Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Každému vrcholu pravidelného 66úhelníku přiřadíme jedno z čísel* 1 *nebo* -1. *Ke každé úsečce spojující dva jeho vrcholy (straně nebo úhlopříčce) pak připíšeme součin čísel v jejích krajních bodech a všechna čísla u jednotlivých úseček sečteme. Určete nejmenší možnou a nejmenší nezápornou hodnotu takového součtu.*

ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že některým k vrcholům ($0 \leqq k \leqq 66$) pravidelného 66úhelníku je přiřazeno číslo 1 a ostatním $66 - k$ vrcholům číslo -1. Ke každé úsečce spojující dva vrcholy s čísly 1 připíšeme podle podmínek úlohy číslo 1. Takových úseček je celkem $\frac{1}{2}k(k-1)$. Podobně i ke každé úsečce, jejíž oba krajní body mají přiřazeno číslo -1, připíšeme číslo 1. Takových úseček je celkem $\frac{1}{2}(66-k)(65-k)$. Konečně každé ze zbylých úseček (a těch je $k(66-k)$) připíšeme číslo -1.

Hodnota S součtu všech čísel připsaných k jednotlivým úsečkám (stranám nebo úhlopříčkám uvažovaného 66úhelníku) je tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(66-k)(65-k)}{2} - k(66-k) = \\ &= 2k^2 - 2\cdot 66k + 65\cdot 33 = \\ &= 2(k-33)^2 - 33. \end{aligned}$$

Vidíme, že vždy platí $S \geqq -33$, přičemž rovnost zřejmě nastane pro $k = 33$.

Nyní zjistíme, pro která k ($0 \leqq k \leqq 66$) je splněna nerovnost $S \geqq 0$. Budou to právě ta k, pro něž platí $|k-33| \geqq \sqrt{33/2} > 4$, takže pro nezáporné hodnoty S bude určitě platit $S \geqq 2\cdot 5^2 - 33 = 17$. Rovnost nastane, když bude $|k-33| = 5$ neboli $k \in \{28, 38\}$.

Závěr. Zkoumaný výraz nabývá nejmenší hodnoty $S = -33$ pro $k = 33$. Nejmenší možná nezáporná hodnota zkoumaného součtu je pak $S = 17$ pro $k = 28$ nebo $k = 38$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Určete nejmenší celočíselnou hodnotu výrazu $U = |x - \sqrt{3}| + \sqrt{5}$, kde x je libovolné reálné číslo. [Nejmenší celočíselná hodnota výrazu U je 3 (pro $x = \sqrt{3} - \sqrt{5} + 3$ nebo pro $x = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 3$).]

N2. Určete nejmenší hodnotu výrazu $V = 3x^2 + 4x + 5$, kde x je libovolné reálné číslo, a najděte také jeho nejmenší celočíselnou hodnotu. [Nejmenší možná hodnota výrazu V je $\frac{11}{3}$, je jí dosaženo pro $x = -\frac{2}{3}$. Nejmenší celočíselná hodnota zkoumaného výrazu je $V = 4$ a je jí dosaženo pro $x = -1$ nebo $x = -\frac{1}{3}$.]

N3. Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo -1. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu. [63–B–I–1]

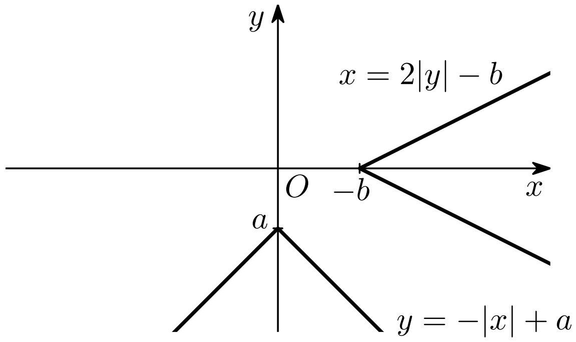
D1. Nechť pro $x_i \in \{-1, 1\}$ platí $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Dokažte, že n je sudé číslo. [Každý z n sčítanců v daném součtu je roven buď 1, nebo -1. Jedna polovina z nich musí být proto rovna 1 a druhá -1. Číslo n je tudíž nutně sudé.]

