I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Honzík dostal kapesné a chce si za ně koupit něco dobrého. Kdyby si koupil čtyři koláče, zbylo by mu 5 Kč. Kdyby si chtěl koupit pět koláčů, chybělo by mu 6 Kč. Kdyby si koupil dva koláče a tři koblihy, utratil by celé kapesné beze zbytku.

Kolik stojí jedna kobliha? (*L. Dedková*)

Nápověda. Kolik stojí jeden koláč?

Možné řešení. Honzíkovo kapesné lze vyjádřit třemi způsoby, a to jako

- součet ceny 4 koláčů plus 5 Kč,
- součet ceny 5 koláčů minus 6 Kč,
- součet cen 2 koláčů a 3 koblih.

Z prvních dvou vyjádření vyplývá, že jeden koláč stojí $5 + 6 = 11$ Kč. Odtud také zjišťujeme, že Honzíkovo kapesné bylo $4 \cdot 11 + 5 = 5 \cdot 11 - 6 = 49$ Kč. Ze třetího vyjádření plyne, že za tři koblihy by Honzík zaplatil $49 - 2 \cdot 11 = 27$ Kč. Jedna kobliha tedy stojí $27 : 3 = 9$ Kč.

Z5–I–2

Honza měl tři klece (černou, stříbrnou, zlatou) a tři zvířata (morče, potkana a tchoře). V každé kleci bylo jedno zvíře. Zlatá klec stála nalevo od černé klece. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem. Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece.

Určete, v které kleci bylo které zvíře. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaké bylo pořadí klecí?

Možné řešení. Z posledních dvou informací vyplývá, že stříbrná klec nestála ani zcela vlevo, ani zcela vpravo, tedy stála uprostřed. Zlatá klec stála nalevo od černé klece, tedy pořadí klecí bylo: zlatá, stříbrná, černá.

Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece, tedy byl v černé kleci. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem, tedy morče bylo ve zlaté kleci. Honza měl zvířata v klecích rozmístěna takto:

zlatá	stříbrná	černá
morče	tchoř	potkan

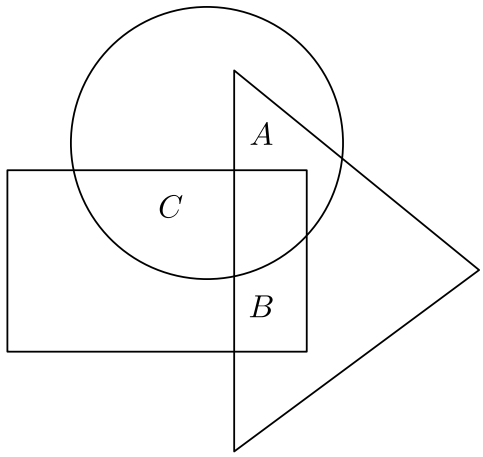
Z5–I–3

Na obrázku je diagram se sedmi políčky. Nakreslete do něj hvězdičky tak, aby byly splněny všechny následující podmínky:

1. Hvězdiček je celkem 21.
2. V každém políčku je alespoň jedna hvězdička.
3. V políčkách označených A, B, C je dohromady 8 hvězdiček.
4. V políčkách označených A a B je dohromady méně hvězdiček než v políčku označeném C.

5. V políčku označeném B je více hvězdiček než v políčku označeném A.
6. V kruhu je celkem 15 hvězdiček, v trojúhelníku celkem 12 hvězdiček a v obdélníku celkem 14 hvězdiček.

(*E. Semerádová*)

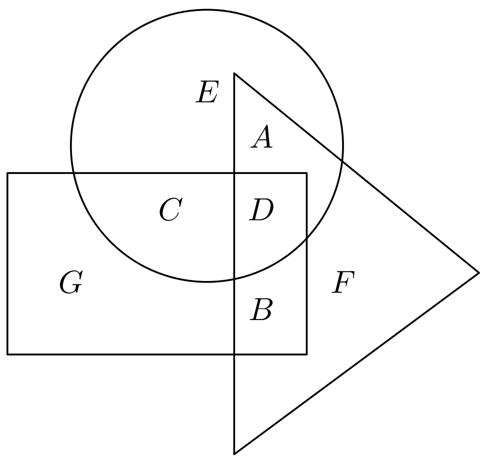


Nápověda. Určete nejdřív počty hvězdiček v políčkách A, B, C.

Možné řešení. Z druhé a páté podmínky vyplývá, že v políčku A je alespoň 1 hvězdička a v políčku B jsou alespoň 2 hvězdičky. Tedy v políčkách A a B jsou dohromady alespoň 3 hvězdičky. Ze třetí a čtvrté podmínky vyplývá, že v těchto dvou políčkách nejsou dohromady více něž 3 hvězdičky. Proto jsou v políčkách A a B dohromady právě 3 hvězdičky a v políčku C je 5 hvězdiček:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Také ostatní políčka označíme písmeny jako na následujícím obrázku:



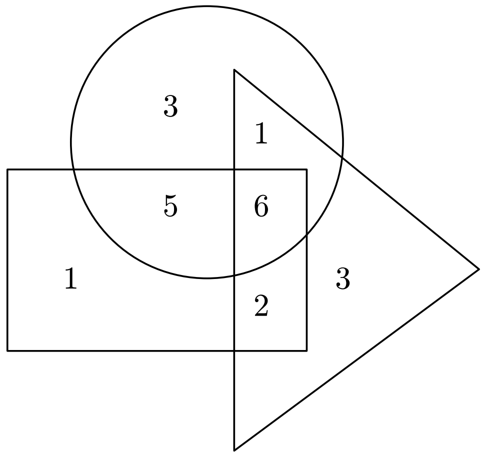
Každé z políček A, B a C je společné dvěma ze tří útvarů zmiňovaných v šesté podmínce (např. políčko A patří kruhu a trojúhelníku). Políčko D je společné všem třem útvarům. Zbylá políčka E, F a G patří do navzájem různých útvarů. Součet hvězdiček v kruhu, trojúhelníku a obdélníku je $15 + 12 + 14 = 41$ a v tomto součtu jsou hvězdičky z políček A, B, C započteny dvakrát, hvězdičky z políčka D třikrát a hvězdičky z políček

E, F, G jedenkrát. Přitom podle první podmínky je hvězdiček celkem 21 a v tomto součtu jsou hvězdičky z každého políčka počítány jedenkrát. Rozdíl 20 hvězdiček proto odpovídá součtu hvězdiček v políčkách A, B, C (kterých je celkem 8) a dvojnásobku počtu hvězdiček v políčku D. V políčku D proto musí být 6 hvězdiček:

$$D = (20 - 8) : 2 = 6.$$

Počty hvězdiček ve zbylých políčkách lze nyní dopočítat podle informací v šesté podmínce:

$$\begin{aligned} 15 &= A + C + D + E, \quad \text{tedy} \quad E = 15 - 1 - 5 - 6 = 3, \\ 12 &= A + B + D + F, \quad \text{tedy} \quad F = 12 - 1 - 5 - 2 = 3, \\ 14 &= B + C + D + G, \quad \text{tedy} \quad G = 14 - 2 - 5 - 6 = 1. \end{aligned}$$



Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení odvodíme počty hvězdiček v políčkách A, B a C:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Podle informací v šesté podmínce zjišťujeme, že

$$\begin{aligned} 15 &= A + C + D + E, \quad \text{tedy} \quad D + E = 15 - 1 - 5 = 9, \\ 12 &= A + B + D + F, \quad \text{tedy} \quad D + F = 12 - 1 - 2 = 9, \\ 14 &= B + C + D + G, \quad \text{tedy} \quad D + G = 14 - 2 - 5 = 7. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že v políčkách E a F je stejný počet hvězdiček, a ten je o 2 větší než v políčku G. Nyní můžeme postupně dosazovat počty hvězdiček v kterémkoli z políček D, E, F, G, z předchozího vyjádřit počty ve zbylých třech políčkách a ověřit, zda je celkový součet $A + B + C + D + E + F + G$ roven 21. Dosazujeme za G, přičemž máme na paměti, že v každém políčku má být alespoň jedna hvězdička:

G	$E = F$	D	součet
1	**3**	**6**	**21**
2	4	5	23
3	5	4	25
4	6	3	27
5	7	2	29
6	8	1	31

Jediná vyhovující možnost je zvýrazněna na prvním řádku.

Z5–I–4

Eva s Markem hráli badminton a Viktor jim počítal výměny. Po každých 10 výměnách nakreslil Viktor křížek (X). Poté místo každých 10 křížků nakreslil kolečko (O) a odpovídajících 10 křížků smazal. Když Eva a Marek hru ukončili, měl Viktor nakresleno toto:

OOOXXXXXXX

Určete kolik nejméně a kolik nejvíce výměn Eva s Markem sehrála. (*M. Smitková*)

Nápověda. Kolik výměn mohla Eva s Markem sehrát, kdyby nakonec bylo nakresleno pouze jedno kolečko?

Možné řešení. Každé kolečko nahrazuje 10 křížků, předchozí zápis tedy odpovídá 37 křížkům. Každý křížek představuje 10 odehraných výměn, Eva s Markem tedy sehrála nejméně 370 a nejvíce 379 výměn.

Z5–I–5

Sestrojte libovolnou úsečku AS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem A.

1. Sestrojte na kružnici k body E, F, G tak, aby spolu s bodem A tvořily obdélník $AEFG$. Najděte alespoň dvě řešení.
2. Sestrojte na kružnici k body B, C, D tak, aby spolu s bodem A tvořily čtverec $ABCD$.

(*L. Růžičková*)

Nápověda. Co víte o úhlopříčkách v obdélníku a ve čtverci?

Možné řešení. 1. Obdélník je čtyřúhelník, který má všechny vnitřní úhly pravé. Úhlopříčky každého obdélníku jsou stejně dlouhé a protínají se ve svých středech. Odtud zejména plyne, že kružnice se středem v průsečíku úhlopříček, která prochází jedním vrcholem obdélníku, prochází také všemi ostatními vrcholy.

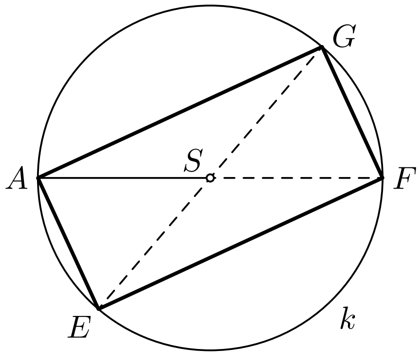
Z těchto vlastností lze odvodit několik řešení úlohy, např.:

- na kružnici k zvolíme libovolně bod E,
- bod F sestrojíme jako průsečík kružnice k s kolmicí k přímce AE jdoucí bodem E,

- bod G sestrojíme jako průsečík kružnice k s kolmicí k přímce EF jdoucí bodem F.

