66. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zvonkohra na nádvoří hraje v každou celou hodinu krátkou skladbu, a to počínaje 8. a konče 22. hodinou. Skladeb je celkem osmnáct, v celou hodinu se hraje vždy jen jedna a po odehrání všech osmnácti se začíná ve stejném pořadí znovu. Olga a Libor byli na nádvoří v pondělí v 15 hodin. Ten samý týden si přišli zvonkohru poslechnout ještě jednou v poledne, k jejich zklamání však hrála ta samá melodie, kterou slyšeli v pondělí.

Který den byla Olga s Liborem na nádvoří podruhé? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Kolik z osmnácti skladeb zazní v jeden den a na kolik z nich se nedostane?

Možné řešení. Mezi odehráním první ranní a poslední večerní skladby uplyne $22-8=14$ hodin, každý den se proto hraje patnáct skladeb. Ve zvonkohře je nastaveno osmnáct skladeb, tedy o tři více.

Na skladbu, kterou slyšeli hrdinové úlohy v pondělí v 15 hodin, se v úterý dostalo o 3 hodiny později, tedy v 18 hodin. Ve středu o další 3 hodiny později, tedy ve 21 hodin.

Ve čtvrtek sledovaná skladba nezazněla vůbec: od posledního jejího uvedení hrála ze sedmnácti ostatních skladeb jedna ve středu ve 22 hodin, patnáct ve čtvrtek, jedna v pátek v 8 hodin a na sledovanou skladbu se dostalo až v 9 hodin.

Následující den, v sobotu, zazněla sledovaná skladba o 3 hodiny později, tedy ve 12 hodin. V neděli o další 3 hodiny později, tedy v 15 hodin.

Daný týden hrála sledovaná skladba v poledne jedině v sobotu, Olga a Libor přišli na nádvoří podruhé v sobotu.

Poznámka. Předchozí diskuze může být nahrazena programem zvonkohry pro daný týden. Skladby označujeme čísly 1 až 18, přičemž 1 označuje tu, kterou slyšela Olga s Liborem:

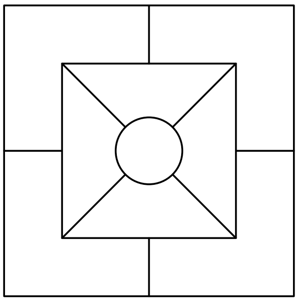
	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h	19 h	20 h	21 h	22 h
po							...	**1**	2	3	4	5	6	7	8
út	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	**1**	2	3	4	5
st	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	**1**	2
čt	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
pá	18	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
so	15	16	17	18	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ne	12	13	14	15	16	17	18	**1**	...						

Z5–I–2

V každém z rohových polí vnějšího čtverce má být napsáno jedno z čísel 2, 4, 6 a 8, přičemž v různých polích mají být různá čísla. Ve čtyřech polích vnitřního čtverce mají být součiny čísel ze sousedících polí vnějšího čtverce. V kruhu má být součet čísel ze sousedících polí vnitřního čtverce.

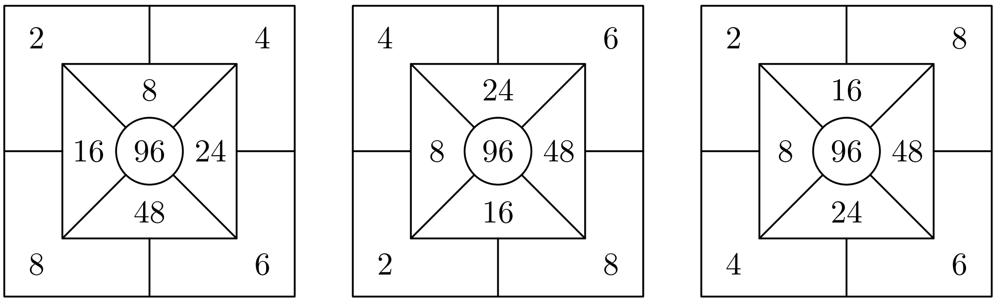
Která čísla mohou být napsána v kruhu? Určete všechny možnosti.

(*M. Dillingerová*)



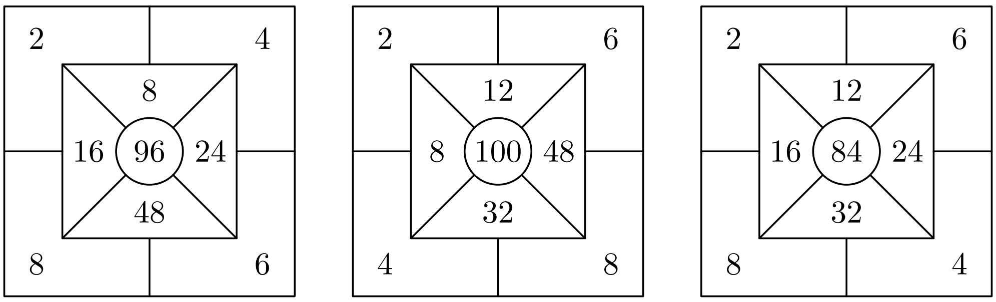
Nápověda. Mohou různá vyplnění rohových polí vést ke stejnému součtu v kruhu?

Možné řešení. Čísla 2, 4, 6 a 8 lze do rohových polí napsat mnoha způsoby. Pro různé způsoby však můžeme nakonec dostat tentýž součet v kruhu, jako např. v následujících případech:



První a druhý případ se liší pootočením o 90°, druhý a třetí jsou souměrné podle vodorovné osy čtverce atp. Různé hodnoty v kruhu tedy dostaneme, pouze když čísla v rohových polích nejsou nijak souměrná.

Zkoušení všech možností si proto můžeme zjednodušit tím, že uvažujeme jedno z čísel, např. 2, v jednom konkrétním poli, např. vlevo nahoře. Ostatní čísla doplňujeme tak, aby žádná dvě vyplnění nebyla souměrná. Přitom jediná souměrnost, která zachovává 2 v levém horním poli, je souměrnost podle úhlopříčky procházející tímto polem. S těmito požadavky máme následující tři řešení:



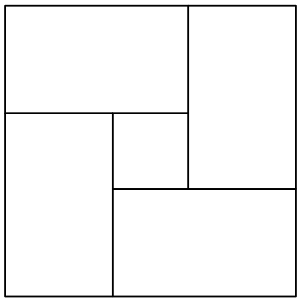
V kruhu mohou být napsána čísla 84, 96 a 100.

Poznámka. Pro každé vyplnění rohových polí můžeme najít 7 dalších, která jsou s ním nějak souměrná. Všechna vyplnění tedy lze rozdělit do osmic, které jistě mají stejné součty v kruhu. Přitom čísla do čtyřech rohových polí lze vyplnit celkem 24 způsoby. V kruhu tak mohou být napsána nejvýše $24 : 8 = 3$ různá čísla. Zkoušením určíme, která čísla to jsou, a že jsou navzájem různá.

Z5–I–3

Na obrázku je čtvercová dlaždice se stranou délky 10 dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod celé dlaždice.

Určete rozměry obdélníků. (*K. Pazourek*)



Nápověda. Určete délku strany malého čtverce.

Možné řešení. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod dlaždice, proto i jeho strana je pětkrát menší než strana dlaždice. Strana malého čtverce tedy měří

$$10 : 5 = 2\,(\mathrm{dm}).$$

Přitom délka strany dlaždice je rovna součtu délek strany malého čtverce a dvou kratších stran obdélníku. Kratší strana obdélníku tedy měří

$$(10 - 2) : 2 = 4\,(\mathrm{dm}).$$

Současně délka strany dlaždice je rovna součtu délek kratší a delší strany obdélníku. Delší strana obdélníku tedy měří

$$10 - 4 = 6\,(\mathrm{dm}).$$

Rozměry obdélníků jsou $4\,\mathrm{dm} \times 6\,\mathrm{dm}$.

Z5–I–4

Prodavač vánočních stromků prodával smrčky po 220 Kč, borovičky po 250 Kč a jedličky po 330 Kč. Ráno měl stejný počet smrčků, jedliček a borovic. Večer měl všechny stromky prodané a celkem za ně utržil 36 000 Kč.

Kolik stromků toho dne prodavač prodal? (*M. Krejčová*)

Nápověda. Počítejte po trojicích.

Možné řešení. Trojice smrček, borovička a jedlička stála dohromady

$$220 + 250 + 330 = 800 \text{ Kč}.$$

Prodavač takových trojic za celý den prodal $36\,000 : 800 = 45$.

Celkem tedy prodal $3 \cdot 45 = 135$ stromků.

Z5–I–5

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby součet doplněných číslic byl lichý a aby platila následující rovnost:

$$42 \times *8 = 2***$$

(*L. Hozová*)

Nápověda. Začněte od první hvězdičky.

