67. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Vyhovuje každé $p \leqq 0$ (neboť $x = 0$ je tehdy řešením dané soustavy), zatímco žádné $p > 0$ nevyhovuje, protože sečtením obou nerovnic dostaneme vztah $2x^2 + 2p \leqq 0$, který v případě $p > 0$ zřejmě nesplňuje žádné reálné číslo x.

Jiné řešení. Grafy funkcí $f(x) = x^2 + ux + v$ a $g(x) = x^2 - ux + v$ (paraboly obrácené vzhůru) jsou souměrně sdružené podle osy y, neboť $f(x) = g(-x)$ pro každé x. Proto případné množiny řešení jednotlivých nerovnic $f(x) \leqq 0$, resp. $g(x) \leqq 0$, jimiž jsou jak známo uzavřené intervaly, jež mohou degenerovat v jednobodové množiny, jsou na číselné ose x dvě souvislé množiny souměrně sdružené podle počátku. Jejich průnik je tak neprázdný, právě když mají společný bod $x = 0$, což nastane, právě když $v = f(0) = g(0) \leqq 0$. Pro danou soustavu to je nerovnost $p \leqq 0$. (Jak je jasné i z předchozího řešení, na tvaru koeficientu $u = p - 1$ výsledek vůbec nezáleží.)

Jiné řešení. Uvažme množiny $\langle x_2, x_1\rangle$ a $\langle x_4, x_3\rangle$ všech řešení první, resp. druhé nerovnice, kde

$$x_{1,2} = \frac{1 - p \pm \sqrt{D}}{2} \quad \text{a} \quad x_{3,4} = \frac{p - 1 \pm \sqrt{D}}{2},$$

přitom $D = (p-1)^2 - 4p$ a oba intervaly (alespoň jako jednoprvkové množiny) existují, právě když $D \geqq 0$ neboli $p \in (-\infty, 3 - 2\sqrt{2}\rangle \cup \langle 3 + 2\sqrt{2}, \infty)$ (taková p dále nazýváme přípustná). Tyto intervaly mají neprázdný průnik, právě když platí $x_1 \geqq x_4$ a zároveň $x_3 \geqq x_2$. Nutnost této podmínky plyne z nerovností $x_1 \geqq x_0 \geqq x_2$ a $x_3 \geqq x_0 \geqq x_4$ pro bod x_0 z průniku obou intervalů. Naopak z nerovností $x_1 \geqq x_4$ a $x_3 \geqq x_2$ plyne, že pro čísla $a = \max(x_2, x_4)$ a $b = \min(x_1, x_3)$ platí $a \leqq b$, takže průnikem zkoumaných intervalů je neprázdná množina všech x, pro něž $a \leqq x \leqq b$.

Nerovnost $x_1 \geqq x_4$ platí, právě když $\sqrt{D} \geqq p-1$, což splňují právě všechna přípustná $p \leqq 1$, zatímco druhá nerovnost $x_3 \geqq x_2$ platí, právě když $\sqrt{D} \geqq 1-p$, což splňují právě všechna přípustná $p \notin (0,1)$. Obě podmínky tak splňují právě všechna $p \leqq 0$ (každé z nich je přípustné). Řešení je hotovo.

Dodejme, že klíčové nerovnosti $\sqrt{D} \geqq p - 1$ a $\sqrt{D} \geqq 1 - p$ můžeme zapsat jedinou nerovností $\sqrt{D} \geqq |p - 1|$. Odtud s ohledem na $D = (p-1)^2 - 4p$ hned vidíme, že hledaná p jsou právě všechna nekladná čísla (pro ně zřejmě platí $D \geqq 0$, takže určování množiny všech přípustných p bylo vlastně zbytečné).

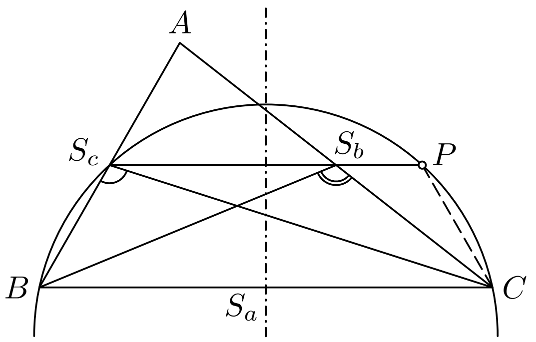
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 4 body za důkaz, že žádné $p > 0$ nevyhovuje; 2 body za důkaz, že každé $p \leqq 0$ vyhovuje. Neúplné řešení: 2 body za pozorování, že grafy dvou kvadratických funkcí na levých stranách jsou souměrně sdružené podle osy y; 1 bod za správnou odpověď (bez zdůvodnění). Při postupu z třetího řešení udělte 1 bod za výpis intervalů řešení každé z obou nerovnic a za určení hodnot p, pro něž jde o neprázdné množiny. Dále pak udělte po 2 bodech za vyřešení každé z podmínek $x_1 \geqq x_4$, $x_3 \geqq x_2$ a 1 bod za dokončení.