  Jiné řešení téže úlohy je toto:

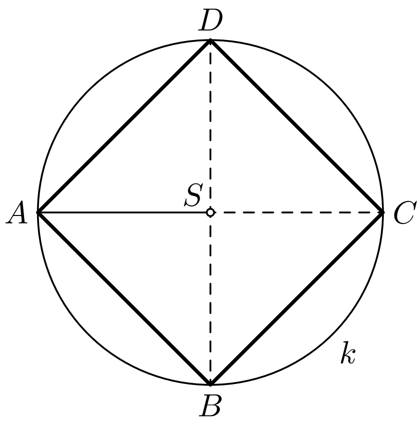
- na kružnici k zvolíme libovolně bod E,
- bod F sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou AS,
- bod G sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou ES.



2. Čtverec je čtyřúhelník, který má všechny vnitřní úhly pravé a všechny strany stejně dlouhé. Kromě všech vlastností jmenovaných v předchozím případě navíc platí, že úhlopříčky každého čtverce jsou navzájem kolmé.

Úlohu lze řešit např. takto:

- bod C sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou AS,
- body B a D sestrojíme jako průsečíky kružnice k s kolmicí k přímce AC jdoucí bodem S.



Z5–I–6

Na stole leželo osm kartiček s čísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ferda si vybral tři kartičky. Sečetl na nich napsaná čísla a zjistil, že jejich součet je o 1 větší než součet čísel na zbylých kartičkách.

Které kartičky mohly zůstat na stole? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je součet čísel na všech kartičkách?

Možné řešení. Součet čísel na všech osmi kartičkách je

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77,$$

a to je rovno 39 + 38. Ferda si vybral tři kartičky se součtem čísel 39. Postupným zkoušením od největších čísel najdeme všechny vyhovující možnosti:

v ruce	na stole
19, 17, 3	13, 11, 7, 5, 2
19, 13, 7	17, 11, 5, 3, 2

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Anička a Blanka si napsaly každá jedno dvojmístné číslo, které začínalo sedmičkou. Dívky si zvolily různá čísla. Poté každá mezi obě číslice vložila nulu, takže jim vzniklo trojmístné číslo. Od něj každá odečetla svoje původní dvojmístné číslo. Výsledek je překvapil.

Určete, jak se jejich výsledky lišily. (*L. Hozová*)

Nápověda. Vyzkoušejte popsaný postup s několika konkrétními čísly.

Možné řešení. Dvojmístné číslo začínající sedmičkou je tvaru $7*$, kde místo hvězdičky může být libovolná číslice. Vložením nuly dostáváme trojmístné číslo tvaru $70*$. Bez ohledu na to, jakou číslici zastupuje hvězdička na místě jednotek, rozdíl vychází

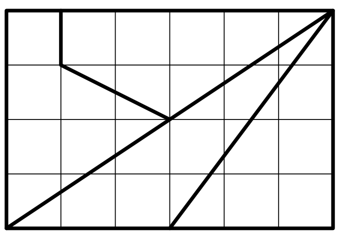
$$\begin{array}{rccc} & 7 & 0 & * \\ - & & 7 & * \\ \hline & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

Výsledky Aničky a Blanky se nijak nelišily, oběma vyšlo 630.

Z6–I–2

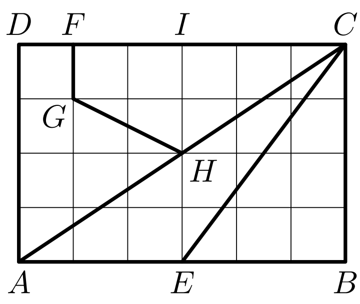
Erika chtěla nabídnout čokoládu svým třem kamarádkám. Když ji vytáhla z batohu, zjistila, že je polámaná jako na obrázku. (Vyznačené čtverečky jsou navzájem shodné.) Dívky se dohodly, že čokoládu dále lámat nebudou a losem určí, jak velký kousek která dostane.

Seřaďte čtyři kousky čokolády od nejmenšího po největší. (*K. Jasenčáková*)



Nápověda. Umíte porovnat jednotlivé kousky bez počítání?

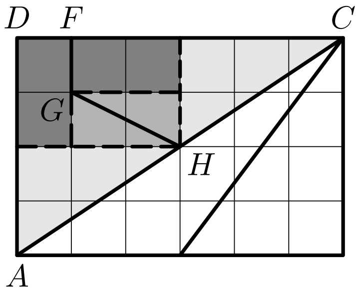
Možné řešení. Nejprve označíme několik pomocných vrcholů jako na obrázku:



Úsečka AC je úhlopříčkou obdélníku $ABCD$, a ta dělí obdélník na dvě stejné části. Jedna část je tvořena trojúhelníky AEC a EBC, druhá část je tvořena mnohoúhelníky $AHGFD$ a $CFGH$.

Trojúhelník ABC je polovinou obdélníku $ABCD$. Trojúhelník EBC je polovinou obdélníku $EBCI$, a ten je polovinou obdélníku $ABCD$. Proto má trojúhelník EBC poloviční obsah v porovnání s trojúhelníkem ABC a trojúhelníky EBC a AEC tak mají stejný obsah.

Mnohoúhelníky $AHGFD$ a $CFGH$ lze rozdělit na menší části, které jsou po dvojicích shodné, viz čárkované čáry na následujícím obrázku. Proto mají také tyto dva mnohoúhelníky stejný obsah.

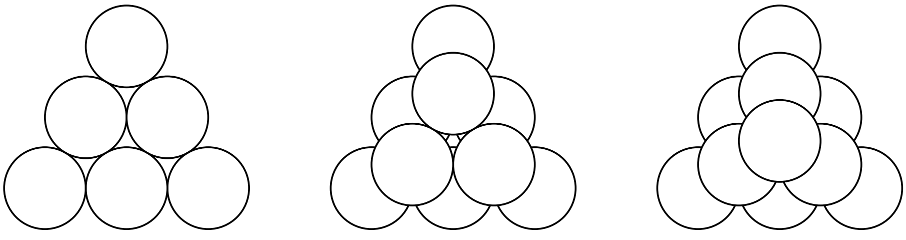


Všechny čtyři mnohoúhelníky tedy mají stejný obsah, neboli všechny čtyři kousky čokolády jsou stejně velké.

Poznámka. Vyjádření obsahů jednotlivých kousků pomocí vyznačených čtverečků vypadá takto: celý obdélník má obsah $6 \times 4 = 24$ čtverečků, každý z trojúhelníků AEC a EBC má obsah $\frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$ čtverečků, každý z mnohoúhelníků $AHGFD$ a $CFGH$ má obsah $3 + 2 + 1 = 6$ čtverečků (odvozeno z předchozího dělení).

Z6–I–3

Honza měl 100 stejných zavařovacích sklenic, z kterých si stavěl trojboké pyramidy. Nejvyšší poschodí pyramidy má vždy jednu sklenici, druhé poschodí shora představuje rovnostranný trojúhelník, jehož strana sestává ze dvou sklenic, atd. Příklad konstrukce trojposchoďové pyramidy je na obrázku.



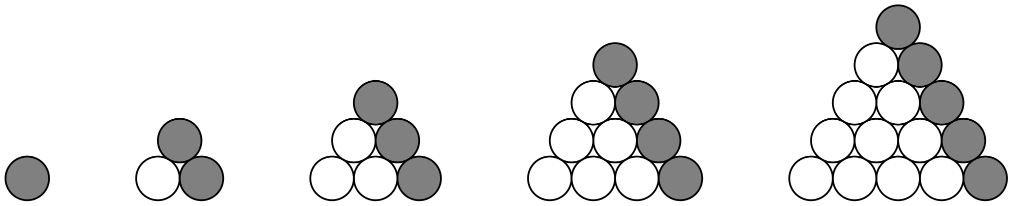
1. poschodí   1. a 2. poschodí   tříposchoďová pyramida

1. Kolik sklenic Honza potřeboval na pětiposchoďovou pyramidu?
2. Kolik poschodí měla pyramida, na niž bylo použito co nejvíc Honzových sklenic?

(K. Jasenčáková)

Nápověda. Jak se liší počty sklenic v sousedních patrech?

Možné řešení. 1. Sklenice budeme počítat po poschodích shora. Ze zadání a návodných obrázků víme, že v pátém (nejvyšším) poschodí je 1 sklenice, ve čtvrtém poschodí jsou 3 sklenice, ve třetím poschodí je 6 sklenic. Každé další (nižší) poschodí si lze představit tak, že se k předcházejícímu (vyššímu) poschodí přidá jedna řada sklenic:



Na pětiposchoďovou pyramidu Honza potřeboval

$$1+\underbrace{1+2}_{3}+\underbrace{1+2+3}_{6}+\underbrace{1+2+3+4}_{10}+\underbrace{1+2+3+4+5}_{15}=35 \text{ sklenic.}$$

2. Se stejným nápadem jako v předchozím odstavci budeme pracovat dále, dokud nevyčerpáme maximum ze sta použitelných sklenic: na šestipatrovou pyramidu je potřeba

$$35+\underbrace{15+6}_{21}=56 \text{ sklenic,}$$

na sedmipatrovou pyramidu je potřeba

$$56+\underbrace{21+7}_{28}=84 \text{ sklenic,}$$

na osmipatrovou pyramidu je potřeba

$$84+\underbrace{28+8}_{36}=120 \text{ sklenic.}$$

Se stem sklenic lze postavit nejvýše sedmipatrovou pyramidu.

Z6–I–4

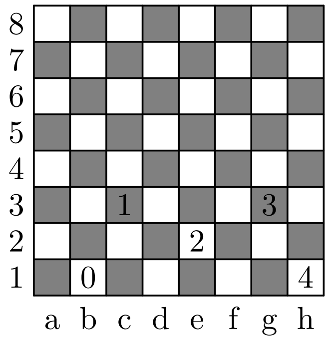
Veronika má klasickou šachovnici s 8×8 políčky. Řádky jsou označeny číslicemi 1 až 8, sloupce písmeny a až h. Veronika položila na políčko b1 koně, se kterým lze pohybovat pouze tak jako v šachu.

1. Je možné přemístit koně ve čtyřech tazích na políčko h1?
2. Je možné přemístit koně v pěti tazích na políčko e6?

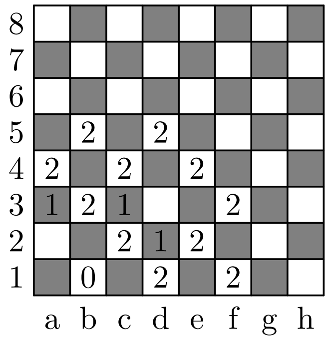
Pokud ano, popište všechny možné posloupnosti tahů. Pokud ne, zdůvodněte, proč to možné není. (*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Označte si postupně políčka, na které lze koně přemístit po prvním tahu, po druhém tahu atd.

