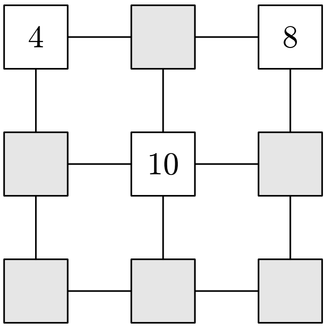
66. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z9

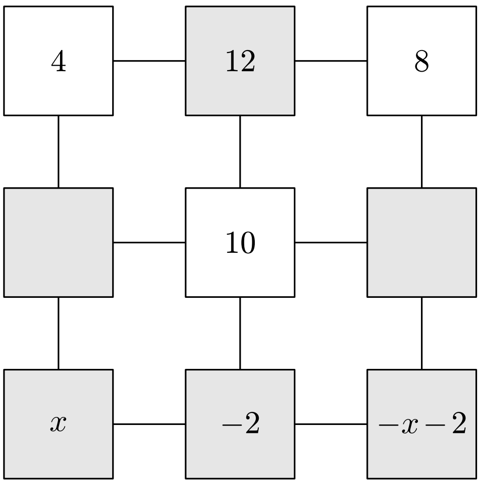
Z9–II–1

Do prázdných políček doplňte čísla tak, aby v políčcích uprostřed každé vyznačené úsečky byl součet čísel z jejích krajních políček a aby součty čísel z políček na obou úhlopříčkách byly stejné. (*S. Bednářová*)



Možné řešení. Podle první podmínky umíme doplnit pouze prostřední políčko na prvním řádku, $4 + 8 = 12$, a prostřední políčko na třetím řádku, $10 - 12 = -2$.

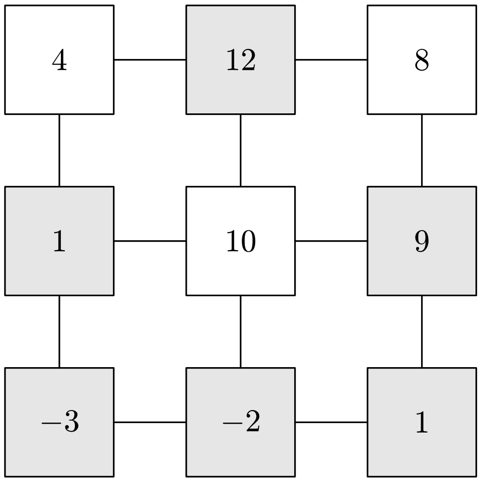
Další čísla přímo doplnit neumíme, ale můžeme si pomoci neznámou a rovnicí. Pokud např. číslo v prvním políčku na třetím řádku označíme x, potom podle první podmínky bude ve třetím políčku na tomtéž řádku $-x - 2$.



Podle druhé podmínky dostáváme

$$\begin{aligned} 4 + 10 - x - 2 &= 8 + 10 + x, \\ 2x &= -6, \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Po dosazení umíme doplnit také zbývající čísla na druhém řádku a dostáváme následující jednoznačné řešení:



Návrh hodnocení. Po 1 bodu za doplnění hodnot 12 a -2; 3 body za sestavení a vyřešení rovnice; 1 bod za doplnění zbývajících čísel.

Řešení pomocí rovnice není nezbytné, lze odhalit např. postupným zkoušením a vysvětlením, že úloha více řešení nemá. Naopak, označením více čísel z prázdných polích neznámými lze úlohu řešit pomocí více rovnic o více neznámých. Navrhované hodnocení přizpůsobte žákovskému řešení s ohledem na jeho úplnost a kvalitu komentáře.

Z9–II–2

Pat sečetl všechna čtyřmístná čísla, z nichž každé obsahovalo všechny číslice 1, 2, 3 a 4, a dospěl k součtu 58 126.

Mat Pata upozornil, že výsledek není dobře, a zároveň mu prozradil, že součet lze získat jednodušším způsobem než vypisováním a postupným sčítáním všech čísel. Pat si nechal poradit, úlohu vyřešil a zjistil, že původně sice počítal správně, ale na dva sčítance zapomněl.