2. Nejdříve připomeňme známý důsledek tvrzení o kružnicovém oblouku jakožto množině bodů významné vlastnosti (tzv. ekvigonále): *Leží-li body X a Y uvnitř jedné poloroviny s hraniční přímkou BC, pak nerovnost $|\sphericalangle BXC| < |\sphericalangle BYC|$ platí, právě když bod Y leží uvnitř kruhové úseče vymezené úsečkou BC a kružnicovým obloukem BXC.*

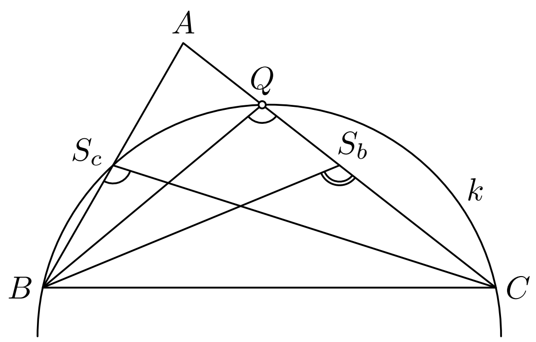
Naším úkolem je tedy ukázat, že za předpokladu $|AB| < |AC|$ leží bod S_b uvnitř úseče určené kružnicovým obloukem BS_cC.

Jak známo, střední příčka S_bS_c trojúhelníku ABC leží na přímce, která je rovnoběžná se stranou BC, a ta proto vytne na kružnicovém oblouku BS_cC takovou tětivu S_cP, která má se stranou BC společnou osu (obr. 1). Ukážeme, že bod S_b je vnitřním bodem tětivy S_cP (a ne bodem jejího prodloužení za krajní bod P). K tomu je třeba (a stačí) ověřit nerovnost $|\sphericalangle BCA| < |\sphericalangle BCP|$. Tu můžeme díky shodnosti souměrně sdružených úhlů BCP a CBA přepsat jako nerovnost $|\sphericalangle BCA| < |\sphericalangle CBA|$, která je, jak víme, dokonce ekvivalentní s předpokladem $|AB| < |AC|$ ze zadání úlohy.

Poznámka. Poznatek, že bod S_b je vnitřním bodem tětivy S_cP, lze také dokázat zjištěním, že bod S_b má od osy strany BC menší vzdálenost nežli bod S_c. Tyto dvě vzdálenosti jsou délkami prvních odvěsen dvou zřejmých pravoúhlých trojúhelníků se společnou druhou odvěsnou, která má krajní bod ve středu S_a úsečky BC, takže díky Pythagorově větě máme vlastně dokázat nerovnost $|S_aS_b| < |S_aS_c|$ pro délky obou přepon. Ty však jsou středními příčkami trojúhelníku ABC, takže platí $|S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|$ a $|S_aS_c| = \frac{1}{2}|AC|$, a tak se opět dostáváme k podmínce $|AB| < |AC|$ ze zadání.



Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Bod A zřejmě leží ve vnější oblasti kružnice k opsané trojúhelníku BS_cC. Má tedy ke kružnici k kladnou mocnost m danou vztahem

$$m = |AS_c| \cdot |AB| = \frac{|AB|^2}{2}.$$

Díky tomu víme, že na kružnici k rovněž leží takový bod Q polopřímky AC, který má od jejího počátku A vzdálenost určenou rovností $|AQ| \cdot |AC| = m$ (v obecném případě není vyloučeno, že $|AQ| \geqq |AC|$). Za našeho předpokladu $|AB| < |AC|$ ovšem platí

$$|AQ| = \frac{m}{|AC|} = \frac{|AB|^2}{2|AC|} < \frac{|AC|^2}{2|AC|} = \frac{|AC|}{2} = |AS_b| < |AC|,$$

takže body A, Q, S_b, C leží na přímce v tomto pořadí (obr. 2). Bod S_b je tak vnitřním bodem tětivy CQ kružnice k, což podle poznatku (připomenutého úvodem předchozího řešení) už znamená, že $|\sphericalangle BS_cC| < |\sphericalangle BS_bC|$.

