II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Maruška dostala od babičky kouzelnou mošnu, která vždy o půlnoci zdvojnásobovala množství zlaťáků, které obsahovala. V pondělí v poledne vložila Maruška do prázdné mošny nějaké zlaťáky. V úterý a ve středu si z mošny vybrala vždy 40 zlaťáků a nic do ní nevkládala. Ve čtvrtek si opět vybrala 40 zlaťáků a mošna byla prázdná.

Kolik zlaťáků vložila Maruška v pondělí do mošny?

Kolik zlaťáků měla do prázdné mošny vložit, aby mohla opakovaně každý den vybírat 40 zlaťáků, nemusela nic vkládat a aby každý den před výběrem byl počet zlaťáků v mošně stejný? (*M. Volfová*)

Možné řešení. 1. Ve čtvrtek po výběru 40 zlaťáků byla mošna prázdná, před výběrem v ní tedy bylo oněch 40 zlaťáků.

Ve středu po výběru (před nočním zdvojnásobením) bylo v mošně $40 : 2 = 20$ zlaťáků, před výběrem v ní tedy bylo $20 + 40 = 60$ zlaťáků.

V úterý po výběru bylo v mošně $60 : 2 = 30$ zlaťáků, před výběrem v ní tedy bylo $30 + 40 = 70$ zlaťáků.

V pondělí Maruška do mošny vložila $70 : 2 = 35$ zlaťáků.

2. Aby každý den před výběrem byl počet zlaťáků v mošně stejný, muselo by noční zdvojnásobení vyrovnat výběr 40 zlaťáků. To znamená, že těchto 40 zlaťáků by muselo být právě polovinou počtu zlaťáků před výběrem, tedy před výběrem by tam muselo být 80 zlaťáků. Aby v úterý před výběrem bylo v mošně 80 zlaťáků, musela by Maruška v pondělí do mošny vložit 40 zlaťáků.

Jiné řešení. 1. Pokud Maruščin pondělní vklad označíme z, potom

- v úterý po výběru bylo v mošně $2z - 40$ zlaťáků,
- ve středu po výběru bylo v mošně $4z - 80 - 40 = 4z - 120$ zlaťáků,
- ve čtvrtek po výběru bylo v mošně $8z - 240 - 40 = 8z - 280$ zlaťáků.

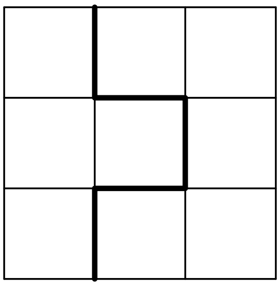
Ve čtvrtek po výběru byla mošna prázdná, tzn. $8z = 280$, tedy $z = 35$. V pondělí Maruška do mošny vložila 35 zlaťáků.

2. Aby každý den před výběrem byl počet zlaťáků v mošně stejný, musel by být počet zlaťáků stejný také po výběru, resp. před nočním zdvojnásobením. Porovnáním těchto hodnot např. v pondělí a v úterý dostáváme $z = 2z - 40$, tedy $z = 40$. V pondělí měla Maruška do mošny vložit 40 zlaťáků.

Návrh hodnocení. Po 3 bodech za každou část úlohy (z toho 2 body za dílčí kroky ve zvoleném postupu a 1 bod za výsledek).

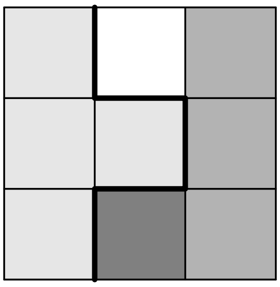
Z7–II–2

Mřížka s devíti poli jako na obrázku je vyplněna devíti bezprostředně po sobě jdoucími přirozenými čísly. Ta jsou seřazena podle velikosti zleva doprava a shora dolů (tj. nejmenší číslo je vlevo nahoře, největší je vpravo dole). Tlustá lomená čára rozděluje mřížku na dvě části. Součet čísel v levé části je o 100 menší než součet čísel v pravé.



Které číslo je v prostředním poli? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Na každém řádku platí, že číslo v jeho pravém krajním poli je o 2 větší než číslo v jeho levém krajním poli. Součet čísel v pravém krajním sloupci je tedy o $3 \cdot 2 = 6$ větší než součet čísel v levém krajním sloupci. Číslo v dolním poli prostředního sloupce je o 3 větší než číslo v jeho prostředním poli. Tyto rozdíly jsou v mřížce zvýrazněny jinými odstíny šedi.



Součet čísel všech šedých polí v pravé části mřížky je proto o $6 + 3 = 9$ větší než součet čísel všech šedých polí v jeho levé části. Avšak součet všech čísel v pravé části má být o 100 větší než součet všech čísel v levé části. Proto musí být v jediném nezvýrazněném poli číslo $100 - 9 = 91$. V prostředním poli mřížky pak musí být číslo $91 + 3 = 94$.