Možné řešení. Postupně dosadíme všechny možné číslice na místě první hvězdičky, vypočítáme součin a prověříme ostatní požadavky:

- $42 \cdot 18 = 756$, výsledek je menší než 2 000; nevyhovuje.
- $42 \cdot 28 = 1\,176$, výsledek je menší než 2 000; nevyhovuje.
- $42 \cdot 38 = 1\,596$, výsledek je menší než 2 000; nevyhovuje.
- $42 \cdot 48 = 2\,016$, součet $4 + 0 + 1 + 6 = 11$ je lichý; vyhovuje.
- $42 \cdot 58 = 2\,436$, součet $5 + 4 + 3 + 6 = 18$ je sudý; nevyhovuje.
- $42 \cdot 68 = 2\,856$, součet $6 + 8 + 5 + 6 = 25$ je lichý; vyhovuje.
- $42 \cdot 78 = 3\,276$, výsledek je větší než 2 999; nevyhovuje.
- zbylé dva součiny jsou ještě větší; nevyhovují.

Úloha má dvě řešení, a to

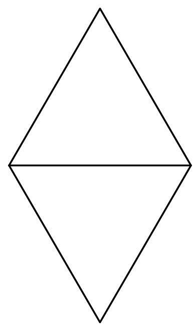
$$42 \cdot 48 = 2\,016 \quad \text{a} \quad 42 \cdot 68 = 2\,856.$$

Z5–I–6

Jiřka sestrojila dva shodné rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku. Dále chce sestrojit všechny kružnice, které budou mít střed v některém z vrcholů a budou procházet některým jiným vrcholem některého z trojúhelníků.

Sestrojte a spočítejte všechny kružnice vyhovující Jirčiným požadavkům.

(*K. Pazourek*)

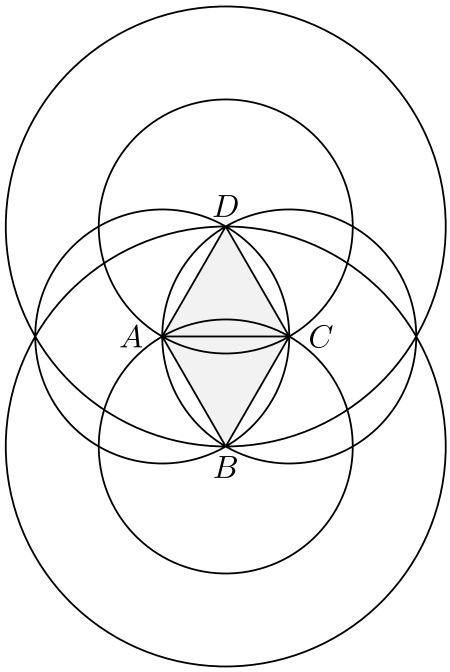


Nápověda. Začněte s vrcholy, které jsou společné oběma trojúhelníkům.

Možné řešení. Pojmenujme vrcholy jako na následujícím obrázku a povšimněme si, že body A a C jsou vždy od zbývajících tří bodů stejně vzdáleny (odpovídající úsečky tvoří strany rovnostranných trojúhelníků). Proto kružnice se středem v bodě A procházející bodem B prochází také body C a D. Kružnice se středem v bodě A vyhovující Jirčiným požadavkům je tedy jediná. Podobně existuje jediná vyhovující kružnice se středem v bodě C.

Kružnice se středem v bodě B procházející bodem A prochází také bodem C, další kružnice prochází bodem D. Kružnice se středem v bodě B vyhovující Jiřčiným požadavkům jsou tedy dvě. Podobně existují dvě vyhovující kružnice se středem v bodě D.

Dohromady existuje šest vyhovujících kružnic:



I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Jana a David trénují sčítání desetinných čísel tak, že každý z nich napíše jedno číslo, a tato dvě čísla pak sečtou. Poslední příklad jim vyšel 11,11. Davidovo číslo mělo před desetinnou čárkou stejný počet číslic jako za ní, Janino číslo také. Davidovo číslo bylo zapsáno navzájem různými číslicemi, Janino číslo mělo právě dvě číslice stejné.

Určete největší možné číslo, které mohl napsat David. (*M. Petrová*)

Nápověda. Kolik číslic před/za desetinnou čárkou mohla mít sčítaná čísla?

Možné řešení. Aby byl součet uvedeného tvaru, nemohlo mít žádné z čísel před/za desetinnou čárkou více než dvě číslice. Tedy jak Janino, tak Davidovo číslo bylo typu $**,**$ nebo $*,*$. Protože výsledné číslo mělo na místě setin nenulovou číslici, muselo mít alespoň jedno z čísel na místě setin — a tedy i na místě desítek — nenulovou číslici. Kdyby také druhé z čísel mělo stejné vlastnosti, byl by výsledek větší než 11,11. Druhé z čísel proto bylo typu $*,*$ a celý příklad můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{r} * *, * * \\ *, * \\ \hline 1\,1, 1\,1 \end{array}$$

Protože pouze první číslo má na místě desítek a setin nenulové číslice, musí být obě tyto číslice 1. Celý příklad pak vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 1 *, * 1 \\ *, * \\ \hline 1\,1, 1\,1 \end{array}$$

Protože Davidovo číslo bylo zapsáno navzájem různými číslicemi, je první číslo Janino a druhé Davidovo. Zajímá nás, které největší číslo mohl napsat David, neboli které nejmenší číslo mohla napsat Jana:

- Nejmenší myslitelné Janino číslo je 10,01, což ovšem nevyhovuje podmínce, že právě dvě číslice jsou stejné.
- Další myslitelné Janino číslo je 10,11, což nevyhovuje ze stejného důvodu.
- Další myslitelné Janino číslo je 10,21, v tomto případě by Davidovo číslo bylo 0,9 a tato možnost vyhovuje všem podmínkám ze zadání.

Největší číslo, které mohl David napsat, bylo číslo 0,9.

Z6–I–2

Pan Kostkorád vlastnil zahradu obdélníkového tvaru, na které postupně dláždil chodníky z jedné strany na druhou. Chodníky byly stejně široké, křížily se na dvou místech a jednou vydlážděná plocha se při dalším dláždění přeskakovala.

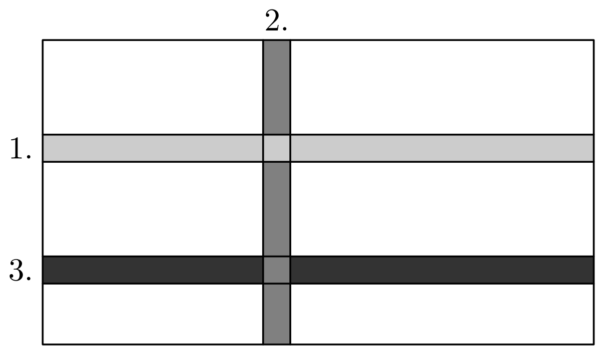
Když pan Kostkorád vydláždil chodník rovnoběžný s delší stranou, spotřeboval $228\,\mathrm{m}^2$ dlažby. Poté vydláždil chodník rovnoběžný s kratší stranou a spotřeboval $117\,\mathrm{m}^2$ dlažby.

Nakonec vydláždil ještě jeden chodník rovnoběžný s prvním chodníkem, tentokrát spotřeboval jen $219\,\mathrm{m}^2$ dlažby.

Určete rozměry Kostkorádovy zahrady. (*M. Petrová*)

Nápověda. Proč bylo u třetího chodníku použito méně dlažby než u prvního?

Možné řešení. Načrtneme si, jak Kostkorádova zahrada vypadala (čísla označují pořadí dlážděných chodníků):



První a třetí chodník mají stejné rozměry, tedy i stejnou plochu. U třetího chodníku se spotřebovalo méně dlažby než u prvního proto, že třetí chodník se v místě křížení s druhým chodníkem nedláždil (tam již byla dlažba položena). Tato společná část druhého a třetího chodníku je čtverec, jehož strana odpovídá šířce chodníku. Na vydláždění tohoto čtverce bylo spotřebováno

$$228 - 219 = 9\,(\mathrm{m}^2)$$

dlažby. Čtverec s obsahem $9\,\mathrm{m}^2$ má stranu dlouhou $3\,\mathrm{m}$, šířka všech tří chodníků je proto rovna $3\,\mathrm{m}$. Odtud a z množství dlažby použité na jednotlivé chodníky můžeme určit rozměry zahrady:

Na první chodník se spotřebovalo $228\,\mathrm{m}^2$ dlažby, což je skutečný obsah plochy chodníku. Délka zahrady je

$$228 : 3 = 76\,(\mathrm{m}).$$

Na druhý chodník se spotřebovalo $117\,\mathrm{m}^2$ dlažby, což je o $9\,\mathrm{m}^2$ méně než skutečný obsah plochy chodníku (společný čtverec s prvním chodníkem byl již vydlážděn). Šířka zahrady je

$$(117 + 9) : 3 = 126 : 3 = 42\,(\mathrm{m}).$$

Rozměry Kostkorádovy zahrady jsou $76\,\mathrm{m}$ a $42\,\mathrm{m}$.

