Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Každému vrcholu pravidelného 66úhelníku přiřadíme jedno z čísel* 1 *nebo* −1. *Ke každé úsečce spojující dva jeho vrcholy (straně nebo úhlopříčce) pak připíšeme součin čísel v jejích krajních bodech a všechna čísla u jednotlivých úseček sečteme. Určete nejmenší možnou a nejmenší nezápornou hodnotu takového součtu.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Určete nejmenší celočíselnou hodnotu výrazu $U = |x - \sqrt{3}| + \sqrt{5}$, kde x je libovolné reálné číslo. [Nejmenší celočíselná hodnota výrazu U je 3 (pro $x = \sqrt{3} - \sqrt{5} + 3$ nebo pro $x = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 3$).]
2. Určete nejmenší hodnotu výrazu $V = 3x^2 + 4x + 5$, kde x je libovolné reálné číslo, a najděte také jeho nejmenší celočíselnou hodnotu. [Nejmenší možná hodnota výrazu V je $\frac{11}{3}$, je jí dosaženo pro $x = -\frac{2}{3}$. Nejmenší celočíselná hodnota zkoumaného výrazu je $V = 4$ a je jí dosaženo pro $x = -1$ nebo $x = -\frac{1}{3}$.]
3. Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo −1. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu. [63–B–I–1]

D1. Nechť pro $x_i \in \{-1, 1\}$ platí $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Dokažte, že n je sudé číslo. [Každý z n sčítanců v daném součtu je roven buď 1, nebo −1. Jedna polovina z nich musí být proto rovna 1 a druhá −1. Číslo n je tudíž nutně sudé.]

2. *Určete všechny dvojice* (a, b) *reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic*

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V kartézské soustavě souřadnic Oxy znázorněte množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovují rovnostem
   a) $|x| - y = 1$, b) $x + |y| = 2$, c) $|x| + |y| = 3$, d) $|x + y| + |x - y| = 4$, e) $\big||x + 1| - 1\big| = y$,
   f) $\big||y - 1| + 1\big| = x - 1$.
2. Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro něž má soustava rovnic

$$|x| + |y| = 1,$$
$$x - 2y = a.$$

řešení v oboru reálných čísel. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a. [Z grafů obou vztahů plyne, že daná soustava rovnic má řešení pro každé $a \in \langle -2; 2\rangle$.

Pro $a = -2$ a $a = 2$ má soustava právě jedno řešení, po řadě $(0;1)$ a $(0;-1)$. Pro každé $a \in (-2;2)$ má daná soustava právě dvě řešení.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ |x| + y &= a, \end{aligned}$$

kde a je reálný parametr. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a. [16–C–II–4]

D2. Užitím grafické metody a dále pak výpočtem určete všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} |x| + |y-1| &= 1, \\ |x-1| + |y| &= p, \end{aligned}$$

kde p je reálný parametr. [13–A–II–3]

3. *Na kružnici k jsou zvoleny body A, B, C, D, E (v tomto pořadí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABD, ACD a BDE leží na kružnici soustředné s kružnicí k.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte tvrzení: Ramena dvou úhlů, jejichž vrcholy leží na téže kružnici, vytínají na této kružnici shodné tětivy, právě když jsou oba úhly shodné. [Využijte vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem.]
2. Osa vnitřního úhlu při vrcholu C v trojúhelníku ABC protíná opsanou mu kružnici v bodě, který je středem toho jejího oblouku, který neobsahuje bod C. Dokažte. [Využijte výsledku předešlého tvrzení.]
3. Je dán tětivový pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|AE| = |AB|$ a $|BC| = |DE|$. Dokažte, že průsečíky výšek (ortocentra) trojúhelníků BCD, CDE a bod A jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníku. [Ukažte, že $BCDE$ je rovnoramenný lichoběžník či pravoúhelník, a využijte osovou souměrnost daného pětiúhelníku vzhledem ke společné ose úseček BE a CD.]