2. *Určete všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic*

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

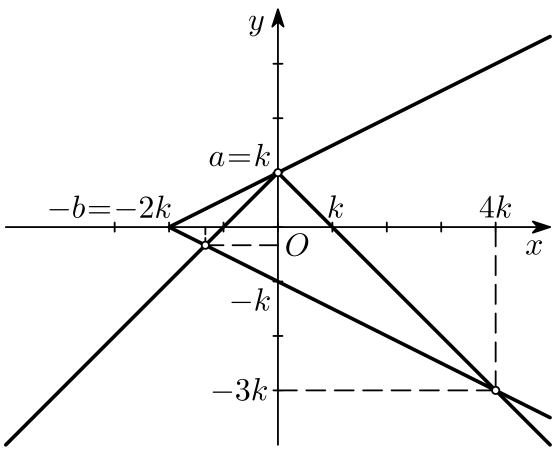
právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete.

Řešení. Namísto běžného algebraického postupu dáme přednost grafické metodě řešení dané soustavy rovnic. Za tím účelem ji přepíšeme do tvaru $y = -|x| + a$, $x = 2|y| - b$. Z grafů obou těchto závislostí mezi proměnnými x a y (při pevných číslech a a b), jejichž příklady (pro zvolená a, b) jsou vykresleny[1] na obr. 1, předně vidíme (s ohledem na úhly, které svírají dotyčné polopřímky se souřadnicovými osami), že v případě, kdy obě čísla a, b jsou *nekladná*, nemá zadaná soustava rovnic žádné řešení s výjimkou případu $a = b = 0$, kdy je řešení jediné ($x = y = 0$).

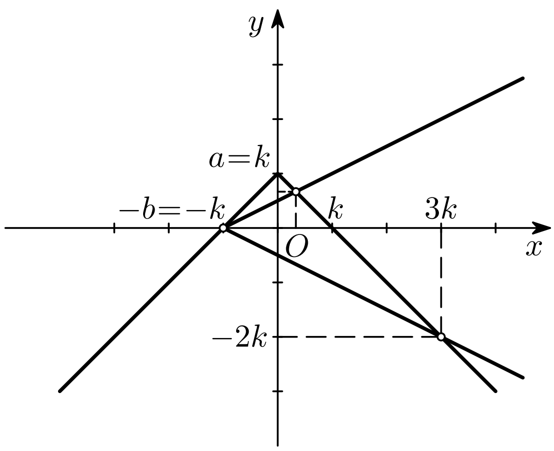


Obr. 1

Dále vidíme, že v případě $a > 0$, $b \leqq 0$ má soustava nejvýše dvě řešení, stejně jako v případě $a \leqq 0$, $b > 0$.[2] Konečně ve zbylém případě $a > 0$, $b > 0$ není těžké usoudit, že soustava bude mít právě tři řešení, jedině když grafy obou závislostí budou mít jednu ze vzájemných poloh znázorněných na obrázcích 2 a 3. Na nich jsou vyjádřena



Obr. 2



Obr. 3

[1] Budeme-li měnit hodnoty parametrů a a b, budou se oba grafy posunovat ve směru patřičné souřadnicové osy. Představa těchto dvou (navzájem nezávislých) pohybů nás opravňuje k závěrům o možných vzájemných polohách obou grafů, jak je dále v tomto řešení uvádíme bez dalšího vysvětlování.

[2] Pro každý z obou případů sami nakreslete situace, kdy soustava má 0, 1, nebo 2 řešení.

i odpovídající čísla a a b pomocí kladného parametru k. Tři společné body obou grafů jsou na obou obrázcích vyznačeny prázdnými kroužky; jejich souřadnice (x, y), které snadno dopočteme, jsou pak hledanými trojicemi řešení zadané soustavy.

Závěr. Daná soustava rovnic má právě tři řešení pro každou dvojici parametrů $(a, b) = (k, 2k)$ a pro každou dvojici parametrů $(a, b) = (k, k)$, kde k je libovolné kladné reálné číslo. V prvním případě má daná soustava řešení $(0, k)$, $(-\frac{4}{3}k, -\frac{1}{3}k)$ a $(4k, -3k)$. Ve druhém případě má daná soustava řešení $(-k, 0)$, $(\frac{1}{3}k, \frac{2}{3}k)$ a $(3k, -2k)$.