Poznámka. Pokud řešitel při výpočtu šířky zahrady nepřipočítá oněch $9\,\mathrm{m}^2$, obdrží chybný rozměr $39\,\mathrm{m}$. Takové řešení hodnoťte nejvýše stupněm „dobře“.

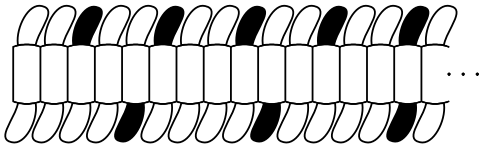
Z6–I–3

Mnohonožka Mirka sestává z hlavy a několika článků, na každém článku má jeden pár nohou. Když se ochladilo, rozhodla se, že se obleče. Proto si na třetím článku od konce a potom na každém dalším třetím článku oblékla ponožku na levou nožku. Podobně si na pátém článku od konce a potom na každém dalším pátém článku oblékla ponožku na pravou nožku. Poté zjistila, že na 14 článcích jí zůstaly obě nohy bosé.

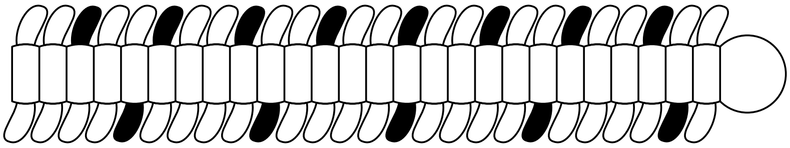
Zjistěte, kolik celkem nohou mohla mít mnohonožka Mirka; určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Nápověda. Kolikátý článek odzadu má jako první obě nohy oblečené?

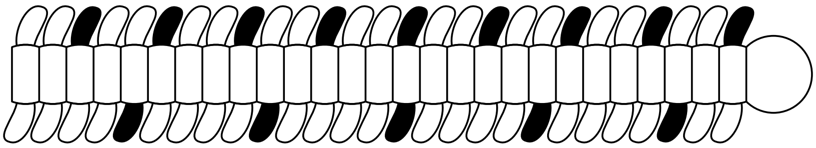
Možné řešení. Naznačme několik posledních článků mnohonožky Mirky (zleva doprava), horní řádek představuje levé nohy, spodní řádek pravé. Oblečené nohy vyznačujeme černě, bosé nohy bíle, a to tak dlouho, dokud nejsou na jednom článku obě nohy oblečené — poté se vzor opakuje:



Kdyby měla mnohonožka 15 článků, byly by na 8 článcích obě nohy bosé. Pokračujeme dále, dokud nedostaneme 14 článků s oběma nohami bosými:



Pokračujeme dále, pokud je počet článků s oběma nohama bosými stejný:



Mnohonožka Mirka měla buď 26, nebo 27 článků, tedy buď 52, nebo 54 nohou.

Z6–I–4

Čtyři rodiny byly na společném výletě. V první rodině byli tři sourozenci, a to Alice, Bětka a Cyril. V druhé rodině byli čtyři sourozenci, a to David, Erika, Filip a Gábina. V třetí rodině byli dva sourozenci, a to Hugo a Iveta. Ve čtvrté rodině byli tři sourozenci, a to Jan, Karel a Libor. Cestou se děti rozdělily do skupin tak, že v každé skupině byly všechny děti se stejným počtem bratrů a nikdo jiný.

Jak se mohly děti rozdělit? Určete všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Spočítejte bratry každého dítěte.

Možné řešení. V každé skupině jsou jenom děti se stejným počtem bratrů a počet bratrů každého dítěte je ze zadání známý. Proto se děti mohly rozdělit jediným možným způsobem. Stačí postupně určit počty bratrů každého dítěte a utvořit odpovídající skupiny.

- Alice a Bětka mají jednoho bratra, Cyril žádného.
- Erika a Gábina mají dva bratry, David a Filip jednoho.
- Iveta má jednoho bratra, Hugo žádného.
- Jan, Karel a Libor mají dva bratry.

Děti se tedy rozdělily do tří skupin:

- Erika, Gábina, Jan, Karel, Libor.
- Alice, Bětka, David, Filip, Iveta.
- Cyril, Hugo.

Z6–I–5

Jirka si nakreslil čtvercovou síť s 25 čtverečky, viz obrázek. Poté chtěl každý čtvereček vybarvit tak, aby stejně vybarvené čtverečky neměly společný žádný vrchol.

Kolik nejméně barev musel Jirka použít? (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Začněte v některém rohovém čtverečku.

Možné řešení. Pokud je levý horní čtvereček vybarven nějakou barvou, musí být okolní tři čtverečky vybarveny navzájem různými barvami. Jirka musel použít aspoň 4 barvy, které budeme značit číslicemi od 1 do 4:

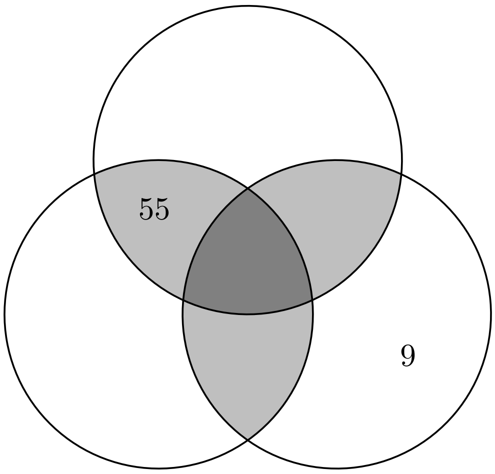
1	2			
4	3			

Nyní potřebujeme zjistit, zda čtyři barvy stačí na vybarvení zbytku sítě podle uvedených pravidel, či nikoli. Postupně zjistíme, že čtyři barvy skutečně stačí:

1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1

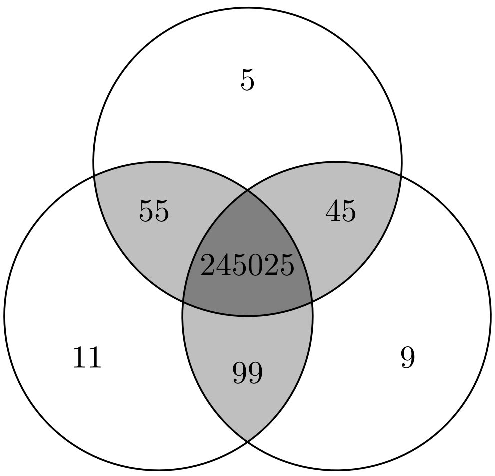
Z6–I–6

Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček: (*T. Salčák*)



Nápověda. Mohou být v nevyplněných bílých polích jakákoli čísla?

Možné řešení. V nevyplněných bílých polích mohou být napsány jen takové dvojice celých čísel, jejichž součin je 55 a z nichž každé je větší než 1. Tomu vyhovuje pouze dvojice 5 a 11 a tím jsou také určena čísla v ostatních nevyplněných polích: ve světle šedých polích dostáváme $9 \cdot 5 = 45$ a $9 \cdot 11 = 99$, v nejtmavším pak $55 \cdot 45 \cdot 99 = 245\,025$.

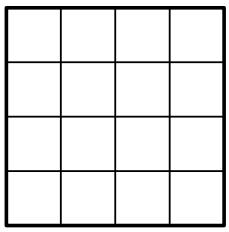


Poznámka. Čísla 5 a 11 lze do obrázku vyplnit dvojím způsobem, což je v této úloze nepodstatné. Na hodnocení nemá vliv, zda řešitel uvažuje obě možnosti, nebo jenom jednu.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Čtverec se stranou 4 cm je rozdělen na čtverečky se stranou 1 cm jako na obrázku. Rozdělte čtverec podél vyznačených čar na dva útvary s obvodem 16 cm. Najděte alespoň tři různá řešení (tzn. taková tři řešení, aby žádný útvar jednoho řešení nebyl shodný s žádným útvarem jiného řešení). (*V. Hucíková*)

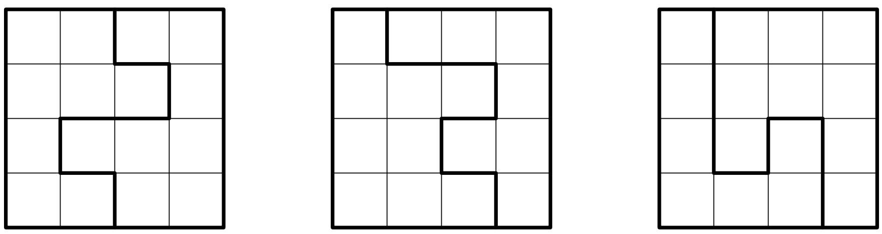


Nápověda. Kde na obvodu čtverce mohou být koncové body dělicí čáry?

Možné řešení. Lomená čára, která rozděluje čtverec na dva útvary, leží celá uvnitř čtverce, s jeho obvodem má společné pouze koncové body. Vzhledem k tomu, že nové útvary mají mít stejný obvod, musí mít stejnou také tu jeho část, která je na obvodu čtverce. Koncové body dělicí čáry proto musí být souměrné podle středu čtverce.

