Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí nerovnost*

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq a + 1.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y a z platí nerovnosti
   a) $2xyz \leqq x^2 + y^2z^2$, b) $(x^2 - y^2)^2 \geqq 4xy(x - y)^2$.
   [a) $P - L = (x - yz)^2$, b) $L - P = (x - y)^4$]
2. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost $a/b^2 + b/a^2 \geqq 1/a + 1/b$. [Vynásobte a^2b^2, vydělte $a + b$ a upravte na $(a - b)^2 \geqq 0$.]

D1. Užitím nerovnosti $u + 1/u \geqq 2$ ($\forall u > 0$) dokažte, že pro libovolné kladné číslo a platí
a) $\dfrac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$, b) $\dfrac{2a^2 + 1}{\sqrt{4a^2 + 1}} > 1$.
[Volte $u = \sqrt{a^2 + 2}$ v případě a), $u = \sqrt{4a^2 + 1}$ v případě b) a v obou případech využijte, že $u \neq 1$.]

D2. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\Big(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\Big) \geqq 4.$$

[$L = (b/c + c/b) + (a/d + d/a) \geqq 2 + 2 = 4$]

D3. Pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnost

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geqq 4.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [59–C–II–2]

D4. Najděte všechna reálná čísla x a y, pro něž výraz $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$ nabývá své nejmenší hodnoty. [65–C–I–3, část a)]

2. *Najděte největší přirozené číslo d, které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu*

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

dělitelná číslem d.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že v nekonečné řadě čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \cdot 4,\ 3 \cdot 4 \cdot 5,\ 4 \cdot 5 \cdot 6,\ \ldots,$$

je číslo první dělitelem všech čísel dalších. [Využijte toho, že ze dvou, resp. tří po sobě jdoucích čísel je vždy některé číslo dělitelné dvěma, resp. třemi.]

2. Najděte všechna celá $d > 1$, při nichž hodnoty výrazů $U(n) = n^3 + 17n^2 - 1$ a $V(n) = n^3 + 4n^2 + 12$ dávají při dělení číslem d stejné zbytky, ať je celé číslo n zvoleno jakkoli. [Vyhovuje jedině $d = 13$. Hledaná d jsou právě ta, která dělí rozdíl $U(n) - V(n) = 13n^2 - 13 = 13(n-1)(n+1)$ pro každé celé n. Abychom ukázali, že (zřejmě vyhovující) $d = 13$ je jediné, dosaďme do rozdílu $U(n) - V(n)$ hodnotu $n = d$: číslo d je s čísly $d-1$ a $d+1$ nesoudělné, takže dělí součin $13(d-1)(d+1)$, jedině když dělí činitel 13, tedy když $d = 13$.]

D1. Pro která přirozená čísla n není výraz $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkem osmi? [Výraz $V(n) = (n-1)(n+1)(n^2+12)$ je jistě násobkem osmi v případě lichého n, neboť $n-1$ a $n+1$ jsou dvě po sobě jdoucí sudá čísla, takže jedno z nich je dělitelné čtyřmi, a součin obou je tak násobkem osmi. Protože pro sudá n je součin $(n-1)(n+1)$ lichý, hledáme právě ta n tvaru $n = 2k$, pro něž není dělitelný osmi výraz $n^2 + 12 = 4(k^2 + 3)$, což nastane, právě když k je sudé. Hledaná n jsou tedy právě ta, jež jsou dělitelná čtyřmi.]

D2. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti. [59–C–II–1]

D3. Dokažte, že výrazy $23x+y$ a $19x+3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x a y. [60–C–I–2]

D4. Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. [62–C–I–5]

D5. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n je součet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dělitelný číslem 96. [63–C–I–5]

3. *Pata výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC dělí stranu AB v poměru $1:2$. Dokažte, že při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC platí nerovnost*

$$3|a-b| < c.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Připomeňte si, které nerovnosti splňují mezi sebou délky stran libovolného trojúhelníku (a kterým proto říkáme *trojúhelníkové*). Z nich pak odvoďte známé pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$ o porovnání velikostí vnitřních úhlů a délek protilehlých stran v libovolném trojúhelníku ABC. [Je-li $\alpha < \beta$, můžeme najít vnitřní bod X strany AC, pro který platí $|\sphericalangle ABX| = \alpha$, a tudíž $|AX| = |BX|$, takže z trojúhelníkové nerovnosti $|BC| < |BX| + |XC|$ už plyne $a < b$.]

