II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Monika přemýšlí o čtyřmístném čísle, které má následující vlastnosti:

- součin dvou krajních číslic je 40,
- součin dvou vnitřních číslic je 18,
- rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic,
- rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla (tj. čísla napsaného stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí) je největší možný.

Určete Moničino myšlené číslo. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Součin dvou krajních číslic je 40, a to je možné pouze jako $40 = 5 \cdot 8$. Rozdíl těchto číslic je roven $8 - 5 = 3$. Součin dvou vnitřních číslic je 18, a to je možné buď jako $18 = 2 \cdot 9$, nebo jako $18 = 3 \cdot 6$. V prvním případě je rozdíl $9 - 2 = 7$, což je různé od rozdílu krajních číslic. Ve druhém případě je rozdíl $6 - 3 = 3$, což souhlasí s rozdílem krajních číslic. Z prvních tří podmínek tedy vyplývá, že krajní číslice jsou 5 a 8, vnitřní číslice jsou 3 a 6. Taková čísla jsou čtyři:

$$5368, \quad 8635, \quad 8365, \quad 5638. \tag{1}$$

Aby byl rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla největší možný, musí být na místě tisíců, resp. stovek větší ze dvou možných číslic. Monika přemýšlela o čísle 8635.

Návrh hodnocení. 1 bod za dvojici krajních číslic; 1 bod za možné dvojice vnitřních číslic; 2 body za určení správné dvojice vnitřních číslic a čtyř možností (1); 2 body za určení vyhovující možnosti.

Poznámka. Mezi čísly (1) jsou opačně napsána čísla v první dvojici a čísla ve druhé dvojici. Závěrečnou část úlohy lze provést porovnáním čtyř možných rozdílů:

$$8635 - 5368 = 3267, \quad 5368 - 8635 = -3267,$$
$$8365 - 5638 = 2727, \quad 5638 - 8365 = -2727.$$

Z8–II–2

Mat kopal jámu. Pat se ho zeptal, jak bude jáma hluboká. Mat odpověděl hádankou: „Měřím 90 cm a právě mám vykopánu polovinu jámy. Až vykopu jámu celou, bude vršek mojí hlavy pod povrchem země tak hluboko, jak je nyní nad povrchem země.“

Jak hlubokou jámu Mat kopal? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Z Matova vysvětlení plyne, že jeho výška je přesně mezi hloubkou celé jámy a její polovinou. Tedy 90 cm je rovno třem čtvrtinám hloubky celé jámy. Mat kopal jámu hlubokou $\frac{4}{3} \cdot 90 = 120\,(\text{cm})$.

Návrh hodnocení. 3 body za poznatek, že 90 cm odpovídá $\frac{3}{4}$ hloubky celé jámy; 3 body za výpočet hloubky jámy.

Jiné řešení. Pokud označíme j hloubku celé jámy, potom podle Matova vysvětlení můžeme vzdálenost vršku Matovy hlavy od povrchu země vyjádřit jako

$$j - 90 = 90 - \frac{1}{2}j. \tag{1}$$

Odtud dostáváme $\frac{3}{2}j = 180$, tedy $j = 120$. Mat kopal jámu hlubokou 120 cm.

Návrh hodnocení. 3 body za vyjádření informací ze zadání pomocí neznámé j; 3 body za výpočet hloubky jámy.

Poznámka. Pokud označíme v vzdálenost vršku Matovy hlavy od povrchu země a j hloubku celé jámy, potom Matovo vysvětlení můžeme zapsat např. jako

$$90 = \frac{1}{2}j + v, \quad 90 = j - v.$$

Obvyklými úpravami lze z této soustavy získat rovnici ekvivalentní s (1).

Z8–II–3

Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny $|AB| = 5\,\text{cm}$ a $|BC| = 12\,\text{cm}$. Vrcholy trojúhelníku ABC jsou zobrazeny tak, že

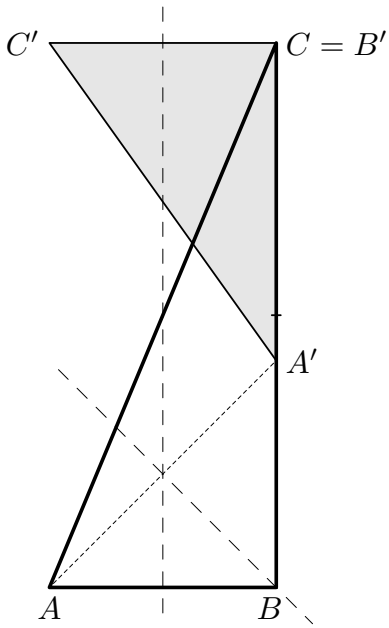
- bod A se zobrazuje do bodu A' souměrně podle osy úhlu ABC,
- bod B se zobrazuje do bodu B' souměrně podle středu úsečky BC,
- bod C se zobrazuje do bodu C' souměrně podle osy úsečky AB.

Určete obsah trojúhelníku $A'B'C'$. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Ramena úhlu ABC jsou souměrná podle jeho osy. Proto bod A' leží na polopřímce BC, a to tak, že $|BA'| = |BA| = 5\,\text{cm}$.

Koncové body úsečky BC jsou souměrné podle jejího středu, proto $B' = C$.

Body C a C' jsou souměrné podle osy úsečky AB, proto je úsečka CC' kolmá k této přímce. Navíc je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B, proto body A, B, C, C' tvoří vrcholy obdélníku.



Trojúhelník $A'B'C'$ je tedy pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B'. Jeho odvěsny mají velikosti

$$|A'B'| = |BB'| - |BA'| = 12 - 5 = 7\,(\mathrm{cm}),$$
$$|B'C'| = |AB| = 5\,(\mathrm{cm}).$$

Obsah trojúhelníku $A'B'C'$ je $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17{,}5\,(\mathrm{cm}^2)$.

Návrh hodnocení. Po 1 bodu za upřesnění poloh bodů A', B', C'; 2 body za poznatek, že trojúhelník $A'B'C'$ je pravoúhlý; 1 bod za velikosti odvěsen a obsah.