojúhelnících APX a BPX; dostaneme $|AX|^2 - |BX|^2 = (|AP|^2 + {}$ ${}+|PX|^2) - (|BP|^2 + |PX|^2) = |AP|^2 - |BP|^2$. Pokud je hodnota $|AX|^2 - |BX|^2$ konstantní, je pata kolmice z X na AB vždy stejná pro všechny body X, leží tedy na přímce kolmé na AB. Obrácením úvahy hned vidíme, že každý bod této přímky má požadovanou vlastnost.]
2. Dokažte, že pro libovolný mnohočlen $P(x)$ a libovolné reálné číslo r platí následující tvrzení: pokud $P(r) = 0$, je mnohočlen $P(x)$ dělitelný dvojčlenem $x - r$. [Po vydělení $P(x)$ činitelem $x - r$ dostaneme podíl $Q(x)$ a zbytek $R(x)$, který má menší stupeň než $x - r$, musí to tedy být konstantní mnohočlen. Po dosazení $x = r$ do rovnosti $P(x) = (x - r)Q(x) + R(x)$ máme $R(r) = 0$, čili zbytek je nulový polynom.]
3. Rozložte na součin výraz $bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b$. [$(a-b)(b-c)(c-a)$. Považujte daný výraz za mnohočlen v proměnné a a všimněte si, že b i c jsou jeho kořeny. Nebo trochu pracněji: $bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b = bc(c - b) + {}$ ${}+ ca(a - c) + ab(b - a) = bc(c - b) - abc + abc + ca(a - c) + ab(b - a) = bc \times {}$ ${}\times (c - b - a) + ca(b + a - c) + ab(b - a) = c(b + a - c)(a - b) + ab(b - a) = {}$ ${}= (a - b)(bc - c^2 + ca - ab) = (a - b)(b - c)(c - a)$.]

D1. Uvnitř strany AB libovolného trojúhelníku ABC leží bod D. Dokažte, že platí

$$|AB| \cdot |CD|^2 + |AB| \cdot |AD| \cdot |BD| = |BC|^2 \cdot |AD| + |AC|^2 \cdot |BD|.$$

[Tento fakt je znám jako Stewartova věta. Pro trojúhelníky ABD, BCD zapište kosinovou větu s úhly ADB, BCD a využijte k eliminaci jejich kosinů toho, že jsou to dvě navzájem opačná čísla.]

D2. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí $a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$, mají některá dvě z čísel a, b, c stejné absolutní hodnoty. [$L - P = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$]

4. *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \dots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí*

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = m.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte matematickou indukcí, že každé přirozené číslo větší než 1 se dá rozložit na prvočinitele.
2. Určete hodnoty funkce f, která splňuje podmínku ze zadání, pro mocniny trojky.
3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \dots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí
$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = 2^n.$$
[Matematickou indukcí lze dokázat, že $f(x) = 2$ pro každé přirozené číslo x. Pokud si označíme dělitele čísla m vzestupně podle velikosti $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_n = m$, máme z indukčního předpokladu $2^{n-1}f(m) = 2^n$ neboli $f(m) = 2$.]

D1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí
$$f\big(f(x) + y\big) = x + f(y + 2\,006).$$
[56–A–I–6]

D2. Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí
$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$
Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2\,007)$. [56–A–III–3]

5. *Uvnitř základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC leží bod D. Zvolme bod E tak, aby $ADEC$ byl rovnoběžník. Na polopřímce opačné k ED leží bod F takový, že $|EB| = |EF|$. Dokažte, že délka tětivy, kterou vytíná přímka BE v kružnici opsané trojúhelníku ABF, je dvojnásobkem délky úsečky AC.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pomocí počítání velikostí úhlů dokažte, že výšky v ostroúhlém trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. [Označme postupně D a E paty výšek z vrcholů A a B, dále P průsečík úseček AD a BE a X průsečík CP a AB. Dokážeme, že přímka CP je kolmá na AB. Čtyřúhelníky $ABDE$ a $CDPE$

jsou tětivové, protože jejich vrcholy leží na Thaletových kružnicích s průměry AB a CP. Proto úhly BAD, BED, PCD mají všechny stejnou velikost $90° - |\sphericalangle ABC|$. Úhel CXB, který dopočítáme ze známých velikostí zbývajících úhlů v trojúhelníku CXB, je tedy pravý.]