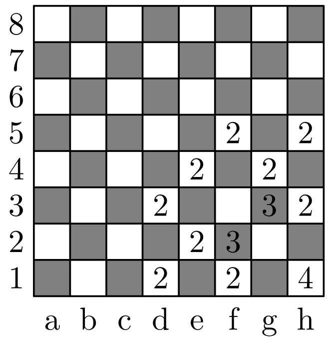
Možné řešení. 1. Po chvíli zkoušení zjistíme, že doskákat s koněm z políčka b1 na políčko h1 ve čtyřech tazích lze např. takto: c3, e2, g3, h1, viz obrázek.



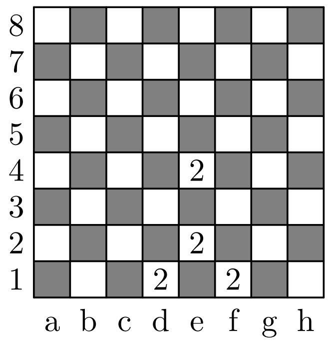
Abychom doplnili všechny posloupnosti tahů mezi těmito políčky a na žádnou možnost nezapomněli, budeme postupovat následovně. Určíme všechna políčka, na která lze koně z b1 přemístit po prvním a po druhém tahu:



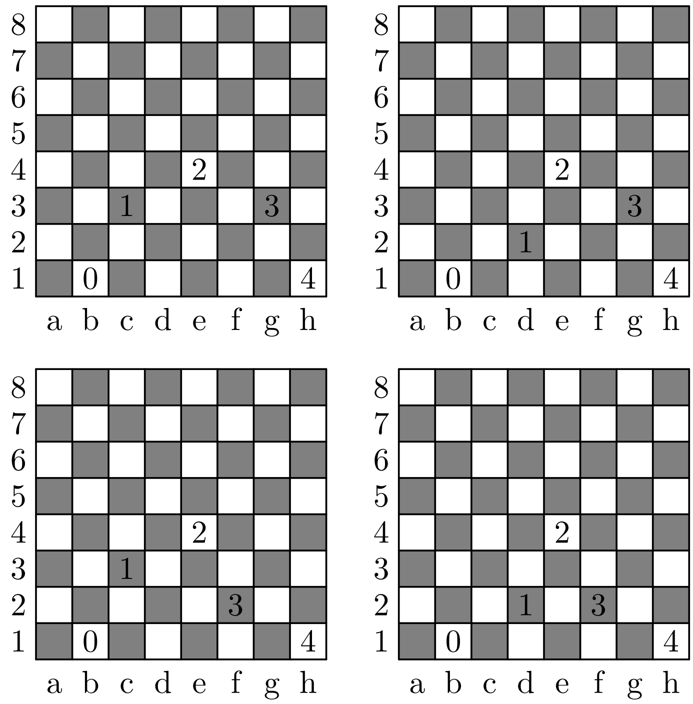
Určíme všechna políčka, na kterých musí kůň stát po třetím a po druhém tahu, aby po čtvrtém tahu skončil na h1:



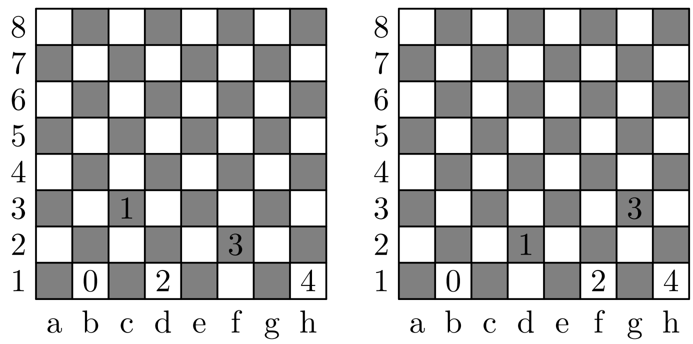
Určíme průnik předchozích dvou situací po druhém tahu:



Možnost s koněm po druhém tahu na e2 je jedna, a to je právě výše uvedené řešení. Možnosti s koněm po druhém tahu na e4 jsou čtyři:



Možnost s koněm po druhém tahu na d1 je jedna, stejně jako možnost s koněm po druhém tahu na f1:



2. Snadno lze najít také cestu z políčka b1 na políčko e6 ve čtyřech tazích, ale v pěti už ne. Důvodem je to, že barva políčka, na kterém kůň stojí, se při každém jeho tahu mění (jeden tah koně má dvě části: delší část je o dvě políčka, a při tom se barva zachovává, kratší část je o jedno políčko, a při tom se barva mění):

Výchozí políčko b1 je bílé, po prvním tahu bude kůň stát na černém políčku, po druhém tahu bude opět na bílém atd. — po lichém počtu tahů bude na černém políčku, po sudém počtu tahů bude na bílém políčku. Políčko e6 je bílé a 5 je liché číslo, proto nelze přemístit koně z b1 na e6 v pěti tazích.

Poznámka. Sedm možných řešení v první části úlohy lze nalézt náhodným zkoušením a následně se zamýšlet nad zdůvodněním, že jsou tato řešení všechna. Při hodnocení buďte shovívaví, i ne zcela úplná zdůvodnění lze hodnotit stupněm 1. Avšak komentáře neobsahující žádné vysvětlení hodnoťte nanejvýš stupněm 2.

Z6–I–5

V plechovce byly červené a zelené bonbóny. Čeněk snědl $\frac{2}{5}$ všech červených bonbónů a Zuzka snědla $\frac{3}{5}$ všech zelených bonbónů. Teď tvoří červené bonbóny $\frac{3}{8}$ všech bonbónů v plechovce.

Kolik nejméně bonbónů mohlo být původně v plechovce? (*L. Růžičková*)

Nápověda. Kolik bonbónů té které barvy mohlo, resp. nemohlo být původně v plechovce?

Možné řešení. Jak Čeněk, tak Zuzka snědli několik pětin bonbónů příslušné barvy. Proto musí být původní počet jak červených, tak zelených bonbónů dělitelný pěti. Budeme jako původní počet červených bonbónů uvažovat co nejmenší čísla dělitelná pěti a zkusíme vyjádřit počet zelených bonbónů:

- Pokud by červených bonbónů bylo původně 5, zbyly by z nich po ujídání 3. Tyto 3 bonbóny by měly tvořit $\frac{3}{8}$ všech zbylých bonbónů, tedy všech zbylých bonbónů by bylo 8 a zbylých zelených by tak bylo 5. Těchto 5 bonbónů by mělo tvořit zbylé $\frac{2}{5}$ všech zelených, což nelze.
- Pokud by červených bonbónů bylo původně 10, zbylo by z nich po ujídání 6. Těchto 6 bonbónů by mělo tvořit $\frac{3}{8}$ všech zbylých bonbónů, tedy všech zbylých bonbónů by bylo 16 a zbylých zelených by tak bylo 10. Těchto 10 bonbónů by mělo tvořit zbylé $\frac{2}{5}$ všech zelených, takže všech zelených by původně bylo 25.

Nejmenší počet bonbónů, které mohly být původně v plechovce, je $10 + 25 = 35$.

Jiná nápověda. Jakou část zbylých bonbónů tvořily zelené bonbóny?

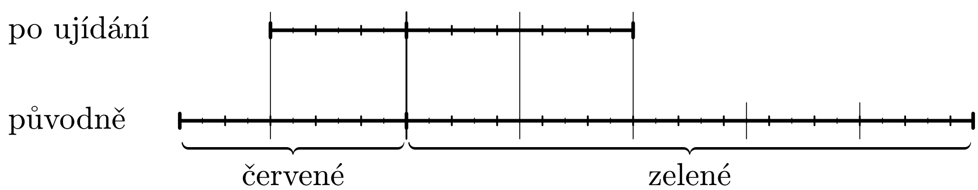
Jiné řešení. Červené bonbóny tvořily po ujídání $\frac{3}{8}$ všech bonbónů, zelené bonbóny tak tvořily $\frac{5}{8}$ všech zbylých bonbónů, proto počet zbylých zelených bonbónů musí být dělitelný pěti.

Zuzka snědla $\frac{3}{5}$ zelených bonbónů, v plechovce tak zbyly $\frac{2}{5}$ původního počtu zelených bonbónů, proto počet zbylých zelených bonbónů musí být dělitelný také dvěma. Celkem dostáváme, že počet zbylých zelených bonbónů musí být dělitelný deseti.

Nejmenší možný počet zbylých zelených bonbónů je 10. V takovém případě by původní počet zelených bonbónů byl 25, počet zbylých červených bonbónů 6 a původní počet červených bonbónů 10.

Nejmenší počet bonbónů, které mohly být původně v plechovce, je $10 + 25 = 35$.

Poznámka. Předchozí úvahy je možné graficky znázornit takto:



Pomocí neznámých c, resp. z, které označují původní počty červených, resp. zelených bonbónů, je možné úlohu zformulovat takto:

$$\frac{3}{5}c = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}c + \frac{2}{5}z\right),$$

kde c a z jsou čísla dělitelná pěti a $\frac{3}{5}c + \frac{2}{5}z$ je dělitelné osmi. Předchozí vyjádření lze upravit na

$$8c = 3c + 2z, \quad \text{neboli} \quad 5c = 2z.$$

Nejmenší c a z vyhovující všem uvedeným požadavkům jsou $c = 2 \cdot 5 = 10$ a $z = 5 \cdot 5 = 25$.

Z6–I–6

Sestrojte libovolnou úsečku DS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem D.

1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník DAS, jehož vrchol A leží na kružnici k.
2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrcholy B a C také leží na kružnici k.

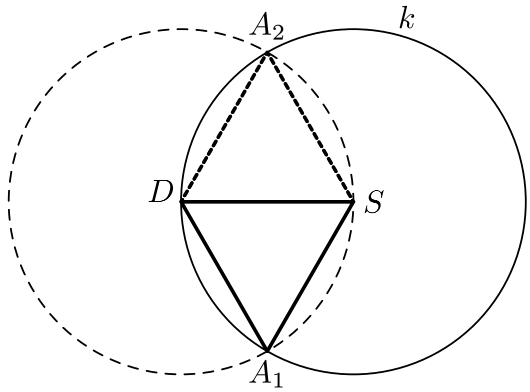
(*L. Růžičková*)

Nápověda. Co všechno víte o rovnostranných trojúhelnících?

Možné řešení. 1. Úsečky AS a AD mají být shodné s danou úsečkou DS. Tedy

- bod A sestrojíme jako průsečík kružnice k a kružnice se středem D a poloměrem DS.