Daný čtverec má obvod 16 cm a obvod dvou nových útvarů má být dohromady 32 cm. Dělicí čára je společná oběma útvarům, dvojnásobek její délky proto odpovídá rozdílu $32 - 16 = 16$ (cm). Dělicí čára musí být dlouhá 8 cm.

Nyní nezbývá než zkoušet:



Poznámka. Jakékoli jiné rozdělení je shodné s některým z předchozích.

Z7–I–2

Na lyžařské soustředění přijeli 4 kamarádi ze 4 světových stran a vedli následující rozhovor.

Karel: „Nepřijel jsem ze severu ani z jihu."

Mojmír: „Zato já jsem přijel z jihu."

Pepa: „Přijel jsem ze severu."

Zdenda: „Já z jihu nepřijel."

Víme, že jedna výpověď není pravdivá. Určete, která to je.

Kdo tedy přijel ze severu a kdo z jihu? (*M. Volfová*)

Nápověda. Přeformulujte předchozí výpovědi vzhledem ke světovým stranám (nikoli vzhledem k jednotlivým kamarádům).

Možné řešení. Podle předchozích výroků si představíme, odkud kdo mohl přijet:

- ze severu Pepa, nebo Zdenda,
- z východu Karel, nebo Zdenda,
- z jihu Mojmír,
- ze západu Karel, nebo Zdenda.

Nyní zvažujeme, které výroky mohly být nepravdivé:

- Kdyby lhal Mojmír, museli by všichni ostatní mluvit pravdu, a to by znamenalo, že z jihu nepřijel nikdo. Mojmírova výpověď tedy byla pravdivá.
- Kdyby lhal Zdenda, musel by přijet z jihu, což by znamenalo, že lhal i Mojmír. Zdendova výpověď tedy byla pravdivá.
- Kdyby lhal Karel, musel by přijet ze severu, nebo z jihu. To by v prvním případě znamenalo, že lhal i Pepa, ve druhém případě, že lhal i Mojmír. Karlova výpověď tedy byla pravdivá.

Mojmír, Zdenda a Karel mluvili pravdu, lhal tedy Pepa (což vskutku není s ničím v rozporu). Ze severu proto přijel Zdenda, z jihu přijel Mojmír.

Poznámka. Pepa a Karel přijeli jeden z východu a jeden ze západu; z uvedeného nelze přesně určit, kdo přijel odkud.

Z7–I–3

Anička má 50 Kč, Anežka má 46 Kč a za všechny peníze chtějí koupit zákusky na rodinnou oslavu. Rozhodují se mezi dortíky a větrníky: větrník je o 4 Kč dražší než dortík a dortíků by se dalo za všechny peníze koupit o třetinu více než větrníků.

Kolik stojí každý ze zákusků? (*M. Volfová*)

Nápověda. Kolika způsoby lze beze zbytku utratit Aniččiny a Anežčiny peníze?

Možné řešení. Anička s Anežkou mají dohromady 96 Kč. Tuto částku lze utratit jen několika způsoby, jež jsou odvozeny z vyjádření čísla 96 jako součinu dvou přirozených čísel:

$$96 = 1 \cdot 96 = 2 \cdot 48 = 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24 = 6 \cdot 16 = 8 \cdot 12.$$

Ceně větrníku a ceně dortíku mají odpovídat čísla s rozdílem 4. Takové dvojice čísel jsou mezi uvedenými součiniteli pouze tři (vyznačeny tlustě):

$$\mathbf{2} \cdot 48 = \mathbf{6} \cdot 16, \quad \mathbf{4} \cdot 24 = \mathbf{8} \cdot 12, \quad 6 \cdot \mathbf{16} = 8 \cdot \mathbf{12}.$$

V prvním případě by se děvčata rozhodovala mezi 48 dortíky po 2 Kč a 16 větrníky po 6 Kč; 48 však není o třetinu více než 16, proto tato možnost nevyhovuje.

Ve druhém případě by se děvčata rozhodovala mezi 24 dortíky po 4 Kč a 12 větrníky po 8 Kč; 24 však není o třetinu více než 12, proto ani tato možnost nevyhovuje.

Ve třetím případě by se děvčata rozhodovala mezi 8 dortíky po 12 Kč a 6 větrníky po 16 Kč; přitom 8 je o třetinu více než 6, proto se jedná o jedinou vyhovující možnost.

Jeden dortík stál 12 Kč, jeden větrník stál 16 Kč.

Jiné řešení. Za stejné peníze lze koupit o třetinu více dortíků než větrníků, tzn. za cenu 3 větrníků lze koupit 4 dortíky. Větrník je o 4 Kč dražší než dortík, 3 větrníky tedy stojí o 12 Kč více než 3 dortíky. Z uvedeného plyne, že 12 Kč plus cena 3 dortíků odpovídá ceně 4 dortíků. Proto dortík stojí 12 Kč. Větrník stojí o 4 Kč více, tedy 16 Kč.

(Pro kontrolu: za 96 Kč mohou dívky koupit $96 : 16 = 6$ větrníků nebo $96 : 12 = 8$ dortíků.)

Poznámka. Pro všechny, kdo umí vyjádřit podmínky ze zadání pomocí neznámých, dodáváme:

Pokud cenu dortíku označíme d (Kč), potom větrník stojí $d + 4$ (Kč). Pokud počet větrníků, které lze koupit za všechny peníze, označíme k, potom dortíků lze za stejné peníze koupit $\frac{4}{3}k$. Ze zadání víme, že

$$k \cdot (d + 4) = \frac{4}{3}k \cdot d.$$

Odtud vyplývá, že $3d + 12 = 4d$, tedy $d = 12$, resp. $d + 4 = 16$.

Z7–I–4

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby následující zápis součinu dvou čísel byl platný:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
 & \times & & * & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

(*L. Hozová*)

Nápověda. Začněte s druhou číslicí druhého součinitele.

Možné řešení. Číslo 4 949 je součinem prvního součinitele a druhé číslice druhého součinitele. Přitom $4\,949 = 707 \cdot 7$, tudíž

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 7 & 0 & 7 \\
 & \times & & * & 7 & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

Poslední pomocný součin je součinem 707 a první číslice druhého součinitele. Přitom tento součin je trojmístný, tudíž ona číslice může být jedině 1,

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 7 & 0 & 7 \\
 & \times & & 1 & 7 & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & 7 & 0 & 7 & & \\
\hline
* & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

První pomocný součin je součinem 707 a třetí číslice druhého součinitele. Přitom tento součin je čtyřmístný, tudíž ona číslice musí být větší než 1. Po dosazení všech číslic od 2 do 9 a dopočítání příkladu zjišťujeme, že čtvrtá číslice ve výsledku je rovna 4, pouze když neznámá číslice je 6.

Úloha má jediné řešení, a to

$$
\begin{array}{r}
7\,0\,7 \\
\times \quad 1\,7\,6 \\
\hline
4\,2\,4\,2 \\
4\,9\,4\,9 \\
7\,0\,7 \\
\hline
1\,2\,4\,4\,3\,2
\end{array}
$$

Poznámka. Závěrečné zkoušení je možné urychlit tím, že se nejprve zaměříme na druhou číslici prvního pomocného součinu — z uvedeného lze snadno vyvodit, že to může být jedině 2.

Z7–I–5

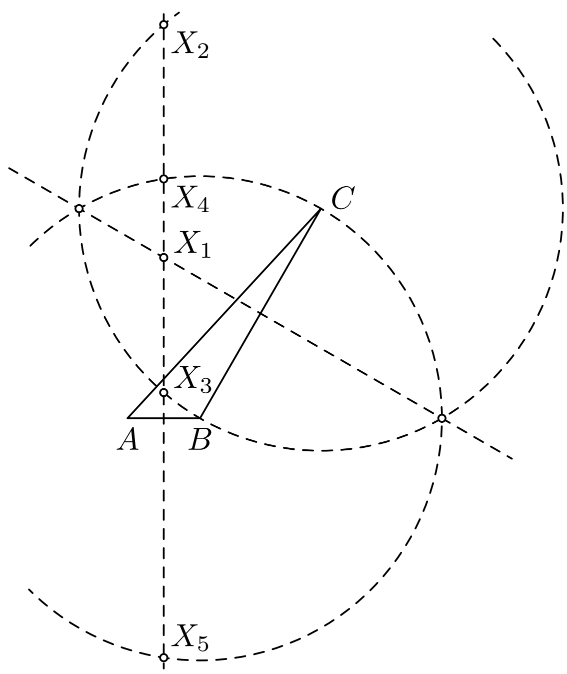
Je dán trojúhelník ABC se stranami $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 10\,\mathrm{cm}$ a s úhlem ABC o velikosti $120°$. Narýsujte všechny body X tak, aby platilo, že trojúhelník BCX je rovnoramenný a současně trojúhelník ABX je rovnoramenný se základnou AB.

(*E. Semerádová*)

Nápověda. Uvědomte si, jak sestrojíte třetí vrchol trojúhelníku, znáte-li dva jeho vrcholy a velikosti dvou zbylých stran.