Zjistěte, na která čísla Pat původně zapomněl. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Všech čtyřmístných čísel obsahujících všechny uvedené číslice je 24:

1 234	1 243	1 324	1 342	1 423	1 432
2 134	2 143	2 314	2 341	2 413	2 431
3 124	3 142	3 214	3 241	3 412	3 421
4 123	4 132	4 213	4 231	4 312	4 321

Mezi těmito 24 čísly se na každém místě opakuje každá ze 4 číslic právě 6krát ($6 \cdot 4 = 24$). Součet všech číslic jak na místě jednotek, tak na místě desítek, stovek i tisíců je roven

$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 60.$$

Součet všech uvedených čísel je proto roven

$$60 + 10 \cdot 60 + 100 \cdot 60 + 1\,000 \cdot 60 = 66\,660.$$

Protože Patovi původně vyšlo 58 126, musí být součet dvou chybějících sčítanců roven

$$66\,660 - 58\,126 = 8\,534.$$

Protože všechna čísla sestávají z číslic menších než 5, nedochází při sečítání kterýchkoli dvou nikde k přechodu přes desítku. Číslice na jednotlivých místech čísla 8 534 lze proto získat následovně:

- $8 = 4 + 4$,
- $5 = 2 + 3$ (možnost $1 + 4$ vylučujeme, protože pak by jeden ze sčítanců měl na dvou místech 4),
- $3 = 1 + 2$,
- $4 = 1 + 3$ (možnost $2 + 2$ vylučujeme, protože pak by jeden ze sčítanců měl na dvou místech 2).

Číslo 8 534 lze vyjádřit jedině jako součet čísel 4 213 a 4 321. A to jsou právě čísla, na která Pat původně zapomněl.

Návrh hodnocení. 3 body za určení správného součtu 66 660; 1 bod za určení rozdílu 8 534; 2 body za určení původně chybějících čísel 4 213 a 4 321.

Poznámky. Počet všech čtyřmístných čísel obsahujících čtyři různé číslice je roven počtu všech permutací čtyřprvkové množiny, a těch je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Celkový správný součet lze odvodit také seskupováním vhodných sčítanců: např. součet každého čísla s číslem napsaným opačně je vždy 5 555 (viz $1\,234 + 4\,321 = 5\,555$) a takových dvojic je zřejmě 12; součet všech uvažovaných čísel tedy je $12 \cdot 5\,555 = 66\,660$.

Z9–II–3

Vědci pouštěli do bludiště potkany a sledovali, jestli se dostanou do cíle. Zjistili, že černých potkanů došlo k cíli 56 %, bílých 84 %. V cíli byl poměr počtu černých a bílých potkanů 1 : 2.

Jaký byl poměr počtu černých a bílých potkanů na startu? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Počet černých potkanů na startu si označíme x, počet bílých potkanů na startu si označíme y. K cíli tak došlo $0{,}56x$ černých potkanů a $0{,}84y$ bílých potkanů a podle zadání je $0{,}56x : 0{,}84y = 1 : 2$. Potřebujeme zjistit poměr $x : y$.

Předchozí rovnost můžeme zapsat jako

$$\frac{0{,}56x}{0{,}84y} = \frac{1}{2},$$

což je ekvivalentní s

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{84}{56} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4}.$$

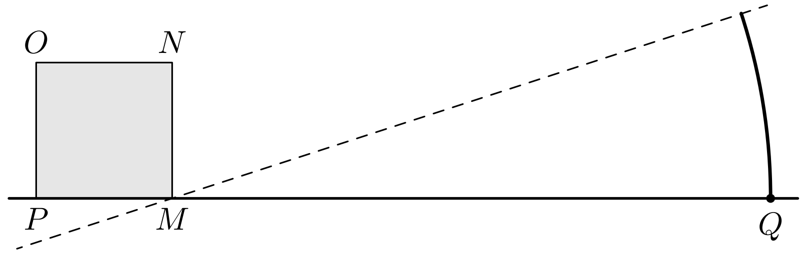
Poměr černých a bílých potkanů na startu byl 3 : 4.

Návrh hodnocení. 3 body za odvození úvodní rovnosti nebo podobného vztahu; 3 body za vyjádření poměru $x : y$.