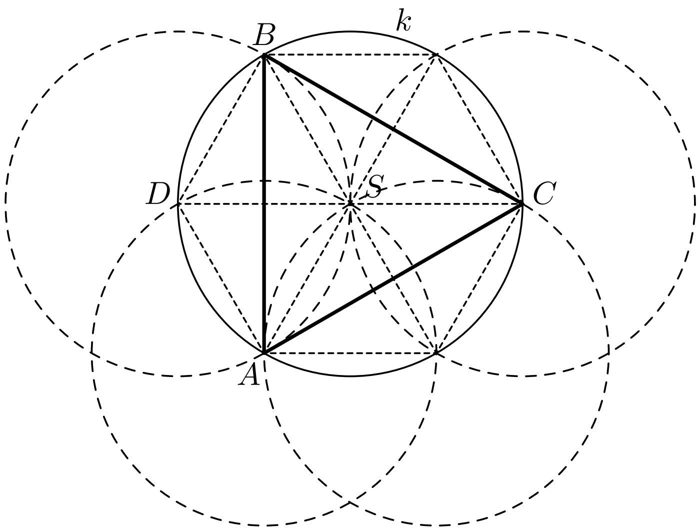
  Takové body jsou dva.



2. Pro trojúhelník ABC s vrcholy na kružnici k platí, že druhé průsečíky přímek AS, BS a CS s kružnicí k jsou středově souměrné s body A, B a C podle středu S. Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, je rovnostranný i tento středově souměrný trojúhelník. Všech šest bodů na kružnici k pak tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Pravidelný šestiúhelník je tvořen šesti shodnými rovnostrannými trojúhelníčky, z nichž dva jsou sestrojeny v první části úlohy. Úsečka A_1A_2 na předchozím obrázku je proto jednou ze stran hledaného trojúhelníku:

- jeden z bodů A_1, A_2 v první části úlohy označíme A, druhý označíme B,
- bod C sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou DS.

Alternativně lze bod C sestrojit jako průsečík kružnice k s kružnicí se středem v bodě A, příp. B a poloměrem AB. Na následujícím obrázku je naznačeno ještě jiné řešení založené na doplnění pravidelného šestiúhelníku opakováním konstrukce z první části úlohy.


k
B
D
S
C
A

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Petr řekl Pavlovi: „Napiš dvojmístné přirozené číslo, které má tu vlastnost, že když od něj odečteš totéž† dvojmístné přirozené číslo akorát napsané obráceně, dostaneš rozdíl 63.“

Které číslo mohl Pavel napsat? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je rozdíl číslic Pavlova čísla?

Možné řešení. Úlohu můžeme řešit jako algebrogram

$$\begin{array}{r} a\ b \\ -\ b\ a \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Protože rozdíl je kladný, musí být $a > b$. Protože navíc v rozdílu na místě jednotek je 3, musí se počítat s přechodem přes desítku. Protože v rozdílu na místě desítek je 6, musí být $a - b = 7$. Protože dále obě čísla jsou dvojmístná, musí být $b > 0$. Celkem tak dostáváme dvě možnosti:

$$\begin{array}{r} 8\ 1 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline 6\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\ 2 \\ -\ 2\ 9 \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Číslo, které mohl Pavel napsat, bylo 81 nebo 92.

Poznámka. Dvojmístné číslo zapsané $\overline{ab}$ lze vyjádřit jako $10a+b$. Předchozí zápis je proto ekvivalentní s rovností

$$(10a + b) - (10b + a) = 63,$$

což po úpravě vede k $a - b = 7$.

Z7–I–2

Jsou dány dvě dvojice rovnoběžných přímek $AB \parallel CD$ a $AC \parallel BD$. Bod E leží na přímce BD, bod F je středem úsečky BD, bod G je středem úsečky CD a obsah trojúhelníku ACE je $20\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah trojúhelníku DFG. (*V. Semeráková*)

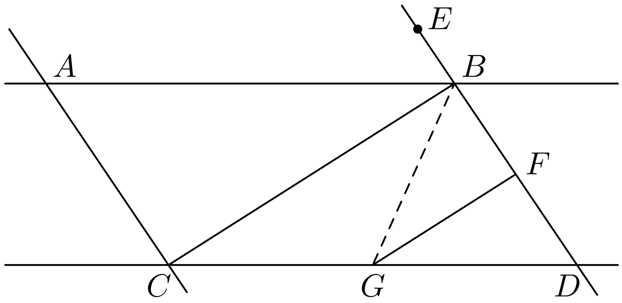
Nápověda. Porovnejte obsahy trojúhelníků ACE a ABC.

Možné řešení. Obsah trojúhelníku závisí na délce jeho strany a velikosti výšky na tuto stranu. Protože přímky AC a BD jsou rovnoběžné a bod E leží na přímce BD, obsah trojúhelníku ACE je stále stejný pro jakkoli zvolený bod E. Zejména, obsah trojúhelníku ACE je stejný jako obsah trojúhelníku ACD. Ze stejného důvodu je také obsah trojúhelníku ACD stejný jako obsah trojúhelníku BCD. Celkem tedy

$$S_{ACE} = S_{ACD} = S_{BCD} = 20\,\mathrm{cm}^2.$$

† V původně zveřejněném zadání chybělo upřesnění, že má Pavel pracovat s jedním dvojmístným číslem. Řešitele na tuto opravu upozorněte.

Nyní porovnáme obsahy trojúhelníků BCD a DFG:



Trojúhelníky DFG a FBG mají společnou výšku z vrcholu G a bod F je v polovině strany BD, proto mají tyto trojúhelníky stejný obsah. Trojúhelníky DFG a FBG dohromady tvoří trojúhelník DBG, a proto platí $S_{DFG} = \frac{1}{2}S_{DBG}$. Z obdobného důvodu také platí $S_{DBG} = \frac{1}{2}S_{DBC}$. Celkem tedy platí

$$S_{DFG} = \frac{1}{4}S_{DBC} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Předchozí vyjádření poměru obsahů trojúhelníků DFG a DBC skrytě odkazuje na jejich podobnost, čehož lze ve zdůvodnění také použít (FG je střední příčkou trojúhelníku DBC, proto jsou všechny odpovídající si strany úměrné v poměru $1:2$). Bez odkazu na pojem podobnosti je možné přímo porovnat např. základny DF a DB a odpovídající výšky (oboje v poměru $1:2$). Takto lze uvažovat i pro trojúhelníky DFG a ACE s libovolným $E \in BD$ (tj. bez výše použitých transformací).

Z7–I–3

Zoologická zahrada nabízela školním skupinám výhodné vstupné: každý pátý žák dostává vstupenku zdarma. Pan učitel 6.A spočítal, že pokud koupí vstupné dětem ze své třídy, ušetří za čtyři vstupenky a zaplatí 1 995 Kč. Paní učitelka 6.B mu navrhla, ať koupí vstupenky dětem obou tříd naráz, a tak budou platit 4 410 Kč.

Kolik dětí z 6.A a kolik dětí z 6.B šlo do zoo? (Cena vstupenky v Kč je celočíselná.)

(*L. Šimůnek*)

Nápověda. O kolik vstupenek je třeba žádat, aby byly právě čtyři z nich zdarma?

Možné řešení. Jestli by se při koupi vstupného pro děti z 6.A díky zmíněné výhodě ušetřilo za 4 vstupenky, muselo jít do zoo alespoň $4 \cdot 5 = 20$, avšak méně než $5 \cdot 5 = 25$ dětí z této třídy. Při počtu dětí od 20 do 24 by se muselo zaplatit vždy o 4 vstupenky méně, tedy 16 až 20. Zaplacená částka je dělitelná 19, nikoli však 16, 17, 18 či 20 (viz prvočíselný rozklad $1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$). Pro děti z 6.A by tedy bylo potřeba zaplatit 19 vstupenek a každá by tak stála $1\,995 : 19 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ Kč. Počet dětí z 6.A byl o 4 větší, tedy $19 + 4 = 23$.

Při společné koupi vstupného pro děti z obou tříd by se uhradilo 4 410 Kč, tedy zaplacených vstupenek by bylo $4\,410 : 105 = 42$. V rámci výhody byla každá čtveřice zaplacených vstupenek doplněna o jednu vstupenku zdarma, tedy při zaplacení 42 vstupenek $(10 \cdot 4 + 2)$ by jich dostali 52 $(10 \cdot 5 + 2)$. Počet dětí z 6.B byl $52 - 23 = 29$.

Do zoo šlo 23 dětí z 6.A a 29 dětí z 6.B.

Z7–I–4

Na stole leželo šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Anežka z těchto kartiček složila šestimístné číslo, které bylo dělitelné šesti. Pak postupně odebírala kartičky zprava. Když odebrala první kartičku, zůstalo na stole pětimístné číslo dělitelné pěti. Když odebrala další kartičku, zůstalo čtyřmístné číslo dělitelné čtyřmi. Když odebírala dále, získala postupně trojmístné číslo dělitelné třemi a dvojmístné číslo dělitelné dvěma.

Které šestimístné číslo mohla Anežka původně složit? Určete všechny možnosti.

(*L. Růžičková*)

Nápověda. Co můžete říct o jednotlivých číslicích hledaného čísla?

Možné řešení. Hledané šestimístné číslo označíme $\overline{abcdef}$. Ze zadání postupně odvodíme několik poznatků o tomto čísle:

1. Celé šestimístné číslo je dělitelné šesti, tedy je dělitelné zároveň dvěma a třemi. Dělitelnost třemi je zaručena tím, že ciferný součet je (až na pořadí sčítanců) roven $1+2+3+4+5+6=21$, což je číslo dělitelné třemi. Dělitelnost dvěma znamená, že f je některá z číslic 2, 4, 6.
2. Pětimístné číslo $\overline{abcde}$ je dělitelné pěti, proto $e=5$.
3. Čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ je dělitelné čtyřmi, proto i číslo $\overline{cd}$ je dělitelné čtyřmi. Zejména d je některá z číslic 2, 4, 6.
4. Trojmístné číslo $\overline{abc}$ je dělitelné třemi, proto ciferný součet $a+b+c$ je dělitelný třemi.
5. Dvojmístné číslo $\overline{ab}$ je dělitelné dvěma, proto b je některá z číslic 2, 4, 6.

Jednoznačně je určeno $e=5$ a číslice b, d, f jsou v nějakém pořadí 2, 4, 6. Na číslice a a c tedy zbývá 1 a 3. Ze třetí podmínky pak plyne, že dvojmístné číslo $\overline{cd}$ může být některé z čísel

$$12, \quad 16, \quad 32, \quad 36.$$

Pro každou z těchto možností je a určeno jednoznačně: v prvních dvou případech je $a=3$, ve zbylých dvou případech je $a=1$, součet $a+c$ je však vždy roven 4. Aby byla splněna také čtvrtá podmínka, musí být $b=2$. Zbývají tedy pouze dvě možnosti: Anežka mohla složit 321654 nebo 123654.