2. Je-li D vnitřní bod úsečky AB, pak pro každý bod X kolmice vedené bodem D k přímce AB má výraz $|AX|^2 - |BX|^2$ tutéž hodnotu (rovnou hodnotě $|AD|^2 - |BD|^2$). Dokažte. [Užijte Pythagorovu větu pro trojúhelníky ADX a BDX.]

D1. Odvoďte nerovnost, která je zobecněním nerovnosti ze zadání soutěžní úlohy pro případ, kdy pata výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC rozděluje jeho stranu AB v poměru $1 : p$, kde p je dané kladné číslo různé od 1. [$(p+1)|a-b| < |p-1|c$.]

D2. Pro každý bod M uvnitř daného rovnostranného trojúhelníku ABC označme M_a, M_b, M_c jeho kolmé průměty po řadě na strany BC, AC, AB. Dokažte rovnost $|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = |AM_c| + |BM_a| + |CM_b|$. [Nejprve třikrát užijte výsledek úlohy N2 s bodem $X = M$ a odtud plynoucí vyjádření rozdílů $|AM|^2 - |BM|^2$, $|BM|^2 - |CM|^2$, $|CM|^2 - |AM|^2$ jednotlivě upravte a pak sečtěte.]

4. *Nalezněte všechny trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty a, b a c, pro které platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň $\bigl(P(1)\bigr)^2 + \bigl(P(2)\bigr)^2 + \bigl(P(3)\bigr)^2 = 22$.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechny dvojčleny $P(x) = ax + b$, pro které platí $P(2) = 3$ a $P(3) = 2$. [Jediný dvojčlen $P(x) = 5 - x$, neboť soustava rovnic $2a + b = P(2) = 3$, $3a + b = P(3) = 2$ má jediné řešení $a = -1$ a $b = 5$.]
2. Určete všechny trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$, pro které platí $P(1) = 4$, $P(2) = 9$ a $P(3) = 18$. [Jediný trojčlen $P(x) = 2x^2 - x + 3$, neboť soustava rovnic $a + b + c = 4$, $4a + 2b + c = 9$, $9a + 3b + c = 18$ má jediné řešení $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$.]
3. Určete všechny dvojčleny $P(x) = ax + b$ s celočíselnými koeficienty a a b, pro které platí $P(1) < P(2)$ a $P(1)^2 + P(2)^2 = 5$. [Vyhovují právě čtyři dvojčleny $x + 0$, $3x - 4$, $x - 3$ a $3x - 5$. Číslo 5 lze zapsat jediným způsobem jako součet dvou druhých mocnin celých čísel, nehledíme-li na pořadí sčítanců, totiž $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$. Proto čísla $P(1) < P(2)$ tvoří jednu z dvojic $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 1)$; pro každou z nich vypočtěte koeficienty a, b postupem k úloze N1.]

D1. Pro které trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ platí rovnost $P(4) = P(1) - 3P(2) + 3P(3)$? [Pro všechny. Přesvědčete se dosazením, že obě strany dotyčné rovnosti jsou rovny $16a + 4b + c$.]

D2. Koeficienty a, b, c trojčlenu $P(x) = ax^2 + bx + c$ jsou reálná čísla, přitom každá ze tří jeho hodnot $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$ je celým číslem. Plyne odtud, že také čísla a, b, c jsou celá, nebo je nutně celé aspoň některé z nich (které)? [Neplyne, uvažte příklad trojčlenu $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$: z vyjádření $P(x) = \frac{1}{2}x(x + 1) + 1$ plyne, že $P(x)$ je celým číslem pro každé celé x, neboť součin $x(x + 1)$ je tehdy dělitelný dvěma. V obecné situaci je pouze koeficient c nutně celé číslo; plyne to z vyjádření $c = P(0) = 3P(1) - 3P(2) + P(3)$.]

5. *V daném trojúhelníku ABC zvolme uvnitř strany AC body K, M a uvnitř strany BC body L, N tak, že*