Možné řešení. Úsečka AB je základnou rovnoramenného trojúhelníku ABX, tedy $|XA| = |XB|$. Všechny body X s touto vlastností tvoří osu úsečky AB, tzn. kolmici jdoucí středem úsečky AB.

Pokud je úsečka BC základnou rovnoramenného trojúhelníku BCX, potom bod X musí ležet na ose úsečky BC. V takovém případě je bod X průsečíkem os úseček AB a BC (na obrázku označen jako X_1).



Pokud je úsečka BC ramenem rovnoramenného trojúhelníku BCX a úsečka BX jeho základnou, potom $|CB| = |CX|$. Všechny body X s touto vlastností tvoří kružnici, která má střed v bodě C a prochází bodem B. V takovém případě je bod X průsečíkem této kružnice a osy úsečky AB (dvě možnosti, na obrázku označeny X_2 a X_3).

Pokud je úsečka BC ramenem rovnoramenného trojúhelníku BCX a úsečka CX jeho základnou, potom $|BC| = |BX|$. Všechny body X s touto vlastností tvoří kružnici, která má střed v bodě B a prochází bodem C. V takovém případě je bod X průsečíkem této kružnice a osy úsečky AB (dvě možnosti, na obrázku označeny X_4 a X_5).

Úloha má celkem pět řešení vytnačených na obrázku.

Poznámky. Zvolené měřítko nemá vliv na hodnocení úlohy, zato však věnujte pozornost konstrukci osy úsečky.

Osa úsečky BC prochází společnými body vyznačených kružnic. Body X_4 a X_5 lze sestrojit také jako průsečíky kružnice se středem v bodě B procházející bodem C a kružnice s týmž poloměrem a středem v bodě A.

Z7–I–6

Určete, pro kolik přirozených čísel větších než 900 a menších než 1 001 platí, že ciferný součet ciferného součtu jejich ciferného součtu je roven 1. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Jaký největší ciferný součet mají čísla od 900 do 1 001?

Možné řešení. Mezi čísly 900 a 1 001 má největší ciferný součet číslo 999, a to 27; většími součty se zabývat nemusíme.

Mezi čísly 1 a 27 má největší ciferný součet číslo 19, a to 10; většími součty se zabývat nemusíme.

Mezi čísly 1 a 10 mají ciferný součet 1 pouze čísla 1 a 10; ostatními čísly se zabývat nemusíme.

Nyní odzadu určíme všechna řešení (v prvním sloupci je 1 a v každém dalším sloupci jsou čísla, jejichž ciferný součet je roven číslu v sloupci předchozím):

1	1	1	1 000
		10	901
			910
	10	19	919
			928
			937
			946
			955
			964
			973
			982
			991

Čísel s uvedenými vlastnostmi je celkem 12.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Tři kamarádky veverky spolu vyrazily na sběr lískových oříšků. Zrzečka jich našla dvakrát víc než Pizizubka a Ouška dokonce třikrát víc než Pizizubka. Cestou domů si povídaly a přitom louskaly a jedly své oříšky. Pizizubka snědla polovinu všech oříšků, které nasbírala, Zrzečka třetinu všech svých oříšků a Ouška čtvrtinu těch svých. Doma veverky zjistily, že jim dohromady zbylo 196 oříšků.

Kolik oříšků našla každá z veverek? (*M. Petrová*)

Nápověda. Jakou část všech nalezených oříšků donesly veverky domů?

Možné řešení. Pokud množství oříšků, které našla Pizizubka, označíme x, potom Zrzečka našla $2x$ oříšků a Ouška $3x$ oříšků.

- Pizizubka snědla polovinu svých oříšků, zbylo jí $\frac{x}{2}$ oříšků.
- Zrzečka snědla třetinu svých oříšků, zbylo jí $\frac{2}{3} \cdot 2x = \frac{4}{3}x$ oříšků.
- Ouška snědla čtvrtinu svých oříšků, zbylo jí $\frac{3}{4} \cdot 3x = \frac{9}{4}x$ oříšků.

Všem veverkám dohromady zbylo

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4}\right) x = \frac{49}{12}x$$

oříšků, což je podle zadání rovno 196. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{49}{12}x &= 196, \\ \frac{x}{12} &= 4, \\ x &= 48. \end{aligned}$$

Pizizubka našla 48 oříšků, Zrzečka $2 \cdot 48 = 96$ oříšků a Ouška $3 \cdot 48 = 144$ oříšků.

Z8–I–2

Na každé stěně pravidelného osmistěnu je napsáno jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, přičemž na různých stěnách jsou různá čísla. U každé stěny Jarda určil součet čísla na ní napsaného s čísly tří sousedních stěn. Takto dostal osm součtů, které také sečetl.

Jakých hodnot může tento výsledný součet nabývat? (*J. Zhouf*)

Nápověda. Kolikrát je každé číslo započítáno do celkového součtu?

Možné řešení. Číslo na každé stěně je započítáno celkem ve čtyřech dílčích součtech (každá stěna se počítá jednou jako prostřední a třikrát jako sousední). Proto je také ve výsledném součtu každé z čísel započítáno čtyřikrát. Výsledný součet tedy nabývá hodnoty

$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4 \cdot 36 = 144,$$

a to nezávisle na tom, jak byla čísla na stěnách osmistěnu napsána.

Z8–I–3

Při střelbě z luku se mimo jiné sleduje výkonnost střelce. Ta se počítá tak, že se ze všech pokusů odebere jeden nejlepší a jeden nejhorší a z hodnocení zbylých se spočítá aritmetický průměr.

Kamarádi Petr, Jirka, Michal a Zdeněk stříleli po jenom šípu ve čtyřech kolech. Každá střela byla hodnocena celým číslem od 0 do 10. V každém kole byl součet hodnocení všech chlapců 32 bodů, ale ani v jednom kole neměli žádní dva chlapci stejné hodnocení.

V následující tabulce jsou vyplněny jen některé údaje z popsaného utkání, doplňte ty chybějící. (*M. Dillingerová*)

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr				5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5		8
Zdeněk					8,5
celkem	32	32	32	32	–

Nápověda. Začněte s Petrem.

Možné řešení. Protože výkonnost Petra byla 10, musel nastřílet v prvních třech kolech po 10 bodech. Protože součet hodnocení ve 3. kole byl 32 bodů, musel Zdeněk v tomto kole trefit 8 bodů. Protože součet hodnocení ve 4. kole byl 32 bodů, musel být součet hodnocení Michala a Zdeňka v tomto kole 17 bodů. Protože v žádném kole neměli žádní dva chlapci stejné hodnocení, mohli mít v tomto kole

a) buď Michal 9 a Zdeněk 8 bodů,
b) nebo Michal 8 a Zdeněk 9 bodů.

Předpokládejme možnost a) a pokusme se doplnit tabulku

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5	9	8
Zdeněk			8	8	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Aby výkonnost Zdeňka byla $8{,}5 = 17 : 2$, musel v prvních dvou kolech trefit po 9 bodech. Aby výkonnost Michala byla $8 = 16 : 2$ a aby v žádném kole neměl stejné hodnocení jako Zdeněk, musel v prvních dvou kolech trefit po 8 bodech. Aby součet hodnocení v 1. i 2. kole byl 32 bodů, musel Jirka v těchto dvou kolech trefit po 5 bodech. V takovém případě by však jeho výkonnost nebyla 7,5 (ale jen 7). Možnost a) proto nemohla nastat.

Předpokládejme možnost b) a pokusme se doplnit tabulku

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5	8	8
Zdeněk			8	9	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Aby výkonnost Jirky byla $7{,}5 = 15 : 2$, musel v jednom z prvních dvou kol trefit 6 a ve druhém 6 nebo méně bodů. Aby výkonnost Michala byla $8 = 16 : 2$ a aby v žádném kole neměl stejné hodnocení jako Petr, musel v jednom z prvních dvou kol trefit 8 a ve druhém 8 nebo 9 bodů.

Kdyby Jirka trefil 6 bodů ve stejném kole jako Michal 8, potom by Zdeněk ve stejném kole musel trefit 8 bodů (aby byl součet hodnocení v tomto kole roven 32 bodů). To by však Michal a Zdeněk měli stejné hodnocení, proto tato možnost nastat nemohla.

Jirka tedy musel trefit 6 bodů v jiném kole než Michal 8. Předpokládejme, že tak učinil v 1. kole a pokusme se doplnit tabulku (z předchozího vyplývá, že Michal v tomtéž kole musel trefit 9 bodů)

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka	6		9	10	7,5
Michal	9	8	5	8	8
Zdeněk			8	9	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Aby součet hodnocení v 1. kole byl 32 bodů, musel Zdeněk v tomto kole trefit 7 bodů. Aby výkonnost Zdeňka byla $8{,}5 = 17 : 2$, musel ve druhém kole trefit 9 bodů. Aby součet hodnocení ve 3. kole byl 32 bodů, musel Jirka v tomto kole trefit 5 bodů. Protože 5 je menší než 6, souhlasí výkonnost Jirky se zadáním. Našli jsme jedno vyhovující řešení úlohy:

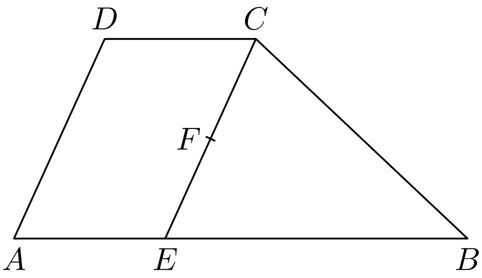
	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka	6	5	9	10	7,5
Michal	9	8	5	8	8
Zdeněk	7	9	8	9	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Jirka ovšem mohl trefit 6 bodů ve 2. kole. V takovém případě by výsledná tabulka měla prohozena hodnocení u 1. a 2. kola.