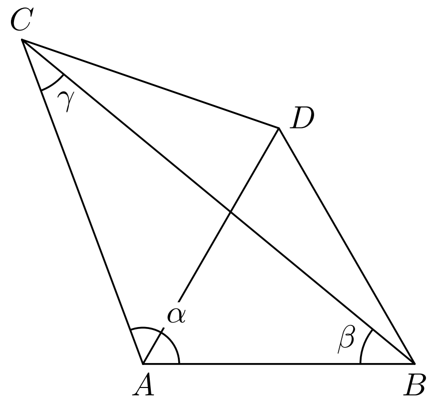
Z7–I–5

Prokop sestrojil trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhel u vrcholu A byl větší než $60°$ a vnitřní úhel u vrcholu B byl menší než $60°$. Jirka narýsoval v polorovině vymezené přímkou AB a bodem C bod D, a to tak, že trojúhelník ABD byl rovnostranný. Poté chlapci zjistili, že trojúhelníky ACD a BCD jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem D.

Určete velikost úhlu ACB. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Najděte vztahy mezi vnitřními úhly zmiňovaných trojúhelníků.

Možné řešení. Velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC označíme postupně α, β, γ. V rovnostranném trojúhelníku ABD mají všechny vnitřní úhly velikost $60°$.



Shodné úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku BCD mají velikost

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD| - |\sphericalangle ABC| = 60^\circ - \beta.$$

Shodné úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku ACD mají velikost

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle DAB| = \alpha - 60^\circ.$$

Velikost neznámého úhlu ACB můžeme vyjádřit jako

$$\gamma = |\sphericalangle ACD| - |\sphericalangle BCD| = (\alpha - 60^\circ) - (60^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 120^\circ.$$

Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC je 180°, tedy

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta - 120^\circ) = 180^\circ,$$

z čehož plyne $\alpha + \beta = 150^\circ$. Úhel ACB má velikost $\gamma = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$.

Poznámka. Zadaným podmínkám odpovídá nekonečně mnoho situací; γ je vždy 30°, zbylých 150° může být mezi α a β rozděleno libovolně.

Všechny body A, B, C leží na jedné kružnici se středem v bodě D. V takových případech obecně platí, že velikost úhlu ACB je polovinou úhlu ADB (viz větu o obvodovém a středovém úhlu).

Z7–I–6

Vodník Chaluha naléval mlhu do rozmanitých, různě velkých nádob, které si pečlivě seřadil na polici. Při nalévání postupoval postupně z jedné strany, žádnou nádobu nepřeskakoval. Do každé nádoby se vejde alespoň decilitr mlhy.

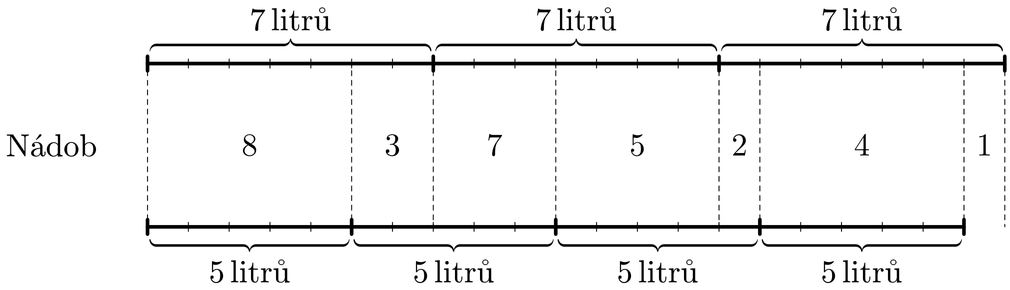
Kdyby naléval mlhu sedmilitrovou odměrkou, mlha z první odměrky by naplnila přesně 11 nádob, mlha z druhé odměrky by naplnila přesně dalších 12 nádob a mlha z třetí odměrky by naplnila přesně 7 nádob. Pokud by použil pětilitrovou odměrku, pak mlha z první odměrky by naplnila přesně 8 nádob, ze druhé přesně 10 nádob, ze třetí přesně 7 nádob a ze čtvrté odměrky přesně 4 nádoby.

Rozhodněte, zda je třicátá nádoba v pořadí větší než pětadvacátá. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Jaký objem měla třicátá nádoba?

Možné řešení. Se třemi sedmilitrovými odměrkami by vodník rozlil 21 litrů mlhy do $11 + 12 + 7 = 30$ nádob. Se čtyřmi pětilitrovými odměrkami by rozlil 20 litrů mlhy do $8 + 10 + 7 + 4 = 29$ nádob. Poslední, třicátá nádoba tedy měla objem 1 litr.

Mlha z první sedmilitrové odměrky by naplnila přesně 11 nádob, přitom prvních pět litrů by naplnilo přesně 8 nádob (první pětilitrová odměrka) a zbylé dva litry přesně 3 nádoby ($11 - 8 = 3$). Tato část také odpovídá prvním dvěma litrům z druhé pětilitrové odměrky. Ta by však vystačila na 10 nádob, tedy zbylé tři litry by naplnily přesně 7 nádob ($10 - 3 = 7$). Obdobně můžeme doplnit další podrobnosti o skupinách nádob a jejich objemech, které schematicky znázorníme takto:



Nádoby 1 až 8 pojmou dohromady přesně 5 litrů, nádoby 9 až 11 pojmou dohromady 2 litry, nádoby 12 až 18 pojmou 3 litry, nádoby 19 až 23 pojmou 4 litry, nádoby 24 až 25 pojmou 1 litr atd.

Poslední dvě zmiňované nádoby pojmou dohromady totéž co samotná třicátá nádoba, proto má třicátá nádoba větší objem než pětadvacátá.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Vyjádřete číslo milion pomocí čísel obsahujících pouze číslice 9 a algebraických operací plus, minus, krát, děleno, mocnina a odmocnina. Určete alespoň tři různá řešení.

(L. Dedková)

Nápověda. Vyjádřete uvedeným způsobem co nejvíce malých přirozených čísel, která by se mohla dále hodit.

Možné řešení. Přirozená čísla obsahující pouze číslice 9 jsou 9, 99, 999, 9 999 atd. Náhodné operace s těmito čísly vychází všelijak, ale můžeme si všimnout např. následujících výsledků:

$$\frac{9}{9}=1,\quad \sqrt{9}=3,\quad 9+9=18,\quad 99-9=90\quad \text{apod.}$$

V dalším kroku umíme vyjádřit číslo 10, a to např. takto:

$$10=9+\frac{9}{9}=\frac{9\cdot 9+9}{9}=\frac{99-9}{9}.$$

Obdobně lze vyjádřit 100, 1 000 atd., tedy i milion:

$$1\,000\,000=999\,999+\frac{9}{9}=\frac{999\,999\cdot 9+9}{9}=\frac{9\,999\,999-999\,999}{9}.$$

Z dalších nápadů z prvního kroku můžeme vyjádřit např.

$$2=\frac{9}{9}+\frac{9}{9}=\frac{9+9}{9},\quad 6=9-\sqrt{9}=\frac{9+9}{\sqrt{9}}\quad \text{apod.}$$

Odtud lze vyjádřit milion mnoha dalšími způsoby, např. takto:

$$1\,000\,000=\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9-\sqrt{9}}.$$

Poznámka. Pomocí $\frac{9}{9}=1$ lze vyjádřit milion také jako součet milionu těchto zlomků. Tento a podobné nápady však není možné hodnotit, pokud nejsou realizovány výše popsaným způsobem (tedy beze slov nebo teček naznačujících pokračování jisté myšlenky).

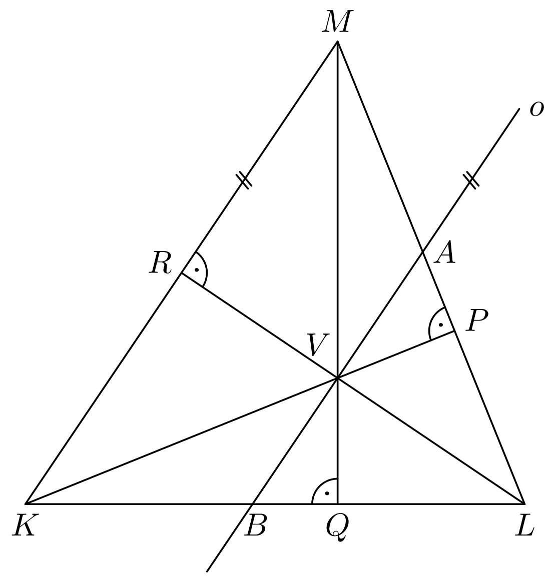
Z8–I–2

V ostroúhlém trojúhelníku KLM má úhel KLM velikost 68°. Bod V je průsečíkem výšek a P je patou výšky na stranu LM. Osa úhlu PVM je rovnoběžná se stranou KM.

Porovnejte velikosti úhlů MKL a LMK. (*L. Hozová*)

Nápověda. Uvažte osovou souměrnost podle výšky na stranu KM.

Možné řešení. Na následujícím obrázku jsou znázorněny údaje ze zadání, navíc paty všech výšek (body P, Q, R) a průsečíky osy úhlu PVM se stranami trojúhelníku (body A, B):



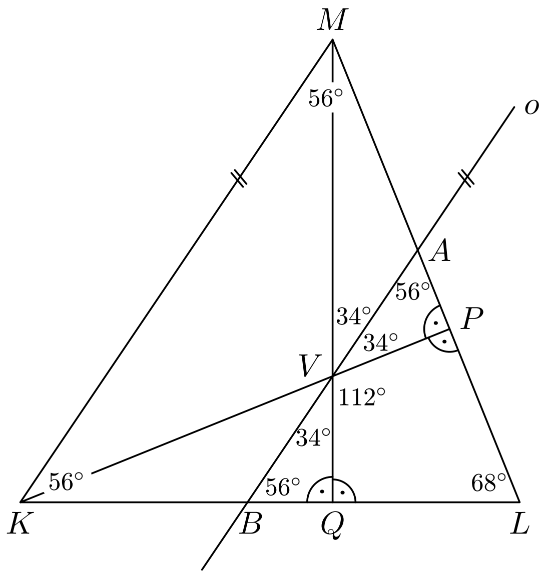
Osa úhlu PVM je rovnoběžná se stranou KM, zejména obě tyto přímky jsou kolmé k výšce LR. Tedy při osové souměrnosti podle přímky LR se jak přímka KM, tak přímka AB zobrazuje sama na sebe. Úhly PVM a QVK jsou shodné (vrcholové úhly) a osa úhlu PVM je též osou úhlu QVK, zejména úhly AVM a BVK jsou shodné. Při osové souměrnosti podle přímky LR se tak přímka PK zobrazuje na přímku QM, tedy bod K se zobrazuje na bod M. Celkem zjišťujeme, že trojúhelník KLM je souměrný podle výšky LR. Proto jsou úhly MKL a LMK shodné.