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Dále označme E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABLK$, F průsečík úhlopříček lichoběžníku $KLNM$ a G průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABNM$. Dokažte, že body E, F a G leží na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC, a určete poměr $|GF| : |EF|$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Zopakujte si, co víte o podobnosti dvou trojúhelníků z učiva základní školy: Podobnost $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ s koeficientem k znamená, že pro obvykle značené délky stran a velikosti vnitřních úhlů obou trojúhelníků platí rovnosti $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$. Stačí k tomu, aby platilo (i) $a_2 : b_2 : c_2 = a_1 : b_1 : c_1$ (věta *sss*) nebo (ii) $\alpha_2 = \alpha_1$ a $\beta_2 = \beta_1$ (věta *uu*) nebo (iii) $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$ a $\gamma_2 = \gamma_1$ (věta *sus*).
2. Nechť $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou libovolné dva podobné trojúhelníky ($A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$). Označme S_1, S_2 po řadě středy stran A_1B_1, A_2B_2. Dokažte podobnost $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$ a ukažte, že má stejný koeficient jako původní

podobnost $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. [Podobnost $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$ platí díky větě *sus*, neboť vnitřní úhly obou trojúhelníků u vrcholů A_1, A_2 jsou shodné a pro délky stran, které je svírají, platí $|A_2S_2| : |A_1S_1| = \left(\frac{1}{2}|A_2B_2|\right) : : \left(\frac{1}{2}|A_1B_1|\right) = |A_2B_2| : |A_1B_1| = |A_2C_2| : |A_1C_1|$. Předpokládaná i dokázaná podobnost mají stejný koeficient $k = |A_2B_2|/|A_1B_1|$.]

3. Dokažte, že libovolná spojnice ramen daného lichoběžníku $ABCD$, která je rovnoběžná s jeho základnami $AB \parallel CD$, je úsečka, jejíž střed leží na spojnici středů obou základen. Pak ukažte, že průsečík úhlopříček P je středem té ze zmíněných spojnic ramen, která tímto průsečíkem prochází. [Užijte nejprve výsledek úlohy N2 pro podobné trojúhelníky se společným vrcholem, kterým je průsečík prodloužených ramen, a protilehlými stranami, kterými jsou jednak základna lichoběžníku, jednak uvažovaná spojnice ramen. K důkazu vlastnosti průsečíku P označte $E \in BC$, $F \in AD$ krajní body příslušné spojnice ramen a využijte toho, že podobnost trojúhelníků APF, ACD ma stejný koeficient jako podobnost trojúhelníků BEP, BCD.]

D1. Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí $p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|$.
   a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.
   b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4. [65–C–I–4]

D2. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$. [64–C–I–4]

6. *a) Maruška rozmístí do vrcholů pravidelného osmiúhelníku různé počty od jednoho do osmi bonbonů. Petr si pak může vybrat, které tři hromádky bonbonů dá Marušce, ostatní si ponechá. Jedinou podmínkou je, že tyto tři hromádky leží ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku. Maruška chce rozmístit bonbony tak, aby jich dostala co nejvíce, ať už Petr trojici vrcholů vybere jakkoli. Kolik jich tak Maruška zaručeně získá?*

b) Stejnou úlohu řešte i pro pravidelný devítiúhelník, do jehož vrcholů rozmístí Maruška 1 až 9 bonbonů.

(Mezi rovnoramenné trojúhelníky řadíme i trojúhelníky rovnostranné.)

Návodné a doplňující úlohy:

1. K vrcholům pravidelného sedmiúhelníku připíšeme čísla od 1 do 7 v jakémkoli pořadí. Dokažte, že součet tří čísel u vrcholů některého rovnoramenného trojúhelníku je menší než 9. [Uvažte dva vrcholy X a Y s čísly 1 a 2 a rozborem všech možností ověřte, že existují vždy tři rovnoramenné trojúhelníky XYZ s vhodnou volbou třetího vrcholu Z. Vybereme z nich to Z, u kterého není ani číslo 7, ani číslo 6. Součet čísel u vrcholů příslušného trojúhelníku XYZ je pak nejvýše $1 + 2 + 5 = 8$.]
2. Zůstane obecně platné tvrzení z úlohy N1, když v něm závěrečné číslo 9 zaměníme číslem 8? [Ne. Připište vrcholům v jednom směru po hranici po řadě čísla 1, 3, 4, 2, 5, 6 a 7. Pak součet tří čísel u vrcholů každého rovnoramenného trojúhelníku bude alespoň 8. Uvědomte si, že při prověrce posledního poznatku

(i pro jiná rozmístění čísel nežli námi uvedené) stačí ověřit, že jsou *různostranné* ty dva trojúhelníky, které mají u svých vrcholů trojice čísel $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$.]

D1. Každý vrchol pravidelného 19úhelníku je obarven jednou ze šesti barev. Vysvětlete, proč stejnou barvu mají všechny vrcholy některého tupoúhlého trojúhelníku. [62–C–S–3]

D2. Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku. [62–C–I–4]