Návrh hodnocení. 3 body za určení vhodných podmnožin ve dvou oddělených částech mřížky a stanovení rozdílu součtů v těchto podmnožinách; 2 body za vypočtení čísla v neoznačeném poli (nebo jiného pomocného čísla); 1 bod za určení čísla v prostředním poli.

Jiné řešení. Pokud hledané číslo v prostředním poli označíme x, potom čísla v ostatních polích jsou

$x-4$	$x-3$	$x-2$
$x-1$	x	$x+1$
$x+2$	$x+3$	$x+4$

Součet všech čísel v levé části mřížky je $4x - 3$, součet všech čísel v pravé části je $5x + 3$. Přitom druhý výraz má být o 100 větší než první. Odtud dostáváme rovnici

$$4x - 3 + 100 = 5x + 3,$$

jejímž řešením je $x = 94$. Číslo v prostředním poli je 94.

Návrh hodnocení. 3 body za sestavení rovnice, kde neznámou je jedno z čísel v mřížce; 3 body za vypočtení čísla v prostředním poli.

Poznámka. Při jiném výběru neznámé dojdeme k jiné rovnici s obdobným řešením. Pokud např. y značí číslo v levém horním poli, potom dostaneme

$$\begin{aligned} y + (y+3) + (y+4) + (y+6) + 100 &= (y+1) + (y+2) + (y+5) + (y+7) + (y+8), \\ 4y + 113 &= 5y + 23, \\ y &= 90. \end{aligned}$$

Číslo v prostředním poli je pak určeno jako $y + 4 = 94$.

Z7–II–3

Adam má dva kvádry s objemy $12\,\mathrm{cm}^3$ a $30\,\mathrm{cm}^3$, přičemž rozměry každého z nich jsou v centimetrech vyjádřeny navzájem různými celými čísly. Adam zjistil, že kvádry lze slepit k sobě tak, aby lepené stěny splývaly, a získat tak nový kvádr.

Jaké rozměry mohl mít nový kvádr? Určete všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Možné rozměry kvádrů určíme pomocí rozkladu zadaných objemů na součin tří různých přirozených čísel:

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4, \\ 30 &= 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

V těchto rozkladech hledáme společné dvojice čísel, které představují rozměry lepených stěn. Takové dvojice jsou právě tři a odpovídají následujícím možnostem:

a) Pro společnou stěnu $1\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm}$ je třetí rozměr nového kvádru $6 + 15 = 21$ (cm).
b) Pro společnou stěnu $1\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ je třetí rozměr nového kvádru $4 + 10 = 14$ (cm).
c) Pro společnou stěnu $1\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$ je třetí rozměr nového kvádru $2 + 5 = 7$ (cm).

Nový kvádr mohl mít rozměry $1\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm} \times 21\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm} \times 14\,\mathrm{cm}$, nebo $1\,\mathrm{cm} \times \times 6\,\mathrm{cm} \times 7\,\mathrm{cm}$.

Jiné řešení. Součet objemů obou kvádrů je $42\,\mathrm{cm}^3$. Stejně jako u původních kvádrů jsou rozměry nového kvádru v centimetrech vyjádřeny celými čísly. Na rozdíl od původních kvádrů však tyto rozměry nemusí být navzájem různé. Možné rozměry nového kvádru určíme pomocí rozkladu jeho objemu na součin tří přirozených čísel:

$$42 = 1 \cdot 1 \cdot 42 = 1 \cdot 2 \cdot 21 = 1 \cdot 3 \cdot 14 = 1 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Dvojice čísel v těchto rozkladech představující společnou stěnu musí sestávat z různých čísel, jejichž součin musí být dělitelem čísla 12 (objem menšího z původních kvádrů). Takové dvojice jsou čtyři, a ty odpovídají následujícím možnostem:

a) Pro společnou stěnu $1\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$ by třetí rozměr menšího, resp. většího kvádru byl $12 : 2 = 6\,(\text{cm})$, resp. $30 : 2 = 15\,(\text{cm})$.
b) Pro společnou stěnu $1\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$ by třetí rozměr menšího, resp. většího kvádru byl $12 : 3 = 4\,(\text{cm})$, resp. $30 : 3 = 10\,(\text{cm})$.
c) Pro společnou stěnu $1\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$ by třetí rozměr menšího, resp. většího kvádru byl $12 : 6 = 2\,(\text{cm})$, resp. $30 : 6 = 5\,(\text{cm})$.
d) Pro společnou stěnu $2\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$ by třetí rozměr menšího, resp. většího kvádru byl $12 : 6 = 2\,(\text{cm})$, resp. $30 : 6 = 5\,(\text{cm})$.

V případě d) by menší z původních kvádrů neměl různé délky stran, ostatní možnosti vyhovují všem požadavkům. Nový kvádr mohl mít rozměry $1\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 21\,\text{cm}$, $1\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 14\,\text{cm}$, nebo $1\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}$.

Návrh hodnocení. 2 body za určení všech rozkladů; 3 body za diskusi a výběr vyhovujících možností; 1 bod za závěr.