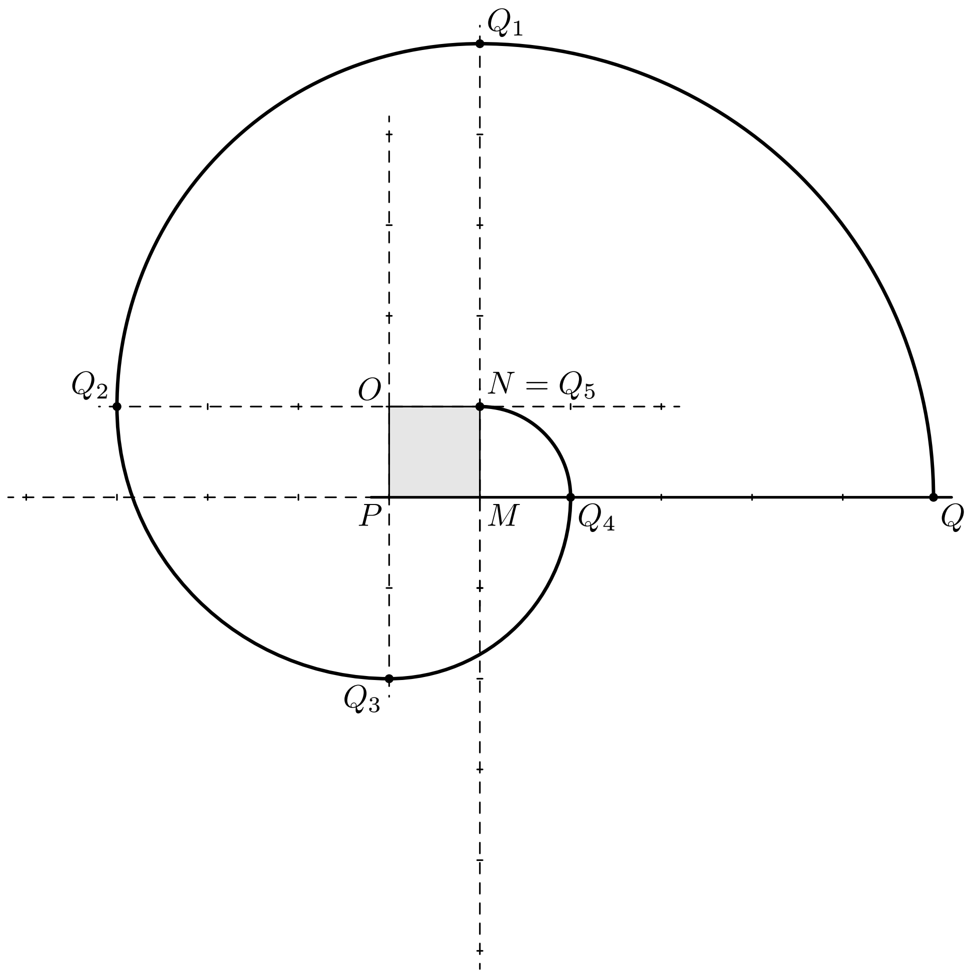
Z9–II–4

Na úsečce PQ je jednou stranou položen čtverec $MNOP$, viz obrázek. Přímka PQ se postupně překlápí po stranách čtverce $MNOP$, přičemž bod Q zanechává na papíře stopu. Po prvním překlopení je tato stopa dlouhá 5 cm, po pěti překlopeních bod Q splyne s jedním z vrcholů čtverce.

Určete délku celé stopy bodu Q. *(V. Žádník)*



Možné řešení. Při každém překlopení opisuje bod Q čtvrtkružnici se středem v některém z vrcholů čtverce a s poloměrem, který se postupně zmenšuje o délku strany čtverce. Aby bod Q po pěti překlopeních splynul s některým vrcholem čtverce, musí být úsečka MQ pětinásobkem strany čtverce.



Délky čtvrtkružnic jsou ve stejných poměrech jako jejich poloměry. Přitom poloměry všech čtvrtkružnic jsou celočíselnými násobky poloměru nejmenší (páté) čtvrtkružnice. Pokud její délku označíme d, potom součet délek všech pěti čtvrtkružnic je

$$d + 2d + 3d + 4d + 5d = 15d, \tag{1}$$

což je trojnásobek délky největší (první) čtvrtkružnice. Ze zadání víme, že první čtvrtkružnice je dlouhá 5 cm. Součet (1), tedy délka stopy opsané bodem Q, je

$$3 \cdot 5 = 15\,(\mathrm{cm}).$$

Návrh hodnocení. 2 body za určení MQ jako pětinásobku strany čtverce; 2 body za vyjádření součtu (1); 2 body za dořešení a vyjádření v cm.

Poznámka. Vyjádření d pomocí délky strany čtverce, ozn. a, je $d = \frac{1}{2}\pi a$. Součet (1) pak může být napsán takto:

$$\frac{1}{2}\pi a \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{15}{2}\pi a = 3 \cdot \frac{5}{2}\pi a.$$

K určení součtu v cm nepotřebujeme znát ani a, ani d.