Jiné řešení. Označme S_a střed úsečky BC a o její osu. Jakmile si uvědomíme, že díky předpokladu $|AB| < |AC|$ má bod S_b menší vzdálenost od osy o než bod S_c, plyne tvrzení úlohy z následujícího pozorování: Pro libovolný bod X na přímce S_bS_c (kolmé k ose o) klesá velikost úhlu BXC se vzdáleností d bodu X od osy o. Místo již využité geometrické argumentace to ověříme trigonometrickým výpočtem.

Označme v vzdálenost přímky S_bS_c od strany BC, d vzdálenost bodu X od osy o a $a = |BC|$. Z kosinové věty pro trojúhelník BCX tak máme

$$a^2 = |BX|^2 + |CX|^2 - 2|BX||CX| \cos|\sphericalangle BXC|.$$

Využijeme-li navíc toho, že trojúhelník BCX má na vzdálenosti d nezávislý obsah $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{2}|BX||CX|\sin|\sphericalangle BXC|$, dostaneme po snadné úpravě

$$\operatorname{cotg}|\sphericalangle BXC| = \frac{|BX|^2 + |CX|^2 - a^2}{4S} = \frac{(d+\frac{1}{2}a)^2 + v^2 + (d-\frac{1}{2}a)^2 + v^2 - a^2}{4S} = \frac{4d^2 + 4v^2 - a^2}{4av}.$$

To je zjevně rostoucí funkce parametru d, zatímco funkce cotg je na intervalu $(0°, 180°)$ klesající.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za zavedení tětivy S_cP nebo CQ, další 2 body za zdůvodnění, proč je bod S_b vnitřním bodem zavedené tětivy a 1 bod za dokončení důkazu odkazem na kružnicový oblouk (či kruhovou úseč) jakožto množinu bodů potřebné vlastnosti.

Neúplné řešení: Za pouhé zdůvodnění, že bod S_b je blíže k ose strany BC nežli bod S_c, udělte 3 body. Řídce zdůvodněné postupy sestávající výhradně z platných tvrzení hodnoťte benevolentně. Oproti tomu za postup využívající (obecně neplatné) tvrzení „V lichoběžníku BCS_bS_c platí $|BS_c| < |CS_b|$, takže $|\sphericalangle BS_cC| < |\sphericalangle BS_bC|$“ udělte nejvýše 1 bod.

3. Chceme, aby křížky převažovaly v co nejvíce řádcích a kolečka v co nejvíce sloupcích.

Všech políček v tabulce je lichý počet $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, křížků ve vyplněné tabulce je o jeden více než koleček, takže jich je $2n^2 + 2n + 1$, zatímco koleček jen $2n^2 + 2n$. Je také jasné, že tabulka jakkoli vyplněná uvedenými počty křížků a koleček je výsledkem, kterého Pavel může svým postupem dosáhnout.

Nejdříve dokážeme, že křížky nemohou převažovat ve všech řádcích. Kdyby křížky převažovaly v každém řádku, muselo by jich být alespoň $(2n+1)(n+1) = 2n^2 + 3n + 1$. Křížků v tabulce je však jen $2n^2 + 2n + 1 = 2n(2n+1) + 1$, mohou tedy převažovat nejvýše v $2n$ řádcích.

Stejným argumentem dokážeme, že kolečka mohou převažovat nejvýše v $2n$ sloupcích. Nejvyšší dosažitelné skóre je proto $2n + 2n = 4n$.

Ve druhé části řešení dokážeme, že skóre $4n$ lze pro každé přirozené číslo n dosáhnout. Stačí rozmístit křížky do levých $n+1$ sloupců prvních n řádků, pravých $n+1$ sloupců dalších n řádků a prostředního políčka spodního řádku (kolečka pak umístíme do všech ostatních políček). Situaci pro $n = 3$ znázorňuje obr. 3. Snadno ověříme, že křížků je celkem $(n+1)n + (n+1)n + 1 = 2n^2 + 2n + 1$, tedy správný počet (takže i na kolečka zbývá správný počet políček), a že křížky převažují ve všech řádcích kromě posledního, zatímco kolečka převažují ve všech sloupcích kromě prostředního.

×	×	×	×	o	o	o
×	×	×	×	o	o	o
×	×	×	×	o	o	o
o	o	o	×	×	×	×
o	o	o	×	×	×	×
o	o	o	×	×	×	×
o	o	o	×	o	o	o

Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za důkaz, že skóre nemůže být vyšší než $4n$; 2 body za popis vyplnění, které pro každé (obecné) n vede na skóre $4n$; 1 bod za uvedení, že popsané vyplnění obsahuje správný celkový počet křížků a koleček. Neúplné řešení: 1 bod za správnou odpověď (bez zdůvodnění).