Z8–I–4

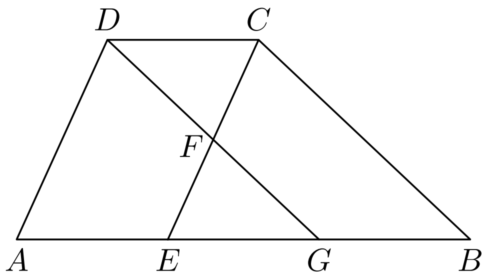
Lichoběžník $ABCD$ je úsečkou CE rozdělen na trojúhelník a rovnoběžník, viz obrázek. Bod F je středem úsečky CE, přímka DF prochází středem úsečky BE a obsah trojúhelníku CDE je $3\,\mathrm{cm}^2$.

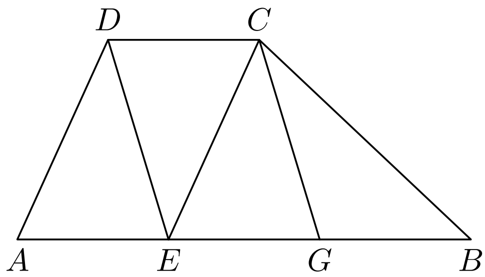
Určete obsah lichoběžníku $ABCD$. (*E. Semerádová*)



Nápověda. Porovnejte velikosti úseček AE a EB.

Možné řešení. Střed úsečky BE, kterým podle zadání prochází přímka DF, označíme G. Úsečka FG je střední příčkou trojúhelníku BCE, která je rovnoběžná se stranou BC. Zejména čtyřúhelník $GBCD$ je také rovnoběžníkem, a proto platí, že úsečky EG, GB, DC a AE jsou navzájem shodné.





Lichoběžník $ABCD$ tak můžeme rozdělit na čtyři trojúhelníky AED, DCE, EGC a GBC se stejným obsahem (první tři trojúhelníky jsou dokonce navzájem shodné). Obsah lichoběžníku je proto roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku CDE, tj.

$$4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{cm}^2.$$

Poznámka. Trojúhelníky DFC a GFE jsou shodné, proto má rovnoběžník $AECD$ stejný obsah jako trojúhelník AGD, a ten je shodný s trojúhelníkem EBC. (V obou případech lze shodnost trojúhelníků zdůvodnit několika způsoby, např. podle věty *usu*.) Obsah lichoběžníku $ABCD$ je proto roven dvojnásobku obsahu rovnoběžníku $AECD$, a ten je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku CDE.

Z uvedeného také vyplývá, že obsah trojúhelníku EBC je čtyřnásobkem obsahu trojúhelníku DFC, a ten je roven polovině obsahu trojúhelníku CDE.

Z8–I–5

Maminka donesla 10 zákusků tří druhů: kokosek bylo méně než laskonek a nejvíc bylo karamelových kostek. Josef si vybral dva zákusky různých druhů, Jakub udělal totéž a na Jana zbyly pouze zákusky stejného druhu.

Kolik kokosek, laskonek a karamelových kostek maminka donesla? (*V. Hucíková*)

Nápověda. Jaký druh zákusků zbyl na Jana?

Možné řešení. Když se k zákuskům dostal Jan, bylo jich 6 stejného druhu, a to karamelových kostek — kdyby to byly kokosky nebo laskonky, muselo by kostek být víc než 6 a zákusků celkem by pak bylo víc než 10. Proto karamelových kostek původně bylo alespoň 6 a maminka přinesla

- buď 1 kokosku, 3 laskonky a 6 kostek,
- nebo 1 kokosku, 2 laskonky a 7 kostek.

První možnost není vyhovující — aby Josef i Jakub měli každý dva zákusky různých druhů, musel by alespoň jeden z nich vybrat také kostku, a to by jich pak na Jana nezbylo 6.

Druhá možnost je vyhovující — jeden z prvních dvou chlapců si vybral kokosku a laskonku, druhý laskonku a kostku, na Jana zbylo 6 kostek.

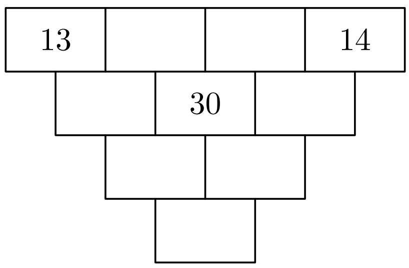
Maminka přinesla 1 kokosku, 2 laskonky a 7 karamelových kostek.

Z8–I–6

Každá cihlička následující pyramidy obsahuje jedno číslo. Kdykoli to je možné, je číslo v každé cihličce nejmenším společným násobkem čísel ze dvou cihliček ležících přímo na ní.

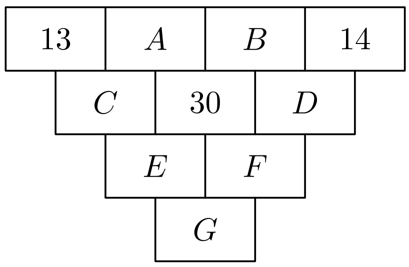
Které číslo může být v nejspodnější cihličce? Určete všechny možnosti.

(*A. Bohiniková*)



Nápověda. Jaký je nejmenší společný násobek tří čísel, z nichž jedno je dělitelem jiného?

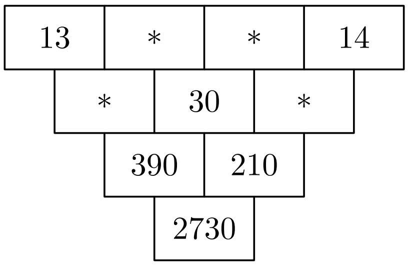
Možné řešení. Číslo 30 má celkem 8 dělitelů, jež mohou být dosazeny za A a B.



Číslo C je nejmenším společným násobkem 13 a A, číslo E je nejmenším společným násobkem C a 30, tedy E je nejmenším společným násobkem čísel 13, A a 30. Protože A je dělitelem čísla 30, je E nejmenším společným násobkem čísel 13 a 30, tj. $390 = 13 \cdot 30$.

Podobně lze zdůvodnit, že bez ohledu na hodnotu B, je F nejmenším společným násobkem čísel $14 = 2 \cdot 7$ a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, tj. $210 = 7 \cdot 30$.

Číslo G v nejspodnější cihličce proto může být jedině nejmenším společným násobkem čísel 390 a 210, tj. $2\,730 = 7 \cdot 13 \cdot 30$.



Poznámka. Pokud bychom uvažovali všechny možné dvojice čísel, jejichž nejmenší společný násobek je 30, potom dostaneme celkem 27 možností. Doplňováním jednotlivých případů za A a B si každý dřív nebo později všimne, že čísla E, F, a tedy i G jsou stále stejná.

I. kolo kategorie Z9

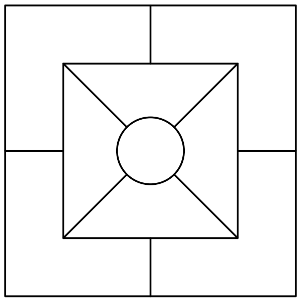
Z9–I–1

Ve všech devíti polích obrazce mají být vyplněna přirozená čísla tak, aby platilo:

- každé z čísel 2, 4, 6 a 8 je použito alespoň jednou,
- čtyři z polí vnitřního čtverce obsahují součiny čísel ze sousedících polí vnějšího čtverce,
- v kruhu je součet čísel ze sousedících polí vnitřního čtverce.

Zjistěte, které nejmenší a které největší číslo může být napsáno v kruhu.

(*M. Dillingerová*)



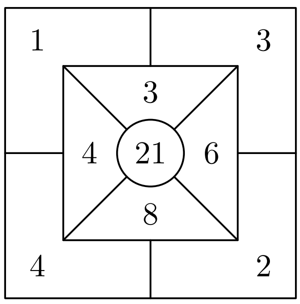
Nápověda. Může být číslo v kruhu menší než 20, resp. větší než 20 000?

Možné řešení. Pro dostatečně velké číslo v některém z rohových polí vnějšího čtverce mohou být odpovídající součiny ve vnitřním čtverci větší než libovolné předem zvolené číslo. Proto i součet v kruhu může být libovolně velký.