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patami výšek D, E, F, které leží postupně na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v středové souměrnosti podle středu strany AB leží na přímce DE. Určete velikost úhlu BAC. [Slovenská verze 57–A–II–3, `https://skmo.sk/dokument.php?id=214`]
3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran BC a AC uvažujme body D a E, pro něž je $ABDE$ tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P. Jsou-li přímky CP a AB navzájem kolmé, pak P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Dokažte. [56–A–III–5; Označme M patu výšky z vrcholu C; bod P leží na úsečce CM. Uvažujme úsečku $B'C$, která je obrazem úsečky BC v osové souměrnosti s osou CM. Úhly CBP, $CB'P$ jsou díky symetrii shodné. Body A, B, D, E leží podle zadání na kružnici, proto úhly CAP a CBP jsou shodné. Z bodů A a B' je vidět úsečku CP pod stejným úhlem, navíc jsou ve stejné polorovině vzhledem k přímce CP, a tedy $PCAB'$ je tětivový čtyřúhelník. Proto úhly $B'AP$, $B'CP$, BCP mají všechny shodnou velikost $90° - \beta$. Zbývá dopočítat velikosti úhlů v trojúhelníku ADB a vidíme, že úhel ADB je pravý, proto P je průsečík výšek. Klíčová idea tohoto řešení — využití vhodné osové souměrnosti — je velmi užitečná i v soutěžní úloze.]
4. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP. [55–A–II–3]
5. Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolme bod D a uvnitř úsečky AD bod P tak, aby neležel na těžnici z vrcholu C. Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku CPD v bodě, který označíme K ($K \neq C$). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKP prochází kromě bodu A dalším pevným bodem, který na výběru bodů D a P nezávisí. [58–A–II–4]

D1. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D2. V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\triangle XBY \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ. [63–A–III–2]

D3. Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem A na kružnici k_1 a vrcholy B, C na kružnici k_2 zvolenými tak, že obě přímky AB, AC jsou tečnami kružnice k_2. Najděte

a) množinu středů kružnic vepsaných,

b) množinu průsečíků výšek

všech takových trojúhelníků ABC. [57–A–III–2]

Výborným materiálem (vhodným i pro samostatnou přípravu žáků) jsou kapitoly 2.1 a 2.2 ve Sbírce KMS dostupné na stránce `http://kms.sk/zbierka`.

6. *Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y, \\ k - y^2 &= z, \\ k - z^2 &= u, \\ k - u^2 &= x \end{aligned}$$

s reálným parametrem k z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $p(x^2+x+ +4) = 2x$ právě jedno reálné řešení. [Daná kvadratická rovnice má právě jedno reálné řešení tehdy, je-li diskriminant roven nule neboli když $(p-2)^2-16p^2 = 0$. To nastane pro $p \in \{-2/3, 2/5\}$. Pro $p = 0$ dostaneme lineární rovnici též s jedním řešením.]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} ax + y &= 2, \\ x - y &= 2a, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$
o neznámých x a y a reálném parametru a. [58–B–S–1]
3. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1, \\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1, \\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1. \end{aligned}$$
[60–B–I–1]
4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1. \end{aligned}$$
[59–A–I–1]
5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} \sqrt{x - y^2} &= z - 1, \\ \sqrt{y - z^2} &= x - 1, \\ \sqrt{z - x^2} &= y - 1. \end{aligned}$$
[59–A–S–1]

6. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$a\sqrt{b} - c = a,$$
$$b\sqrt{c} - a = b,$$
$$c\sqrt{a} - b = c.$$

[59–CPS–1, `https://www.skmo.sk/dokument.php?id=358`]

7. Vyřešte soustavu rovnic $k + x^2 = y$, $k + y^2 = x$ s reálným parametrem k. [Rovnice od sebe odečtěte, výslednou rovnost upravte na součinový tvar $(x - y)(x + y + 1) = 0$ a rozlište, který z činitelů je nulový. Při shrnování výsledků nezapomeňte, že pro některé k mohou být oba činitelé nuloví.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y = 1,$$
$$x - y = a,$$
$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

o neznámých x, y, z a reálném parametru a. [58–B–II–1]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$a(b^2 + c) = c(c + ab),$$
$$b(c^2 + a) = a(a + bc),$$
$$c(a^2 + b) = b(b + ca).$$

[64–A–III–4]

D3. Určete všechny trojice (x, y, z) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$2x^3 = 2y(x^2 + 1) - 1(z^2 + 1),$$
$$2y^4 = 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1),$$
$$2z^5 = 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1).$$

[57–CPS–1, `https://www.skmo.sk/dokument.php?id=79`]