Jiná nápověda. Porovnejte úhly, které vymezuje osa úhlu PVM se stranami KL a LM.

Jiné řešení. Úhly PVM a QVK jsou shodné (vrcholové úhly). Osa úhlu PVM je též osou úhlu QVK, zejména úhly PVA a QVB jsou shodné. Trojúhelníky PVA a QVB jsou oba pravoúhlé a mají shodné vnitřní úhly u vrcholu V, proto též úhly PAV a QBV jsou shodné.

Osa AB je rovnoběžná se stranou KM, proto jsou dvojice úhlů PAV, LMK a QBV, LKM shodné (souhlasné úhly). Protože úhly PAV a QBV jsou shodné, také úhly LMK a LKM jsou shodné.

Poznámka. Podle zadání lze postupně určit velikosti rozličných úhlů a takto nakonec ověřit, že úhly MKL a LMK jsou shodné. Velikosti vybraných úhlů jsou vyznačeny na následujícím obrázku:



Z8–I–3

Adélka měla na papíře napsána dvě čísla. Když k nim připsala ještě jejich největší společný dělitel a nejmenší společný násobek, dostala čtyři různá čísla menší než 100. S úžasem zjistila, že když vydělí největší z těchto čtyř čísel nejmenším, dostane největší společný dělitel všech čtyř čísel.

Která čísla měla Adélka napsána na papíře? (*M. Petrová*)

Nápověda. Jaký je vztah mezi nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem dvou čísel?

Možné řešení. Všechna čtyři čísla byla navzájem různá, proto původní dvě čísla byla různá, jejich největší společný dělitel byl menší než každé z těchto čísel a nejmenší společný násobek větší než každé z těchto čísel. Pokud největšího společného dělitele označíme d, můžeme původní dvě čísla zapsat jako $d \cdot x$ a $d \cdot y$, kde $x < y$ jsou nesoudělná čísla větší než 1. Nejmenší společný násobek je potom roven $d \cdot x \cdot y$. Celkem tedy máme

$$d < d \cdot x < d \cdot y < d \cdot x \cdot y < 100.$$

Vlastnost, která Adélku uvedla v úžas, znamená, že podíl $d \cdot x \cdot y$ a d je roven d, neboli

$$d = x \cdot y.$$

Hledáme tedy nesoudělná čísla $x < y$ větší než 1 taková, že $(x \cdot y)^2 < 100$, neboli $x \cdot y < 10$. Taková dvojice čísel je jediná:

- pro $x = 2$ a $y = 3$ je $x \cdot y = 6 < 10$,
- pro $x = 2$ a $y = 5$ je $x \cdot y = 10$,
- pro $x = 3$ a $y = 4$ je $x \cdot y = 12 > 10$,
- atd.

Adélka měla napsána čísla $6 \cdot 2 = 12$ a $6 \cdot 3 = 18$, k nimž později připsala 6 a $6 \cdot 6 = 36$.

Z8–I–4

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej ten druhý rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno.

V 9:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 27 kafemlýnků.

Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně v 19:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 120 kafemlýnků.

Za jak dlouho složí kafemlýnek Hubert? Za jak dlouho jej složí Robert?

(*K. Pazourek*)

Nápověda. Kolik kafemlýnků přibyde za hodinu v každé ze směn?

Možné řešení. V dopolední tříhodinové směně přibylo 27 kafemlýnků, což odpovídá $27 : 3 = 9$ kafemlýnkům za hodinu. Protože Robert rozebírá čtyřikrát pomaleji, než Hubert skládá, Hubert sám by složil 9 kafemlýnků za $\frac{3}{4}$ hodiny, tj. 45 minut. Hubert tedy složí jeden kafemlýnek za $45 : 9 = 5$ minut.

V odpolední šestihodinové směně přibylo 120 kafemlýnků, což odpovídá $120 : 6 = 20$ kafemlýnkům za hodinu. Protože tentokrát Robert skládá a Hubert rozebírá, Robert sám by složil 20 kafemlýnků za $\frac{3}{4}$ hodiny, tj. 45 minut. Robert tedy složí jeden kafemlýnek za $45 : 20 = 2{,}25$ minut, tj. 2 minuty a 15 vteřin.

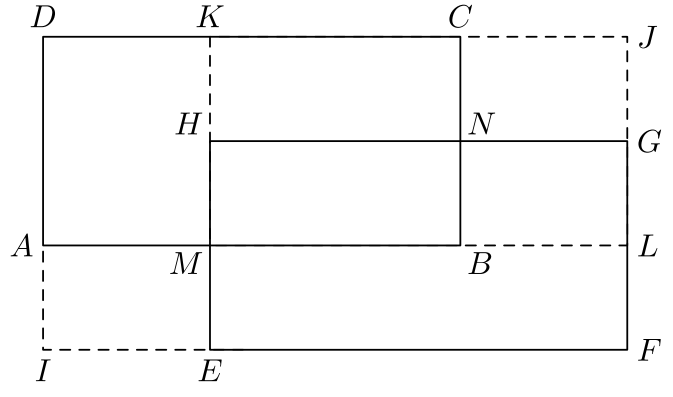
Jiné řešení. Pokud h značí počet kafemlýnků, které složí Hubert za hodinu, a r počet kafemlýnků, které za hodinu složí Robert, potom za hodinu rozloží Hubert $\frac{1}{4}r$ kafemlýnků a Robert $\frac{1}{4}h$ kafemlýnků. Informace ze zadání vedou k rovnicím:

$$3\left(h - \frac{1}{4}h\right) = 27,$$
$$6\left(r - \frac{1}{4}r\right) = 120.$$

Řešením první rovnice je $h = 12$, tedy Hubert složí 12 kafemlýnků za hodinu, tj. 60 minut. Hubert složí jeden kafemlýnek za $60 : 12 = 5$ minut. Řešením druhé rovnice je $r = \frac{80}{3}$, tedy Robert složí 80 kafemlýnků za 3 hodiny, tj. 180 minut. Robert složí jeden kafemlýnek za $180 : 80 = 2{,}25$ minut.

Z8–I–5

Shodné obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou umístěny tak, že jejich shodné strany jsou rovnoběžné. Body I, J, K, L, M a N jsou průsečíky prodloužených stran jako na obrázku.



Obsah obdélníku $BNHM$ je $12\,\mathrm{cm}^2$, obsah obdélníku $MBCK$ je $63\,\mathrm{cm}^2$ a obsah obdélníku $MLGH$ je $28\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah obdélníku $IFJD$. (*E. Semerádová*)

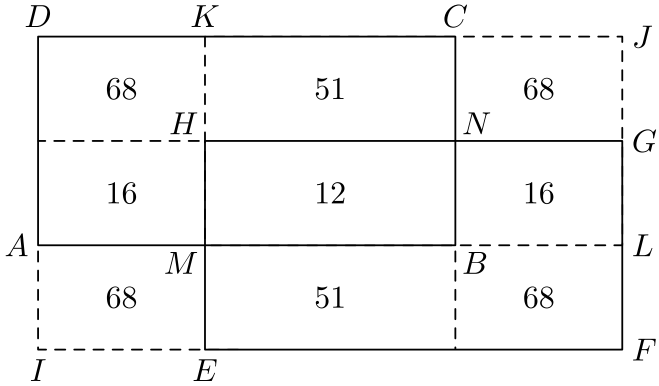
Nápověda. Jaké jsou obsahy dalších obdélníků?

Možné řešení. Obsah obdélníku $HNCK$ je $63-12 = 51\,(\mathrm{cm}^2)$, obsah obdélníku $BLGN$ je $28-12 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$. Poměr obsahů obdélníků $NGJC$ a $HNCK$ je stejný jako poměr délek úseček NG a HN, a ten je stejný jako poměr obsahů obdélníků $BLGN$ a $MBNH$. Tedy

$$S_{NGJC} : 51 = 16 : 12 = 4 : 3,$$

a proto je obsah obdélníku $NGJC$ roven $51 \cdot 4 : 3 = 68\,(\mathrm{cm}^2)$.

Protože obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou shodné a posunuté, jsou např. úsečky IE a CJ shodné a obdobně je tomu s dalšími dvojicemi. Proto jsou např. obdélníky $IEMA$ a $NGJC$ shodné, zejména mají stejný obsah. Obdobně je tomu s dalšími dvojicemi:



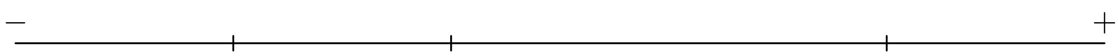
Obsah obdélníku $IFJD$ je roven $12 + 2 \cdot 51 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 68 = 418\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z8–I–6

Přímka představuje číselnou osu a vyznačené body odpovídají číslům a, $-a$, $a+1$, avšak v neurčeném pořadí.

Sestrojte body, které odpovídají číslům 0 a 1. Proberte všechny možnosti.

(*M. Petrová*)



Nápověda. Může být číslo $-a$ větší než a?

Možné řešení. Číslo $a+1$ je o 1 větší než číslo a, leží tedy na číselné ose vpravo od čísla a a vzdálenost těchto dvou čísel je stejná jako vzdálenost hledaných čísel 0 a 1.

O vzájemné poloze čísel a a $-a$ nic nevíme; záleží na tom, zda je číslo a kladné nebo záporné. Protože rovněž nevíme nic o absolutní hodnotě $|a|$ (tj. vzdálenosti od nuly), nemůžeme porovnat ani čísla $-a$ a $a+1$. Čísla a a $-a$ však mají stejnou absolutní hodnotu, proto 0 leží na číselné ose uprostřed mezi těmito čísly.