4. *Najděte všechna osmimístná čísla* $*2{*}0{*}1{*}6$ *se čtyřmi neznámými* lichými *číslicemi vyznačenými hvězdičkami, která jsou dělitelná číslem 2 016.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Známá kritéria dělitelnosti čísly 2, 4 a 8 zobecněte do kritéria dělitelnosti číslem 2^k pro libovolné přirozené číslo k: Celé číslo zapsané v desítkové soustavě je dělitelné číslem 2^k, právě když je takové jeho poslední k-čísslí. [Rozdíl čísla a jeho posledního k-čísslí je číslo, jehož zápis končí k nulami, takže je dělitelné číslem 10^k, a tedy i číslem 2^k. To znamená, že jakékoliv číslo a jeho poslední k-čísslí dávají při dělení číslem 2^k vždy stejný zbytek.]
2. Připomeňte si známý poznatek, že dané přirozené číslo a jeho ciferný součet dávají stejné zbytky jak při dělení třemi, tak při dělení devíti. Platí to i při dělení číslem $3^3 = 27$? [Neplatí, například číslem 27 je dělitelné samo číslo 27, avšak jeho ciferný součet $2 + 7 = 9$ číslem 27 dělitelné není. Neplatí ani opačná implikace: například číslo 1 899 s ciferným součtem 27 tímto číslem dělitelné není.]

D1. Dokažte, že o dělitelnosti sedmi jakéhokoli čísla N zapsaného v desítkové soustavě lze rozhodovat pomocí „kódu“ 132645 takto: Šestimístné číslo $N = \overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ dává při dělení sedmi stejný zbytek jako součet

$$s = 1a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5$$

(číslice vypisujeme odzadu a před ně jako koeficienty připisujeme jednotlivé číslice onoho kódu). Má-li číslo N méně než šest číslic, napíšeme příslušný kratší součet, má-li číslo N naopak více než šest číslic, kódové číslice opakujeme s periodou 6, tedy

$$s = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + \dots$$

D2. Dokažte, že pro každé celé číslo n je číslo, které dostaneme, když zapíšeme 3^n jedniček za sebou, násobkem čísla 3^n. [Užijte matematickou indukci: pro $n = 1$ (i pro $n = 2$) tvrzení zřejmě platí (užijte ciferný součet). Při druhém indukčním kroku si povšimněte, že číslo z 3^{n+1} jedniček je násobkem čísla z 3^n jedniček, přitom příslušný podíl je číslo tvaru $10\dots010\dots01$, tedy číslo dělitelné třemi (má totiž ciferný součet 3).]

5. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu jeho výšky z vrcholu C a M, N průsečíky os úhlů ADC, BDC se stranami AC, BC. Dokažte, že platí*

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Zopakujte si základní vlastnosti a vztahy mezi *obvodovým*, *středovým* a *úsekovým úhlem* a dále metody (postupy), jak ukázat, že čtyři a více bodů leží na téže kružnici. [Lze doporučit mj. časopis Matematika – Fyzika – Informatika (`mfi.upol.cz`), roč. 24, č. 5, článek „Čtyři body na kružnici“.]
2. Dokažte, že tětivy téže kružnice příslušné shodným obvodovým úhlům jsou shodné. [Užijte sinovou větu.]
3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž D značí patu výšky z vrcholu C k jeho přeponě AB. Dále nechť K, L jsou body na jeho odvěsnách po řadě BC, AC, pro něž platí $2|BK| = |CK|$ a $2\,|CL| = |AL|$. Dokažte, že body K, C, L a D leží na téže kružnici. [Využijte podobnost pravoúhlých trojúhelníků ADC a CDB, z níž pak plyne i podobnost trojúhelníků CLD a BKD.]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180^\circ.$$

[5. CPS juniorů, 2016,
`http://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi_2504_246_255.pdf`, str. 253–254.]

6. *Určete všechna reálná čísla r taková, že nerovnost $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pro všechny dvojice reálných čísel a, b, která jsou větší nebo rovna r.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každé liché číslo n a pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

2. Znázorněte v kartézské soustavě souřadnic všechny body, jejichž souřadnice x, y vyhovují vztahům:
   a) $(x - y \geqq 1) \wedge (2x + y \leqq 1)$,
   b) $(\min(x,y) \geqq r) \wedge (\max(x,y) \leqq R)$, kde $r < R$ jsou daná reálná čísla.
3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

   Určete, kdy nastane rovnost. [64–B–I–6]