Jiné řešení. I když je předchozí grafická metoda řešení z hlediska matematické exaktnosti plnohodnotná a podané řešení lze tak oprávněně hodnotit jako úplné, uveďme pro srovnání i pracnější algebraický postup.

Jako obvykle se zbavíme absolutních hodnot v zadaných rovnicích rozlišením čtyř případů a v každém z nich odpovídající soustavu dvou lineárních rovnic rutinním postupem nejprve vyřešíme v celém oboru $\mathbb{R}$ (nehledíce tedy zatím na podmínky vymezující daný případ):

$$\begin{array}{lll}
(1)\quad x \geqq 0,\ y \geqq 0\colon & x_1 = \frac{1}{3}(2a - b), & y_1 = \frac{1}{3}(a + b),\\
(2)\quad x \geqq 0,\ y < 0\colon & x_2 = 2a + b, & y_2 = -a - b,\\
(3)\quad x < 0,\ y \geqq 0\colon & x_3 = -2a + b, & y_3 = -a + b,\\
(4)\quad x < 0,\ y < 0\colon & x_4 = \frac{1}{3}(-2a - b), & y_4 = \frac{1}{3}(a - b).
\end{array}$$

Protože jednotlivé případy (1)–(4) se navzájem vylučují, je naším úkolem zjistit, pro jaké dvojice (a, b) právě tři z nalezených dvojic (x_i, y_i) splňují příslušnou podmínku, která daný případ vymezuje. Pro přehlednost dalšího výkladu uveďme, že nejdříve vysvětlíme, proč nevyhovují jednotlivé situace $a < 0$, $b < 0$, $a = 0$, $b = 0$ (stačí vždy ukázat dva z případů (1)–(4), jež jsou vyloučeny), a pak se budeme věnovat zbylé situaci, kdy platí $a > 0$ a zároveň $b > 0$.

Je-li $a < 0$, z rovnice $|x| + y = a$ plyne $y < 0$, což vylučuje případy (1) a (3). Je-li $b < 0$, z rovnice $2|y| - x = b$ plyne $x > 0$, což vylučuje případy (3) a (4).

V situaci, kdy $a = 0$, vypíšeme pro jednotlivé případy podmínky na číslo b, za kterých dvojice (x_i, y_i) vymezující podmínce vyhovuje:

$$(1)\colon\ b = 0, \quad (2)\colon\ b > 0, \quad (3)\colon\ b \in \emptyset, \quad (4)\colon\ b > 0.$$

Vidíme, že soustava má nejvýše dvě řešení. Podobné podmínky na číslo a v situaci $b = 0$ vypadají takto:

$$(1)\colon\ a \geqq 0, \quad (2)\colon\ a > 0, \quad (3)\colon\ a \in \emptyset, \quad (4)\colon\ a \in \emptyset,$$

proto i nyní má soustava nejvýše dvě řešení.

V poslední situaci, kdy platí $a > 0$ a $b > 0$, nejprve vypíšeme, které z hodnot x_i a y_i mají „patřičná“ znaménka automaticky:

$$y_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad y_2 < 0, \quad x_4 < 0.$$

(To mimochodem znamená, že dvojice (x_2, y_2) je vždy řešením). O patřičnosti znamének ostatních hodnot x_i a y_i zřejmě rozhoduje, jak velké je (kladné) číslo b ve srovnání s (kladnými) čísly a a $2a$ (pro něž platí $a < 2a$). Možná porovnání teď rozlišíme a u každého z nich vypíšeme, které z případů (1)–(4) vedou k řešení:

(i) $b < a$: vyhovují případy (1) a (2).
(ii) $b = a$: vyhovují případy (1), (2) a (3).
(iii) $a < b < 2a$: vyhovují případy (1), (2), (3), (4).
(iv) $b = 2a$: vyhovují případy (1), (2) a (4).
(v) $2a < b$: vyhovují případy (2) a (4).