Zjistíme, jaký nejmenší součet může být v kruhu. Jistě to nemůže být žádné z předepsaných čísel: ani to největší z nich (8) totiž není větší než součet zbylých tří ($2+4+6 = 12$). Součet v kruhu proto musí být větší nebo roven součtu všech předepsaných čísel, tj. $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

Kdyby součet v kruhu byl 20, potom by předepsaná čísla musela být ve čtyřech sousedících polích malého čtverce. Protože jedno z těchto čísel je 6, muselo by být jedno ze sousedících polí vnějšího čtverce 6 nebo 3, a to by také musel být dělitel druhého sousedícího pole vnitřního čtverce. Žádné z čísel 2, 4 a 8 však takového dělitele nemá, proto tato možnost nastat nemůže.

Součet v kruhu proto musí být větší nebo roven 21. Následující vyplnění dokazuje, že nejmenší číslo, které může být v kruhu napsáno, je 21.



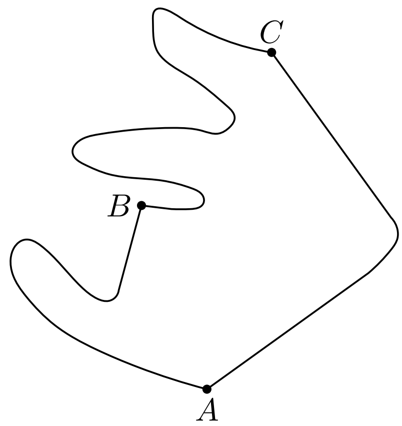
Poznámka. Všimněte si, že číslo v kruhu je vždy součinem součtů dvojic protilehlých čísel vnějšího čtverce. Tento poznatek lze také využít při řešení úlohy.

Z9–I–2

Z bodu A do bodu C vede naučná stezka procházející bodem B a jinudy také červená turistická značka, viz obrázek. Kromě toho lze použít také nezakreslenou zkratku dlouhou 1 500 metrů začínající v A a ústící na naučné stezce. Vojtěch zjistil, že

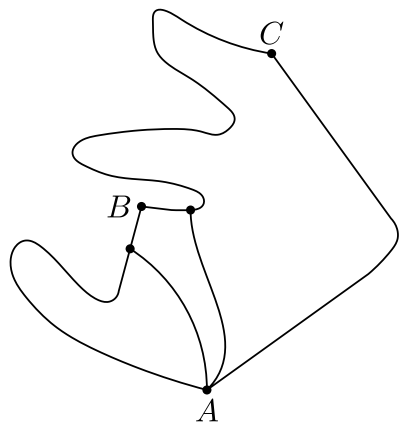
1. výlet z A po červené do C a po naučné stezce zpět do A je dlouhý 7 700 metrů,
2. výlet z B po naučné stezce do C a pak po červené do A je dlouhý 5 800 metrů,
3. s využitím zkratky je cesta z A do B dlouhá 1 700 metrů,
4. výlet z A po naučné stezce do C a zpět do A nejprve po naučné stezce a poté po zkratce je dlouhý 8 800 metrů.

Určete délku naučné stezky z A do C. Pokud zadání připouští více odpovědí, uveďte všechny. (*L. Šimůnek*)



Nápověda. Zjistěte, kde mohla ústit zkratka na naučnou stezku.

Možné řešení. Zkratka mohla ústit na naučnou stezku buď v úseku mezi A a B, nebo v úseku mezi B a C.



Zkratka byla dlouhá 1 500 m a s jejím využitím byla cesta z A do B (podle 3. informace) dlouhá 1 700 m. Vzdálenost B od ústí zkratky proto byla v obou případech stejná, a to

$$1\,700 - 1\,500 = 200\ (\mathrm{m}).$$

Z 1. a 2. informace plyne, že cesta z A do B po naučné stezce byla dlouhá

$$7\,700 - 5\,800 = 1\,900\,(\mathrm{m}).$$

Pokud délku úseku naučné stezky mezi B a C označíme y, potom s využitím 4. informace dostáváme dvě různé rovnice podle toho, kde ústí zkratka:

a) Pro ústí v úseku mezi A a B platí

$$\begin{aligned} 1\,900 + 2y + 200 + 1\,500 &= 8\,800, \\ 2y &= 5\,200, \\ y &= 2\,600\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

V tomto případě byla celá naučná stezka dlouhá

$$1\,900 + 2\,600 = 4\,500\,(\mathrm{m}).$$

b) Pro ústí v úseku mezi B a C platí

$$\begin{aligned} 1\,900 + 2y - 200 + 1\,500 &= 8\,800, \\ 2y &= 5\,600, \\ y &= 2\,800\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

V tomto případě byla celá naučná stezka dlouhá

$$1\,900 + 2\,800 = 4\,700\,(\mathrm{m}).$$

Poznámka. Pokud délku úseku naučné stezky mezi A a B označíme x, mezi B a ústím zkratky z a délku červené cesty mezi A a C označíme w, potom informace ze zadání lze zapsat pomocí rovnic takto:

1. $w + y + x = 7\,700$,
2. $y + w = 5\,800$,
3. $1\,500 + z = 1\,700$,
4. $x + 2y + z + 1\,500 = 8\,800$, resp. $x + 2y - z + 1\,500 = 8\,800$.

V předchozím je představeno postupné řešení této soustavy pro neznámé z, x a y (a následné vyjádření součtu $x+y$). Ze druhé rovnice lze vyjádřit také hodnotu neznámé w.

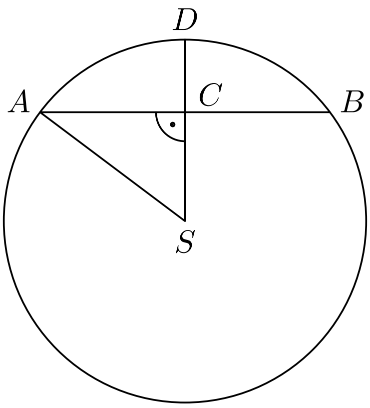
Z9–I–3

Julince se zakutálel míček do bazénu a plaval ve vodě. Jeho nejvyšší bod byl 2 cm nad hladinou. Průměr kružnice, kterou vyznačila hladina vody na povrchu míčku, byl 8 cm.

Určete průměr Julinčina míčku. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je vztah mezi poloměrem míčku, poloměrem kružnice vyznačené hladinou a vzdáleností středu míčku od hladiny?

Možné řešení. Následující obrázek znázorňuje řez míčku, který prochází jeho středem (bod S) a je kolmý k hladině (přímka AB). Bod C je patou kolmice z bodu S k hladině a bod D je nejvyšším bodem míčku nad hladinou.



Ze zadání víme, že $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 2\,\mathrm{cm}$. Poloměr míčku $|SA| = |SD|$ označíme r. Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ACS dostáváme:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 + (r-2)^2,\\ r^2 &= 16 + r^2 - 4r + 4,\\ 4r &= 20,\\ r &= 5. \end{aligned}$$

Julinčin míček měl průměr 10 cm.

Z9–I–4

Katka si myslela pětimístné přirozené číslo. Do sešitu napsala na první řádek součet myšleného čísla a poloviny myšleného čísla. Na druhý řádek napsala součet myšleného čísla a pětiny myšleného čísla. Na třetí řádek napsala součet myšleného čísla a devítiny myšleného čísla. Nakonec sečetla všechna tři zapsaná čísla a výsledek napsala na čtvrtý řádek. Poté s úžasem zjistila, že na čtvrtém řádku má zapsánu třetí mocninu jistého přirozeného čísla.

Určete nejmenší číslo, které si Katka mohla myslet na začátku. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Vyjádřete součet na čtvrtém řádku pomocí původně myšleného čísla.

Možné řešení. Pokud myšlené pětimístné číslo označíme x, potom na prvních třech řádcích byla napsána čísla $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$, $x + \frac{1}{5}x = \frac{6}{5}x$ a $x + \frac{1}{9}x = \frac{10}{9}x$. Součet na čtvrtém řádku byl roven

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{6}{5} + \frac{10}{9}\right)x = \frac{343}{90}x.$$

Tento výsledek má být třetí mocninou jistého přirozeného čísla, takže je sám přirozeným číslem. Jelikož čísla 343 a 90 jsou nesoudělná, musí být x násobkem 90. Jelikož 343 je třetí mocninou 7, musí být $\frac{1}{90}x$ třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Nejmenším násobkem 90, který je pětimístný, je $10\,080 = 90 \cdot 112$; proto $\frac{1}{90}x \geqq 112$. Nejmenší třetí mocninou nějakého přirozeného čísla, která je větší než nebo rovna 112, je $125 = 5^3$; proto $\frac{1}{90}x = 125$.

Nejmenší číslo, které si Katka mohla myslet, je $90 \cdot 125 = 11\,250$.

Z9–I–5

Myšky si postavily podzemní domeček sestávající z komůrek a tunýlků:

- každý tunýlek vede z komůrky do komůrky (tzn. žádný není slepý),
- z každé komůrky vedou právě tři tunýlky do tří různých komůrek,
- z každé komůrky se lze tunýlky dostat do kterékoli jiné komůrky,
- v domečku je právě jeden tunýlek takový, že jeho zasypáním se domeček rozdělí na dvě oddělené části.