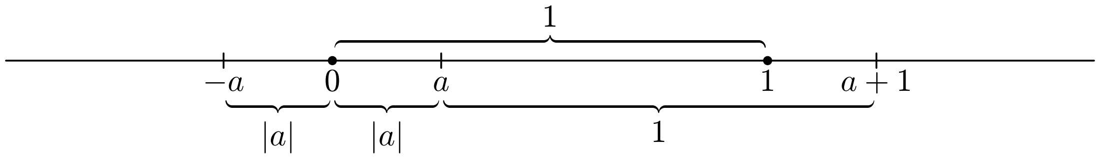
Musíme tedy uvažovat následující tři možnosti uspořádání čísel na číselné ose:

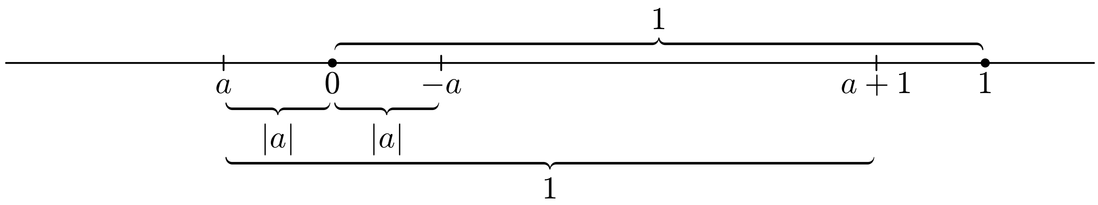
- $-a < a < a+1$,

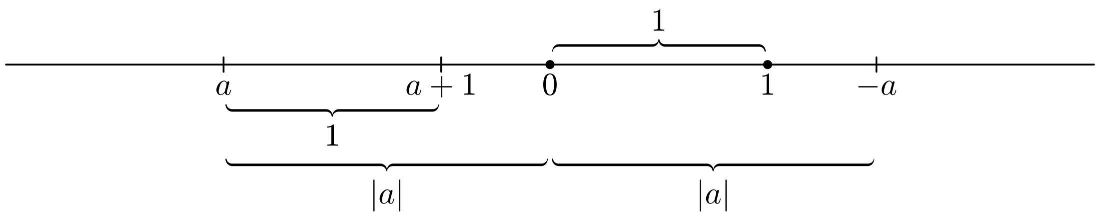
- $a < -a < a + 1$,
- $a < a + 1 < -a$.

Ve všech třech případech lze sestrojit 0 a 1 takto:

- bod představující 0 je středem úsečky s krajními body a a $-a$,
- bod představující 1 je vpravo od 0 ve stejné vzdálenosti jako $a + 1$ od a.







Poznámka. Poměr vzdáleností zadaných bodů na číselné ose určuje hodnotu čísla a pro každé ze tří možných uspořádání. Pokud by např. tento poměr byl 1 : 2 (jako na obrázku v zadání), potom by odpovídající a bylo v prvním případě $\frac{1}{2}$, ve druhém případě $-\frac{1}{6}$ a ve třetím případě $-\frac{3}{2}$.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Věkový průměr všech lidí, kteří se sešli na rodinné oslavě, byl roven počtu přítomných. Teta Běta, které bylo 29 let, se záhy omluvila a odešla. I po odchodu tety Běty byl věkový průměr všech přítomných lidí roven jejich počtu.

Kolik lidí bylo původně na oslavě? (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je vztah mezi počtem přítomných a součtem jejich věků?

Možné řešení. Věkový průměr všech lidí, kteří se sešli na oslavě, je roven podílu součtu věků všech přítomných (ozn. s) a jejich počtu (ozn. n). Podle zadání platí

$$\frac{s}{n} = n \quad \text{neboli} \quad s = n^2.$$

Po odchodu tety Běty se počet přítomných zmenšil o 1 a součet jejich věků o 29. Podle zadání platí

$$\frac{s-29}{n-1} = n-1 \quad \text{neboli} \quad s-29 = (n-1)^2.$$

Když do poslední rovnice dosadíme $s = n^2$, roznásobíme pravou stranu a dále upravíme, dostaneme:

$$\begin{aligned} n^2 - 29 &= n^2 - 2n + 1, \\ 2n &= 30, \\ n &= 15. \end{aligned}$$

Na rodinou oslavu se původně dostavilo 15 lidí.

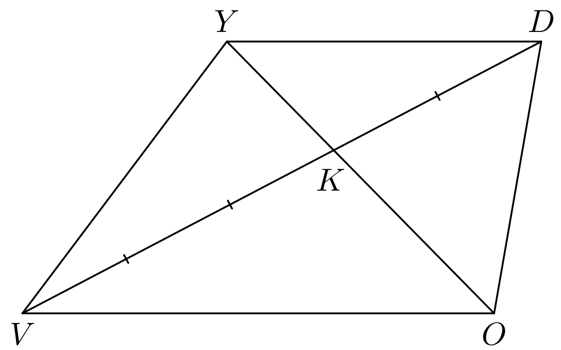
Z9–I–2

V lichoběžníku $VODY$ platí, že VO je delší základnou, průsečík úhlopříček K dělí úsečku VD v poměru $3:2$ a obsah trojúhelníku KOV je roven $13{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah celého lichoběžníku. (*M. Petrová*)

Nápověda. Co umíte říct o dalších trojúhelnících obsažených v lichoběžníku?

Možné řešení. Protože VO je delší základnou lichoběžníku $VODY$, bod K na úhlopříčce VD je blíže vrcholu D.



Trojúhelníky KOV a KDO mají společnou výšku z vrcholu O a délky stran VK a KD příslušných k této výšce jsou v poměru 3 : 2. Proto také obsahy těchto trojúhelníků jsou ve stejném poměru, tedy

$$S_{KDO} = \frac{2}{3} S_{KOV}.$$

Trojúhelníky VOD a VOY mají společnou stranu VO a stejnou výšku na tuto stranu, proto mají stejné obsahy. Trojúhelník KOV je částí obou těchto trojúhelníků, proto mají stejné obsahy také trojúhelníky KDO a KYV,

$$S_{KYV} = S_{KDO} = \frac{2}{3} S_{KOV}.$$

Trojúhelníky KYV a KDY mají společnou výšku z vrcholu Y a odpovídající strany VK a KD jsou v poměru 3 : 2. Proto také obsahy těchto trojúhelníků jsou ve stejném poměru,

$$S_{KDY} = \frac{2}{3} S_{KYV} = \frac{4}{9} S_{KOV}.$$

Obsah celého lichoběžníku je součtem obsahů uvedených čtyř trojúhelníků, tedy

$$\begin{aligned} S_{VODY} &= S_{KOV} + S_{KDO} + S_{KYV} + S_{KDY} = \\ &= \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) S_{KOV} = \frac{25}{9} \cdot 13{,}5 = 37{,}5\,(\mathrm{cm}^2). \end{aligned}$$

Poznámka. Při postupném vyčíslování obsahů výše jmenovaných trojúhelníků dostáváme

$$S_{KDO} = S_{KYV} = 9\,\mathrm{cm}^2, \quad S_{KDY} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$

Rovnost $S_{KYV} = \frac{2}{3} S_{KOV}$, resp. $S_{KDY} = \frac{4}{9} S_{KOV}$ lze zdůvodnit přímo pomocí podobnosti trojúhelníků KOV a KYD (koeficient podobnosti je 3 : 2).

Z9–I–3

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej sám rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno.

V 7:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 70 kafemlýnků.

Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně ve 22:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 36 kafemlýnků.

Za jak dlouho by složili 360 kafemlýnků, pokud by Robert i Hubert skládali společně?

(*K. Pazourek*)

Nápověda. Kolik kafemlýnků přibude za hodinu v každé ze směn?

Možné řešení. V dopolední pětihodinové směně přibylo 70 kafemlýnků, což odpovídá $70 : 5 = 14$ kafemlýnkům za hodinu. V odpolední devítihodinové směně přibylo 36 kafemlýnků, což odpovídá $36 : 9 = 4$ kafemlýnkům za hodinu. Pokud by roboti pracovali jednu hodinu dopoledním způsobem a jednu hodinu odpoledním způsobem, vyrobili by $14 + 4 = 18$ kafemlýnků a přitom by vyrobili stejné množství kafemlýnků, jako kdyby společně skládali (a nic nerozebírali) $\frac{3}{4}$ hodiny. Roboti by společně složili 360 kafemlýnků za $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ hodin, neboť $360 = 18 \cdot 20$.

Jiné řešení. Pokud h značí počet kafemlýnků, které složí Hubert za hodinu, a r počet kafemlýnků, které za hodinu složí Robert, potom za hodinu rozloží Hubert $\frac{1}{4}h$ kafemlýnků a Robert $\frac{1}{4}r$ kafemlýnků. Informace ze zadání vedou k soustavě dvou rovnic:

$$5\Big(h - \frac{1}{4}r\Big) = 70,$$
$$9\Big(r - \frac{1}{4}h\Big) = 36.$$

Řešením této soustavy obdržíme $r = 8$ a $h = 16$. Za hodinu by tedy oba roboti společně složili $r + h = 24$ kafemlýnků. Tudíž 360 kafemlýnků by společně skládali $360 : 24 = 15$ hodin.

Z9–I–4

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 se chystala na cestu vlakem se třemi vagóny. Chtěla se rozsadit tak, aby v každém vagóně seděla tři čísla a největší z každé trojice bylo rovno součtu zbylých dvou. Průvodčí tvrdil, že to není problém, a snažil se číslům pomoct. Naopak výpravčí tvrdil, že to není možné.

Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. (*E. Novotná*)

Nápověda. Uvažte paritu (sudost, lichost) čísel a jejich součtů.

Možné řešení. Pokud by se čísla dala rozsadit do vagónů podle jejich přání, potom by součet tří největších čísel z každého vagónu byl stejný jako součet zbylých šesti čísel. To by znamenalo, že součet všech devíti čísel by byl sudý. Avšak tento součet je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

což je liché číslo. Proto čísla požadovaným způsobem rozsadit nelze, pravdu měl výpravčí.

Jiné řešení. Mezi čísly 1 až 9 je pět lichých (L) a čtyři sudé (S). Sudé číslo lze vyjádřit jako součet dvou lichých čísel nebo jako součet dvou sudých čísel. Liché číslo lze vyjádřit jedině jako součet lichého a sudého čísla. V každém vagóně tedy mohou podle uvedených požadavků sedět pouze následující skupiny čísel:

$$\text{buď } \{L, L, S\}, \text{ nebo } \{S, S, S\}.$$

Jakýmkoli přiřazením těchto možností do tří vagónů dostaneme vždy celkem sudý počet lichých čísel a lichý počet sudých čísel. V našem případě je tomu však naopak, proto nelze čísla rozsadit podle jejich přání. Pravdu měl tudíž výpravčí.

Poznámka. Při jakémkoli rozmístění pěti lichých čísel do tří vagónů bude vždy v některém vagóně právě jedno nebo právě tři lichá čísla. A právě v takovém vagóně nebude platit požadavek o součtu.

Jiná nápověda. Která čísla mohla cestovat s číslem 9?