Zjišťujeme tak, že zadaná soustava rovnic má právě tři řešení, jedině když platí $b = a > 0$ nebo $b = 2a > 0$; výpis těchto řešení dostaneme ze vzorců pro hodnoty x_i a y_i. Dosadíme-li $b = a$ do patřičných z nich, dostaneme v prvním případě trojici řešení

$$(x_1, y_1) = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{2}{3}a\right),\ (x_2, y_2) = (3a, -2a),\ (x_3, y_3) = (-a, 0);$$

pro druhý případ obdržíme podobným dosazením $b = 2a$ trojici

$$(x_1, y_1) = (0, a),\ (x_2, y_2) = (4a, -3a),\ (x_4, y_4) = \left(-\tfrac{4}{3}a, -\tfrac{1}{3}a\right).$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V kartézské soustavě souřadnic Oxy znázorněte množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovují rovnostem
a) $|x| - y = 1$, b) $x + |y| = 2$, c) $|x| + |y| = 3$, d) $|x+y| + |x-y| = 4$, e) $||x+1| - 1| = y$,
f) $||y - 1| + 1| = x - 1$.

N2. Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro něž má soustava rovnic

$$|x| + |y| = 1,$$
$$x - 2y = a.$$

řešení v oboru reálných čísel. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a. [Z grafů obou vztahů plyne, že daná soustava rovnic má řešení pro každé $a \in \langle -2; 2\rangle$. Pro $a = -2$ a $a = 2$ má soustava právě jedno řešení, po řadě $(0; 1)$ a $(0; -1)$. Pro každé $a \in (-2; 2)$ má daná soustava právě dvě řešení.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$ax + y = 1,$$
$$|x| + y = a,$$

kde a je reálný parametr. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a. [16–C–II–4]

D2. Užitím grafické metody a dále pak výpočtem určete všechna reálná řešení soustavy rovnic

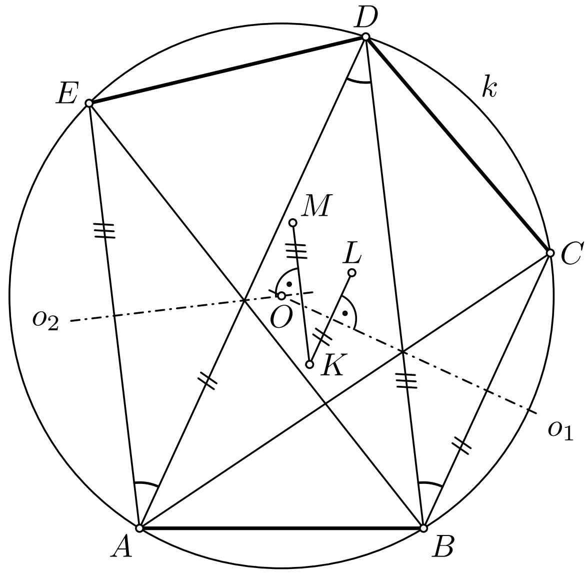
$$|x| + |y - 1| = 1,$$
$$|x - 1| + |y| = p,$$

kde p je reálný parametr. [13–A–II–3]

3. *Na kružnici k jsou zvoleny body A, B, C, D, E (v tomto pořadí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABD, ACD a BDE leží na kružnici soustředné s kružnicí k.*

Řešení. Vzhledem k podmínkám úlohy je $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle EAD|$, neboť všechny tři uvažované úhly vytínají na kružnici k shodné tětivy. Protože $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ADB|$, je $AD \parallel BC$.

Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ je tudíž rovnoramenný lichoběžník či pravoúhelník, v němž jsou (shodné) trojúhelníky DAB a ADC souměrně sdruženy podle společné osy o_1 stran AD, BC. Ta ovšem prochází středem O kružnice k. V uvedené souměrnosti si tak odpovídají i těžiště K a L obou shodných trojúhelníků DAB a ADC (obr. 4). Osa úsečky KL tedy prochází středem O kružnice k. Navíc oba body K a L jsou různé, protože odpovídající si těžnice z (různých) vrcholů B a C se protínají ve středu společné strany AD obou shodných trojúhelníků, zatímco těžiště jsou vnitřními body obou úseček.



Obr. 4

Analogicky dokážeme, že i $ABDE$ je rovnoramenný lichoběžník či pravoúhelník. Pro těžiště K, M shodných trojúhelníků DAB a BED proto platí, že i osa úsečky KM prochází středem O kružnice k. Odtud $|OL| = |OK| = |OM| > 0$ (body K a L jsou různé), takže těžiště všech tří uvažovaných trojúhelníků leží na kružnici soustředné s k. Tím je důkaz ukončen.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte tvrzení: Ramena dvou úhlů, jejichž vrcholy leží na téže kružnici, vytínají na této kružnici shodné tětivy, právě když jsou oba úhly shodné. [Využijte vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem.]

