66. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Označme $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ kladná čísla napsaná na tabuli. Nejmenší čísla a_1 ani a_2 zřejmě nemohou být součtem žádných dvou na tabuli napsaných čísel. Číslo a_3 lze jako součet některé dvojice dostat nejvýše jedním způsobem, a to $a_3 = a_1 + a_2$. Číslo a_4 sice můžeme dostat třemi způsoby: $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$ nebo $a_1 + a_3$, ale protože je $a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_2+a_3$, může být a_4 součtem nejvýše jedné z dvojic $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$. Konečně číslo a_5 lze takto získat nejvýše dvěma způsoby. Kdybychom totiž a_5 získali třemi způsoby coby součet dvou čísel napsaných na tabuli, bylo by alespoň jedno z čísel a_1, a_2, a_3, a_4 sčítancem ve dvou různých součtech, což není možné.

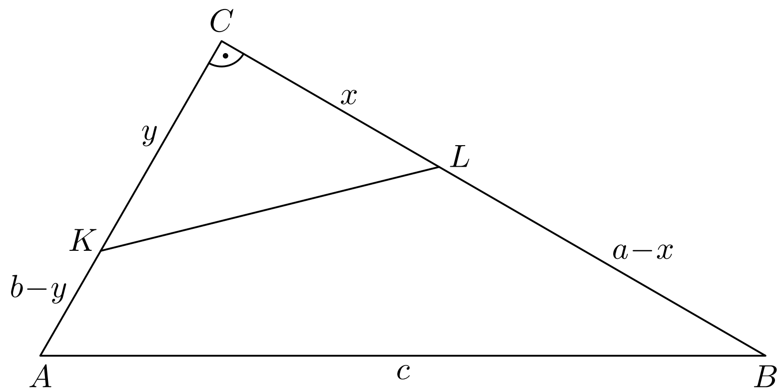
Dohromady jsme tak zjistili, že počet vyhovujících dvojic nikdy nepřevýší součet $0 + 0 + 1 + 1 + 2$, který je roven čtyřem.

Příkladem pětice čísel napsaných na tabuli, pro něž součty čtyř (z nich vytvořených) dvojic jsou rovněž na tabuli uvedeny, je $a_i = i$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kdy $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $1 + 4 = 5$ a $2 + 3 = 5$.

Závěr. Z daných pěti různých kladných čísel lze sestavit nejvýše čtyři dvojice požadované vlastnosti.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za získání odhadu, že vhodných dvojic není více než čtyři, dejte 4 body. (Za odhad, že dvojic je nejvýše šest, protože největší číslo ve dvojici být nemůže, body nedávejte.) Za příklad pětice čísel se čtyřmi vyhovujícími dvojicemi dejte 2 body, a to i v případě, že se řešiteli nepodaří horní odhad dokázat.

2. Ve shodě s obr. 1 označme $x = |CL|$, $y = |CK|$, potom $|BL| = a - x$, a $|AK| = b - y$, kde a, b značí po řadě délky odvěsen BC, AC.



Obr. 1

Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku KLC dostaneme $|KL|^2 = x^2 + y^2$, takže zkoumaný součet můžeme upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2 &= (b - y)^2 + x^2 + y^2 + (a - x)^2 = \\
&= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = \\
&= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} = \\
&= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{2}.
\end{aligned}$$

Díky nezápornosti druhých mocnin odtud vidíme, že zkoumaný výraz nabývá své nejmenší hodnoty, totiž $\frac{1}{2}c^2$, právě když $x = \frac{1}{2}a$ a současně $y = \frac{1}{2}b$, tedy právě když body K, L jsou po řadě středy odvěsen AC, BC daného pravoúhlého trojúhelníku ABC.

Závěr. Nejmenší možná hodnota zkoumaného součtu je rovna $\frac{1}{2}c^2$. Tuto hodnotu dostaneme, právě když body K, L budou po řadě středy odvěsen AC, BC daného pravoúhlého trojúhelníku.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyjádření zkoumaného součtu pomocí dvou vhodně zvolených parametrů. Za následnou úpravu do tvaru s druhými mocninami, z něhož je hledaná nejmenší hodnota a také příslušná poloha bodů K a L zřejmá, udělte další 3 body. Za uvedení správné odpovědi pro polohu obou hledaných bodů K, L a vyjádření nejmenší hodnoty zkoumaného výrazu pomocí c udělte 1 bod.

3. Označme po sobě napsaná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$. Vzhledem k tomu, že součet každých sedmi po sobě napsaných čísel je roven témuž číslu 2 017, porovnáním dvou takových součtů s šesti společnými sčítanci

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+5} + a_{i+6} = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+6} + a_{i+7}$$

dojdeme k závěru, že rovnost $a_i = a_{i+7}$ platí pro každý přípustný index i, takže uvažovaná číselná posloupnost (a_i) má periodu délky 7. Platí tedy $a_1 = a_8 = a_{15} = \ldots$, $a_2 = a_9 = a_{16} = \ldots$, apod. Protože indexy 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789 členů této posloupnosti dávají v určitém pořadí všech sedm možných zbytků při dělení sedmi, je součet členů s těmito sedmi indexy roven součtu libovolných sedmi po sobě jdoucích členů této posloupnosti, tj. 2 017. Odtud již pro $a_{123} = 123$, $a_{234} = 234$ a $a_{345} = 345$ bezprostředně plyne

$$a_{456} + a_{567} + a_{678} + a_{789} = 2\,017 - (a_{123} + a_{234} + a_{345}) = 2\,017 - 702 = 1\,315.$$

Závěr. Hledaný součet je 1 315.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za objev, že posloupnost má periodu délky 7 (i bez zdůvodnění ze vzorového řešení, které lze totiž považovat za zřejmé). Další 2 body udělte za poznatek, že sedm zadaných indexů má různé zbytky při dělení sedmi, 1 bod pak za jeho důsledek, že sedm dotyčných členů dává součet 2 017, a zbylý 1 bod udělte za dopočet hledaného součtu.