Kolik nejméně komůrek mohl mít myší domeček? Načrtněte, jak mohly být komůrky pospojovány. (*K. Jasenčáková*)

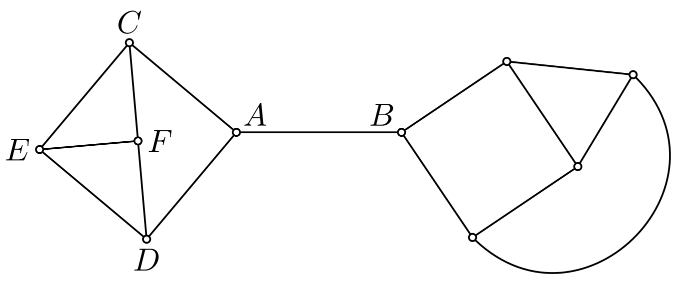
Nápověda. Začněte kritickým tunýlkem.

Možné řešení. Komůrky budeme značit kroužky, tunýlky čárami. Začneme kritickým tunýlkem, jehož zasypáním se domeček rozdělí na dvě oddělené části. Pokud komůrky na koncích tohoto tunýlku označíme A a B, potom každá komůrka patří do právě jedné z následujících dvou skupin:

a) komůrka A a všechny komůrky, do kterých se z ní lze dostat bez použití tunýlku AB,
b) komůrka B a všechny komůrky, do kterých se z ní lze dostat bez použití tunýlku BA.

To znamená, že žádná komůrka z jedné skupiny není spojena tunýlkem s žádnou komůrkou z druhé skupiny. Nyní určíme, kolik nejméně komůrek může být v jedné skupině, aby byly splněny ostatní podmínky:

- Aby z komůrky A vedly tři tunýlky, musí být ve skupině a) alespoň dvě další komůrky, které označíme C a D. Tři komůrky ve skupině však nestačí — lze spojit jedině C a D, a to by z C a D vedly pouze dva tunýlky.
- Proto ve skupině a) musí být alespoň jedna další komůrka, kterou označíme E. Čtyři komůrky však také nestačí — E lze spojit jedině s C a D, a to by z E vedly pouze dva tunýlky.
- Proto ve skupině a) musí být alespoň jedna další komůrka, kterou označíme F. Pět komůrek v jedné skupině už stačí — komůrky mohou být pospojovány např. takto:



Domeček měl nejméně 10 komůrek.

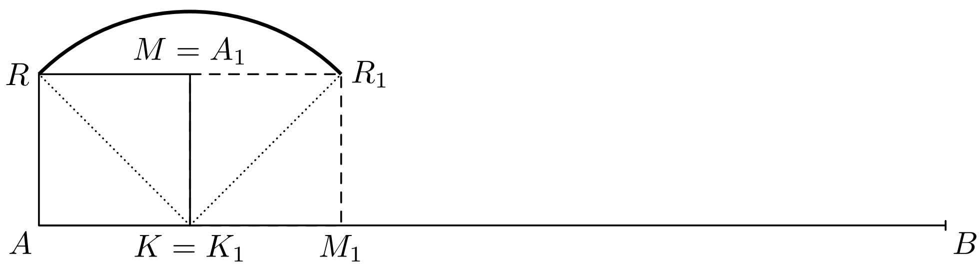
Z9–I–6

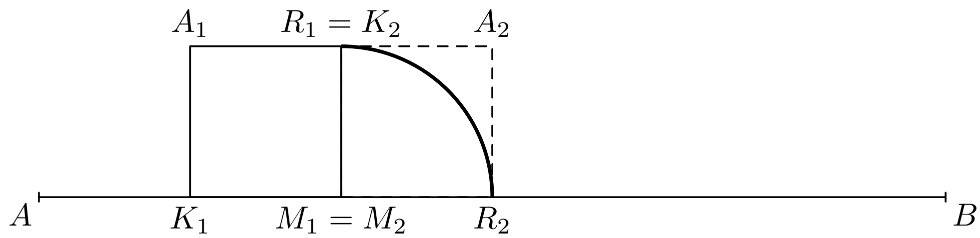
Je dána úsečka AB délky 12 cm, na níž je jednou stranou položen čtverec $MRAK$ se stranou délky 2 cm, viz obrázek. $MRAK$ se postupně překlápí po úsečce AB, přičemž bod R zanechává na papíře stopu.

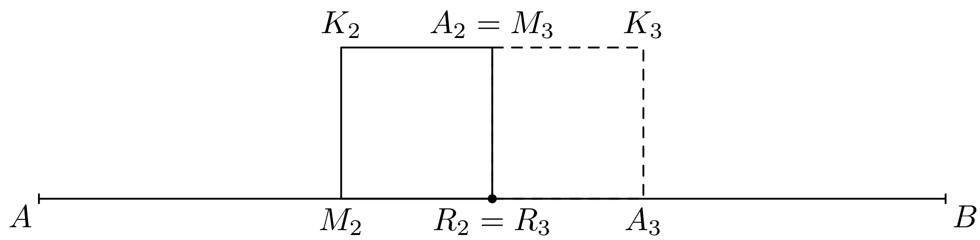
Narýsujte celou stopu bodu R, dokud čtverec neobejde úsečku AB z obou stran a nevrátí se do své původní polohy. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Rozdělte si úkol na etapy.

Možné řešení. Čtverec se postupně překlápí okolo bodů na úsečce AB (na následujících obrázcích to jsou body K, M_1, R_2, A_3, atd.). V každé etapě se bod R pohybuje po části kružnice, jejíž střed je v některém z vyznačených bodů a poloměr je roven buď straně, nebo úhlopříčce čtverce.

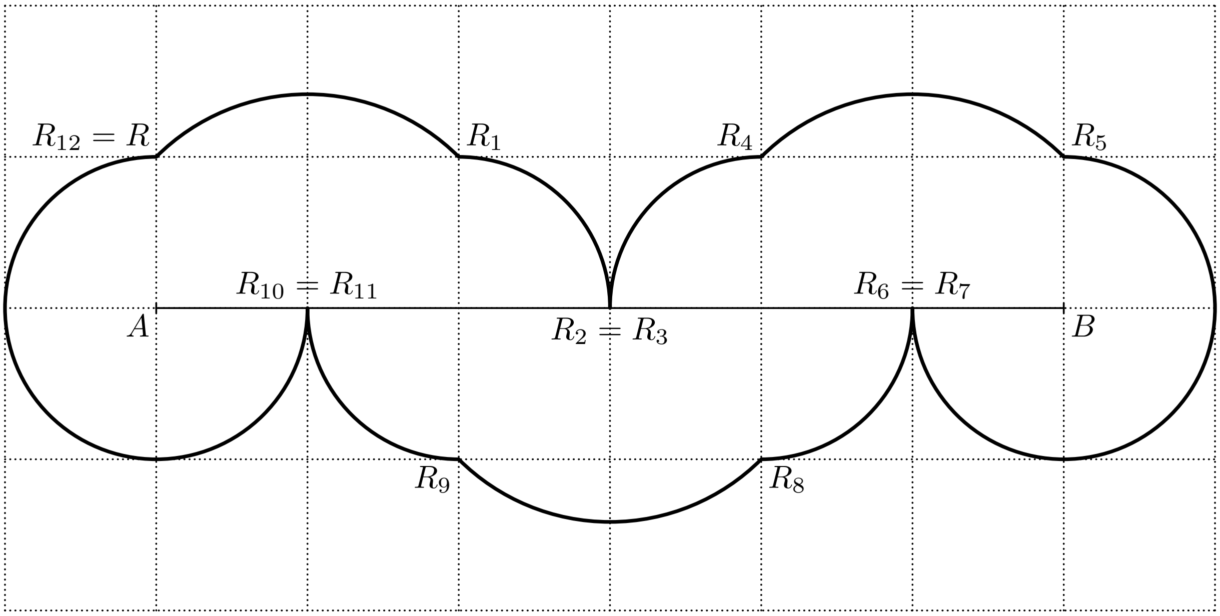






Části kružnic jsou většinou čtvrtkružnice (což odpovídá velikosti vnitřního úhlu čtverce), pouze v krajních bodech úsečky to jsou tříčtvrtěkružnice (což odpovídá velikosti vnějšího úhlu čtverce).

K narýsování celé stopy bodu R potřebujeme středy kružnic ($K = K_1$, $M_1 = M_2$, $R_2 = R_3$ atd.), které jsou na úsečce AB po 2 cm. Společné body kružnic ($R_1 = K_2$, $R_2 = R_3$, $K_3 = R_4$ atd.) leží v uzlových bodech čtverečkové sítě se stranou 2 cm.


$R_{12} = R$
R_1
R_4
R_5
$R_{10} = R_{11}$
$R_6 = R_7$
A
$R_2 = R_3$
B
R_9
R_8