N2. Osa vnitřního úhlu při vrcholu C v trojúhelníku ABC protíná opsanou mu kružnici v bodě, který je středem toho jejího oblouku, který neobsahuje bod C. Dokažte. [Využijte výsledku předešlého tvrzení.]

N3. Je dán tětivový pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|AE| = |AB|$ a $|BC| = |DE|$. Dokažte, že průsečíky výšek (ortocentra) trojúhelníků BCD, CDE a bod A jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníku. [Ukažte, že $BCDE$ je rovnoramenný lichoběžník či pravoúhelník, a využijte osovou souměrnost daného pětiúhelníku vzhledem ke společné ose úseček BE a CD.]

4. *Najděte všechna osmimístná čísla* $*2*0*1*6$ *se čtyřmi neznámými* lichými *číslicemi vyznačenými hvězdičkami, která jsou dělitelná číslem 2 016.*

Řešení. Protože $2\,016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, hledáme právě ta čísla $n = \overline{a2b0c1d6}$ s lichými číslicemi a, b, c a d, která jsou zároveň dělitelná čísly $32 = 2^5$, $9 = 3^2$ a 7.

Číslo $n = \overline{a2b0c1d6}$ je dělitelné číslem 32, právě když je číslem 32 dělitelné jeho poslední pětičíslí

$$\overline{0c1d6} = 1\,000c + 100 + 10d + 6 = 32(31c + 3) + 8(c + d + 1) + 2(d + 1).$$

Podle dělitelnosti osmi vidíme, že číslo $d + 1$ musí být dělitelné čtyřmi, a tak je buď $d = 3$, nebo $d = 7$. V případě $d = 3$ je naše pětičíslí rovno $32(31c + 3) + 8(c + 5)$, takže je dělitelné 32, právě když je číslo $c + 5$ dělitelné 4, tedy $c \in \{3, 7\}$. V případě $d = 7$ je ovšem ono pětičíslí rovno $32(31c+3)+8(c+10)$, takže není dělitelné 32, protože c je lichá číslice, a tak je číslo $c+10$ liché, tudíž číslo $8(c+10)$ není dělitelné 32. Podmínku dělitelnosti číslem 32 tak splňují právě ta n, která za dvojici lichých číslic (c,d) mají $(3,3)$ nebo $(7,3)$.

Číslo $n=\overline{a2b0c1d6}$ je dělitelné devíti, právě když je číslem 9 dělitelný jeho ciferný součet

$$a+2+b+0+c+1+d+6=a+b+c+d+9.$$

Odtud obdržíme možné hodnoty součtu $a+b$ pro obě již určené dvojice (c,d). Vezmeme přitom navíc v úvahu, že součet $a+b$ musí být číslo sudé, protože obě číslice a a b jsou liché. Pro první dvojici $(c,d)=(3,3)$ tak vychází $a+b=12$, tedy $\{a,b\}=\{3,9\}$ nebo $\{5,7\}$. Pro druhou dvojici $(c,d)=(7,3)$ obdržíme $a+b=8$, tedy buď $\{a,b\}=\{1,7\}$, nebo $\{a,b\}=\{3,5\}$. Docházíme k závěru, že pouze osm čísel požadovaného tvaru je dělitelných oběma čísly 32 a 9. Jde o čísla

$$32\,903\,136,\ 92\,303\,136,\ 52\,703\,136,\ 72\,503\,136,$$

$$12\,707\,136,\ 72\,107\,136,\ 32\,507\,136,\ 52\,307\,136.$$

Dělitelnost posledním činitelem 7 tak zbývá posoudit pouze u těchto osmi kandidátů na řešení naší úlohy. Je snadné se přesvědčit, že pouze první a poslední z vypsaných šesti čísel jsou dělitelná sedmi. Lze to provést rychle přímým dělením (máme-li po ruce kalkulačku), nebo namísto toho využít méně známé kritérium dělitelnosti sedmi, podle kterého jakékoli osmimístné číslo

$$\overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}=a_0+a_1\cdot10^1+a_2\cdot10^2+a_3\cdot10^3+a_4\cdot10^4+a_5\cdot10^5+a_6\cdot10^6+a_7\cdot10^7$$

dává při dělení sedmi stejný zbytek jako součet

$$s=a_0+3a_1+2a_2+6a_3+4a_4+5a_5+a_6+3a_7.$$

(Koeficient u každé číslice a_k je roven zbytku při dělení sedmi příslušné mocniny 10^k.)