Jiné řešení. Můžeme postupně po vagónech rozsazovat čísla od největšího tak, aby platil požadavek o jejich součtu. Číslo 9 může cestovat s některou z následujících dvojic:

- 8 a 1: v dalším vagóně může 7 cestovat s některou z následujících dvojic:
  - ▷ 5 a 2: na další vagón zbývá 6, 4 a 3, ale $6 \neq 4 + 3$,
  - ▷ 4 a 3: na další vagón zbývá 6, 5 a 2, ale $6 \neq 5 + 2$,
- 7 a 2: v dalším vagóně může 8 cestovat jedině s dvojicí
  - ▷ 5 a 3: na další vagón zbývá 6, 4 a 1, ale $6 \neq 4 + 1$,
- 6 a 3: v dalším vagóně může 8 cestovat jedině s dvojicí
  - ▷ 7 a 1: na další vagón zbývá 5, 4 a 2, ale $5 \neq 4 + 2$,
- 5 a 4: v dalším vagóně může 8 cestovat s některou z následujících dvojic:
  - ▷ 7 a 1: na další vagón zbývá 6, 3 a 2, ale $6 \neq 3 + 2$,
  - ▷ 6 a 2: na další vagón zbývá 7, 3 a 1, ale $7 \neq 3 + 1$.

Zjistili jsme, že čísla nelze rozsadit tak, aby požadavek o součtu platil ve všech vagónech. Pravdu měl tudíž výpravčí.

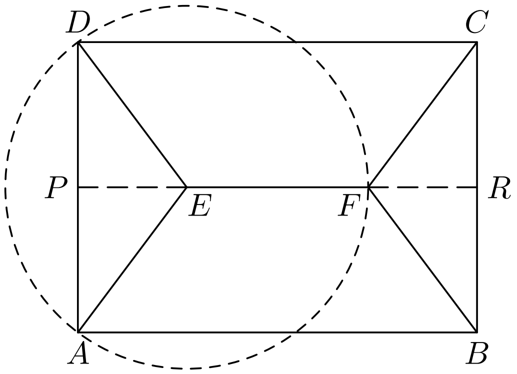
Z9–I–5

Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body E a F tak, že úsečky EA, ED, EF, FB, FC jsou navzájem shodné. Strana AB je dlouhá 22 cm a kružnice opsaná trojúhelníku AFD má poloměr 10 cm.

Určete délku strany BC. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Kde leží střed kružnice opsané trojúhelníku AFD?

Možné řešení. Bod E je stejně daleko od bodů A a D, bod F je stejně daleko od bodů B a C a úsečky AD a BC jsou protějšími stranami obdélníku. Proto body E a F leží na společné ose úseček AD a BC. Bod E má stejnou vzdálenost od všech vrcholů trojúhelníku AFD, proto je středem jemu opsané kružnice. Znázornění bodů ze zadání vypadá následovně (body P a R jsou průsečíky osy EF se stranami AD a BC, tj. středy těchto stran):



Trojúhelníky APE, DPE, BRF a CRF jsou navzájem shodné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž jedna odvěsna je polovinou hledané strany obdélníku a velikosti zbylých dvou stran umíme odvodit ze zadání. Např. v trojúhelníku APE má přepona AE velikost 10 cm a odvěsna PE má velikost $(22 - 10) : 2 = 6$ cm. Podle Pythagorovy věty platí

$$|PA|^2 + 6^2 = 10^2,$$

tedy $|PA|^2 = 64$ a $|PA| = 8$ cm. Délka strany BC je 16 cm.

Poznámka. Na uvedeném obrázku mlčky naznačujeme, že strana AB je delší než BC. To je sice potvrzeno následujícím výpočtem, ale lze si toho všimnout přímo: Přepona AE v pravoúhlém trojúhelníku APE je delší než odvěsna PA, což je polovina strany BC. Pokud by strana BC byla delší než strana AB, byla by úsečka AE také delší než polovina strany AB. Z předchozího však víme, že $|AE| = 10\,\text{cm}$ a $\frac{1}{2}|AB| = 11\,\text{cm}$, takže tato situace nastat nemůže.

Z9–I–6

Na přímce představující číselnou osu uvažte navzájem různé body odpovídající číslům a, $2a$, $3a+1$ ve všech možných pořadích. U každé možnosti rozhodněte, zda je takové uspořádání možné. Pokud ano, uveďte konkrétní příklad, pokud ne, zdůvodněte proč.

(*M. Petrová*)

Nápověda. Co můžete říct o uspořádání trojice čísel a, $2a$, $3a$?

Možné řešení. Před vlastním rozborem možností si všimneme několika užitečných faktů. Protože čísla mají být navzájem různá, musí být $a \neq 0$. Vzdálenosti mezi sousedními čísly ve čtveřici 0, a, $2a$, $3a$ jsou stejné, a to $|a|$, přitom uspořádání této čtveřice závisí na znaménku a: číslo a je kladné, právě když platí

$$0 < a < 2a < 3a, \tag{1}$$

číslo a je záporné, právě když platí

$$3a < 2a < a < 0. \tag{2}$$

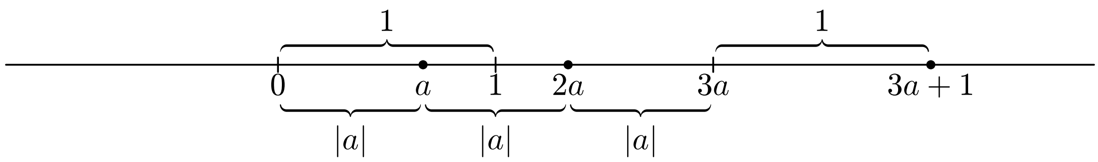
Bez ohledu na znaménko a dále platí

$$3a < 3a + 1. \tag{3}$$

Všechna možná uspořádání tří navzájem různých čísel jsou tato:

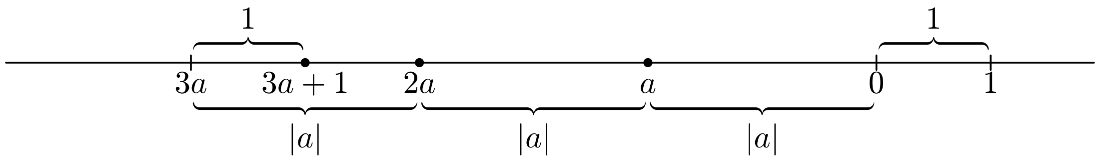
a) $a < 2a < 3a + 1$,
b) $a < 3a + 1 < 2a$,
c) $3a + 1 < a < 2a$,
d) $3a + 1 < 2a < a$,
e) $2a < 3a + 1 < a$,
f) $2a < a < 3a + 1$.

Pro kladné a podle podmínek (1) a (3) platí $a < 2a < 3a+1$, což odpovídá možnosti a) a současně vylučuje možnosti b) a c). Obecný vztah mezi trojicí čísel vyhovující možnosti a) a jejím ukotvením na číselné ose (tj. čísly 0 a 1) je schematicky znázorněn na následujícím obrázku. Konkrétní příklad uspořádání a) je dán dosazením např. $a = \frac{2}{3}$, tedy $\frac{2}{3} < \frac{4}{3} < 3$.

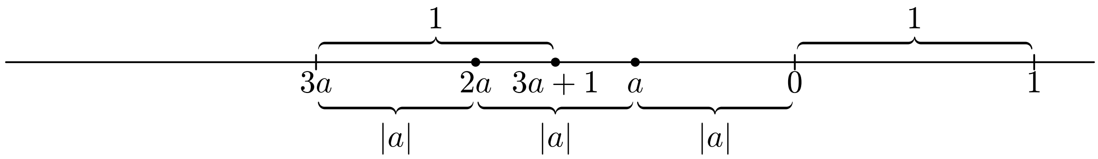


Pro záporné a nemůžeme z podmínek (2) a (3) o vztahu $3a+1$ vzhledem k a a $2a$ říct nic bližšího. Postupně ukážeme, že každý ze zbývajících případů je možný:

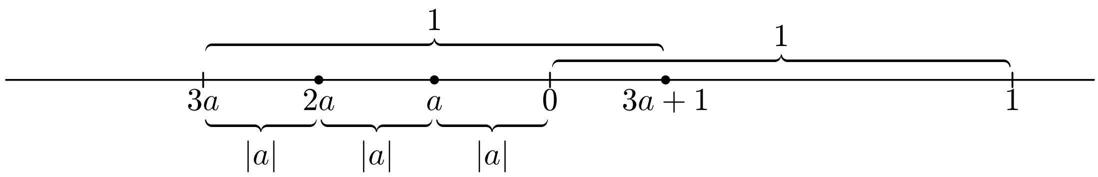
Obecné vztahy mezi trojicemi čísel vyhovujících možnostem d), e), resp. f) a čísly 0 a 1 jsou schematicky znázorněny na následujících obrázcích. Konkrétní příklad uspořádání d) je dán dosazením např. $a = -2$, tedy $-5 < -4 < -2$.



Konkrétní příklad uspořádání e) je dán dosazením např. $a = -\frac{2}{3}$, tedy $-\frac{4}{3} < -1 < -\frac{2}{3}$.



Konkrétní příklad uspořádání f) je dán dosazením např. $a = -\frac{1}{4}$, tedy $-\frac{1}{8} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4}$.



Poznámka. V případech e) a f) můžeme volit trojice bodů představujících čísla a, $2a$ a $3a+1$ naprosto libovolně; naznačeným způsobem odvodíme umístění 0 a 1, a tím vlastně určíme hodnotu a. V případech a) a d) tomu tak není; např. pro uspořádání d) a bod $3a+1$ zvolený příliš vlevo od bodu $2a$ se může stát, že $3a$ vyjde někde mezi, což by bylo v rozporu s podmínkou (3).

Jiná nápověda. Pro jednotlivá uspořádání odvoďte možné hodnoty a.

Jiné řešení. Všechna možná uspořádání tří navzájem různých čísel jsou uvedena v seznamu a) až f) v předchozím řešení. Řešením nerovností v jednotlivých případech zjišťujeme, že případ

a) je splněn pro libovolné $a > 0$,
b) není splněn pro žádné a,
c) není splněn pro žádné a,
d) je splněn pro libovolné $a < -1$,
e) je splněn pro libovolné $-1 < a < -\frac{1}{2}$,
f) je splněn pro libovolné $-\frac{1}{2} < a < 0$.

Pro příklad uvádíme podrobnosti k případu b): odpovídající nerovnosti jsou splněny, právě když platí

$$a < 3a+1 \quad \text{a} \quad 3a+1 < 2a,$$

což je ekvivalentní s dvojicí nerovností

$$-\frac{1}{2} < a \quad \text{a} \quad a < -1.$$

Tyto dvě podmínky současně nesplňuje žádné reálné číslo, proto případ b) nastat nemůže.

Diskuse v ostatní případech je obdobná. Ve všech případech, které mají řešení, stačí pro konkrétní odpověď zvolit libovolné a s vymezeného intervalu.