Odpověď. Vyhovují právě dvě čísla 32 903 136 a 52 307 136.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Známá kritéria dělitelnosti čísly 2, 4 a 8 zobecněte do kritéria dělitelnosti číslem 2^k pro libovolné přirozené číslo k: Celé číslo zapsané v desítkové soustavě je dělitelné číslem 2^k, právě když je takové jeho poslední k-číslí. [Rozdíl čísla a jeho posledního k-číslí je číslo, jehož zápis končí k nulami, takže je dělitelné číslem 10^k, a tedy i číslem 2^k. To znamená, že jakékoliv číslo a jeho poslední k-číslí dávají při dělení číslem 2^k vždy stejný zbytek.]

N2. Připomeňte si známý poznatek, že dané přirozené číslo a jeho ciferný součet dávají stejné zbytky jak při dělení třemi, tak při dělení devíti. Platí to i při dělení číslem $3^3=27$? [Neplatí, například číslem 27 je dělitelné samo číslo 27, avšak jeho ciferný součet $2+7=9$ číslem 27 dělitelné není. Neplatí ani opačná implikace: například číslo 1 899 s ciferným součtem 27 tímto číslem dělitelné není.]

D1. Dokažte, že o dělitelnosti sedmi jakéhokoli čísla N zapsaného v desítkové soustavě lze rozhodovat pomocí „kódu“ 132645 takto: Šestimístné číslo $N=\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ dává při dělení sedmi stejný zbytek jako součet

$$s=1a_0+3a_1+2a_2+6a_3+4a_4+5a_5$$

(číslice vypisujeme odzadu a před ně jako koeficienty připisujeme jednotlivé číslice onoho kódu). Má-li číslo N méně než šest číslic, napíšeme příslušný kratší součet, má-li číslo N naopak více než šest číslic, kódové číslice opakujeme s periodou 6, tedy

$$s=a_0+3a_1+2a_2+6a_3+4a_4+5a_5+a_6+3a_7+2a_8+6a_9+\ldots$$

D2. Dokažte, že pro každé celé číslo n je číslo, které dostaneme, když zapíšeme 3^n jedniček za sebou, násobkem čísla 3^n. [Užijte matematickou indukci: pro $n=1$ (i pro $n=2$) tvrzení zřejmě platí (užijte ciferný součet). Při druhém indukčním kroku si povšimněte, že číslo z 3^{n+1} jedniček je násobkem čísla z 3^n jedniček, přitom příslušný podíl je číslo tvaru $10\ldots010\ldots01$, tedy číslo dělitelné třemi (má totiž ciferný součet 3).]

5. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu jeho výšky z vrcholu C a M, N průsečíky os úhlů ADC, BDC se stranami AC, BC. Dokažte, že platí*

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

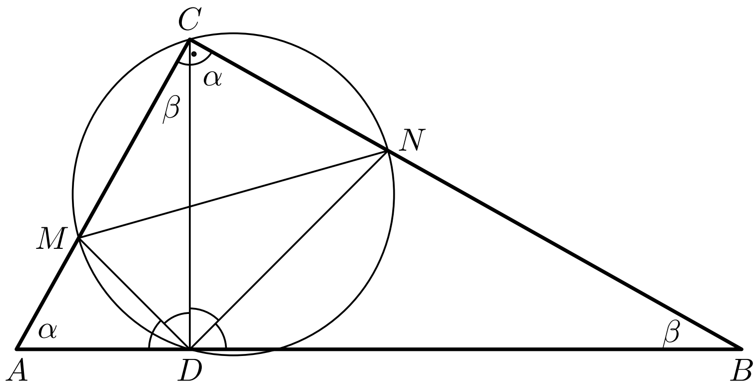
Řešení. Osy DM a DN pravých úhlů při vrcholu D spolu s výškou CD rozdělují přímý úhel při vrcholu D na čtyři shodné úhly velikosti 45°. Zároveň vidíme, že úhel MDN je pravý, takže body C, M, D, N leží na Thaletově kružnici s průměrem MN.

Označíme-li obvyklým způsobem úhly při vrcholech A a B trojúhelníku ABC, je zároveň $|\sphericalangle ACD| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\sphericalangle BCD| = 90° - \beta = \alpha$ (obr. 5). Odtud plyne podobnost trojúhelníků $CDM \sim BDN$ a $ADM \sim CDN$, takže

$$\frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|CM|}{|BN|} \quad \text{a} \quad \frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|AM|}{|CN|}.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme

$$|AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |CN|. \tag{1}$$



Obr. 5

Protože obvodové úhly nad tětivami CM a CN jsou shodné, je $|CM| = |CN|$. Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém (rovnoramenném) trojúhelníku CMN tak dostaneme

$$2|CM|^2 = |CM|^2 + |CN|^2 = |MN|^2$$

a dosazením do rovnosti (1) vyjde

$$2|AM| \cdot |BN| = 2|CM| \cdot |CN| = 2 \cdot |CM|^2 = |MN|^2.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Ukážeme ještě jeden způsob odvození klíčové rovnosti (1). Pravoúhlé trojúhelníky ACD a CBD jsou podobné, protože $|\sphericalangle BCD| = 90° - |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD|$. To však znamená, že osy DM a DN obou vnitřních úhlů z vrcholu D, jež si v této podobnosti odpovídají, dělí protilehlé strany ve stejném poměru. Platí tedy

$$|AM| : |CM| = |CN| : |BN|, \quad \text{tj.} \quad |AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |CN|.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Zopakujte si základní vlastnosti a vztahy mezi *obvodovým*, *středovým* a *úsekovým úhlem* a dále metody (postupy), jak ukázat, že čtyři a více bodů leží na téže kružnici. [Lze doporučit mj. časopis Matematika – Fyzika – Informatika (`mfi.upol.cz`), roč. 24, č. 5, článek „Čtyři body na kružnici".]

N2. Dokažte, že tětivy téže kružnice příslušné shodným obvodovým úhlům jsou shodné. [Užijte sinovou větu.]

N3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž D značí patu výšky z vrcholu C k jeho přeponě AB. Dále nechť K, L jsou body na jeho odvěsnách po řadě BC, AC, pro něž platí $2|BK| = |CK|$ a $2\,|CL| = |AL|$. Dokažte, že body K, C, L a D leží na téže kružnici. [Využijte podobnost pravoúhlých trojúhelníků ADC a CDB, z níž pak plyne i podobnost trojúhelníků CLD a BKD.]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180^\circ.$$

[5. CPS juniorů, 2016, `http://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi_2504_246_255.pdf`, str. 253–254.]

6. *Určete všechna reálná čísla r taková, že nerovnost $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pro všechny dvojice reálných čísel a, b, která jsou větší nebo rovna r.*

ŘEŠENÍ. Protože

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

můžeme danou nerovnost přepsat do ekvivalentního tvaru

$$(a + b - 1)(a^2 - ab + b^2) \geqq 0. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$a^2 - ab + b^2 = (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$$

(s rovností, právě když $a = b = 0$), je nerovnost (1) splněna, právě když

$$a + b \geqq 1 \quad \text{nebo} \quad a = b = 0.$$

Z podmínky $a + b \geqq 1$ tak plyne, že nerovnost (1) je zaručeně splněna pro všechny dvojice reálných čísel a, b, která jsou větší nebo rovna $\frac{1}{2}$, takže požadovanou vlastnost má každé $r \geqq \frac{1}{2}$. Nemá ji však žádné $r < \frac{1}{2}$, protože k takovému r lze zvolit kladná čísla $a = b = \max(r, \frac{1}{3})$, jež jsou sice větší nebo rovna r, avšak nerovnost (1) nesplňují, neboť pro ně neplatí ani $a + b \geqq 1$, ani $a = b = 0$.

Závěr. Dané úloze vyhovují právě všechna reálná čísla $r \geqq \frac{1}{2}$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že pro každé liché číslo n a pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

N2. Znázorněte v kartézské soustavě souřadnic všechny body, jejichž souřadnice x, y vyhovují vztahům:

a) $(x - y \geqq 1) \wedge (2x + y \leqq 1)$,

b) $(\min(x, y) \geqq r) \wedge (\max(x, y) \leqq R)$, kde $r < R$ jsou daná reálná čísla.

N3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost. [64–B–I–6]