Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *O posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že pro všechna přirozená čísla n platí*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Najděte všechny hodnoty a_1, pro které je tato posloupnost konstantní.
b) Nechť $a_1 = 5$. Určete největší celé číslo nepřevyšující a_{2018}. (Vojtech Bálint)

Řešení. a) Předpokládejme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní. Potom musí platit $a_2 = a_1$, což můžeme použitím vztahu ze zadání zapsat jako

$$a_1 = \frac{a_1^2}{a_1^2 - 4a_1 + 6}.$$

Tuto rovnici snadno ekvivalentně upravíme na $a_1(a_1-2)(a_1-3) = 0$. Odtud dostáváme, že $a_1 \in \{0, 2, 3\}$. Je vidět, že pro tyto hodnoty a_1 je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ opravdu konstantní a všechny její členy jsou rovny a_1. Formálně bychom to dokázali matematickou indukcí.

b) Nechť $a_1 = 5$. Postupně vypočítáme několik dalších členů posloupnosti (a_n). Dostaneme $a_2 \approx 2{,}27$, $a_3 \approx 2{,}49$, $a_4 \approx 2{,}77$, atd. Z toho můžeme nabýt dojmu, že pro všechna $n \geqq 2$ platí $2 < a_n < 3$. Tuto hypotézu dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 2$ tvrzení zjevně platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro dané $n \geqq 2$. Potom

$$3 - a_{n+1} = 3 - \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6} = \frac{2(a_n - 3)^2}{(a_n - 2)^2 + 2} > 0,$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6} - 2 = \frac{(6 - a_n)(a_n - 2)}{(a_n - 2)^2 + 2} > 0.$$

To dokazuje obě nerovnosti $2 < a_{n+1} < 3$, takže důkaz matematickou indukcí je hotov. Platí tedy také $2 < a_{2018} < 3$, z čehož plyne, že největší celé číslo nepřevyšující a_{2018} je 2.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. O posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že pro všechna přirozená čísla n platí $b_{n+1} = b_n^2 - 2$. Najděte všechny hodnoty b_1, pro které jsou všechny členy $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ rovny b_1. [Ze vztahu pro $n = 1$ dostáváme $b_1 = b_1^2 - 2$, z čehož $b_1 \in \{-1, 2\}$. Následně ověříme, že tyto hodnoty vyhovují.]

N2. O posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že $b_1 = 1$ a že pro všechna přirozená čísla n platí $b_{n+1} = 3b_n/(b_n + 1)$. Dokažte, že všechny členy posloupnosti jsou z intervalu $\langle 1, 2)$. [Matematickou indukcí ověřte, že pro všechna přirozená n platí nerovnosti $1 \leqq b_n < 2$.]

D1. O posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je známo, že pro všechna přirozená čísla n platí $b_{n+1} = 2b_n^2/(b_n^2 - 3)$. Najděte všechny hodnoty b_1 takové, že posloupnost $b_2, b_3, b_4, \ldots$ je konstantní. [Odvoďte, že $b_{n+1} = b_n$, právě když $b_n \in \{-1, 0, 3\}$, takže b_2 musí být rovno jedné z těchto hodnot. Následně vypočítáme odpovídající hodnoty b_1. Výsledek je $b_1 \in \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.]

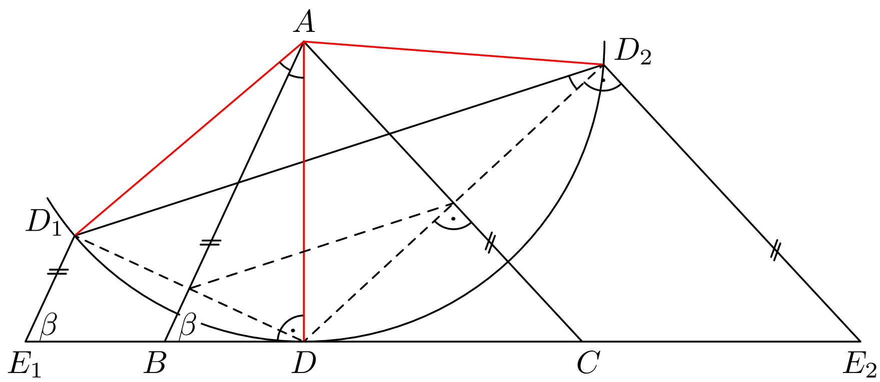
D2. Odvoďte explicitní vyjádření posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ z úlohy N2. [Zadaný vztah upravíme na $3 \cdot 1/b_{n+1} = 1 + 1/b_n$. Posloupnost $c_n = 1/b_n$ tedy splňuje rovnost $3c_{n+1} = c_n + 1$. Substitucí $c_n = d_n + 1/2$ se zbavíme konstantního členu a dostaneme $3d_{n+1} = d_n$. Posloupnost d_n je tedy geometrická, takže dovedeme určit její explicitní tvar. Zpětným dosazováním postupně najdeme vyjádření pro b_n. Výsledek je $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}/(3^{n-1}+1)$.]

D3. Nejznámější rekurentně definovaná posloupnost je Fibonacciova posloupnost. Ta je dána vztahy $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ a rekurentním vztahem $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ platícím pro každé $n \geqq 3$. Dokažte, že $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$ a $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. [Postupujte matematickou indukcí podle n.]

2. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme D patu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových souměrnostech po řadě podle přímek AB, AC. Dále označme E_1 a E_2 body na přímce BC takové, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokažte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 leží na téže kružnici, jejíž střed leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.* (Patrik Bak)

Řešení. Jak dokážeme, zmíněné čtyři body leží na téže kružnici v takovém pořadí, že tvoří vrcholy tětivového čtyřúhelníku $E_1E_2D_2D_1$. Nejprve však vysvětlíme, proč je tento čtyřúhelník konvexní.

Protože trojúhelník ABC má podle předpokladu ostré vnitřní úhly u vrcholů B a C,[1] leží bod D uvnitř strany BC a výšky v pravoúhlých trojúhelnících ABD, ACD vedené z vrcholu D mají své paty uvnitř stran AB, resp. AC. Tyto paty spolu s vrcholy B, C tak tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku, s nímž je zkoumaný čtyřúhelník $E_1E_2D_2D_1$ stejnolehlý s koeficientem 2 podle středu D (obr. 1). Je to tedy skutečně čtyřúhelník konvexní.



Obr. 1

Všimněme si, že díky osovým souměrnostem platí $|AD_1| = |AD| = |AD_2|$. Bod A je tedy středem kružnice opsané trojúhelníku D_1DD_2. Protože přímka AD body D_1 a D_2 odděluje, obvodový úhel D_1D_2D v dotyčné kružnici je roven polovině konvexního středového úhlu D_1AD, jehož osou je právě polopřímka AB. Proto jsou shodné tři ostré úhly D_1D_2D, D_1AB a DAB (vyznačené na obr. 1 obloučky). Jejich velikost je z pravoúhlého trojúhelníku ABD rovna $90° - \beta$, kde jako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Protože úhel DD_2E_2 je zřejmě pravý, má vnitřní úhel u vrcholu D_2 konvexního čtyřúhelníku $E_1E_2D_2D_1$ velikost

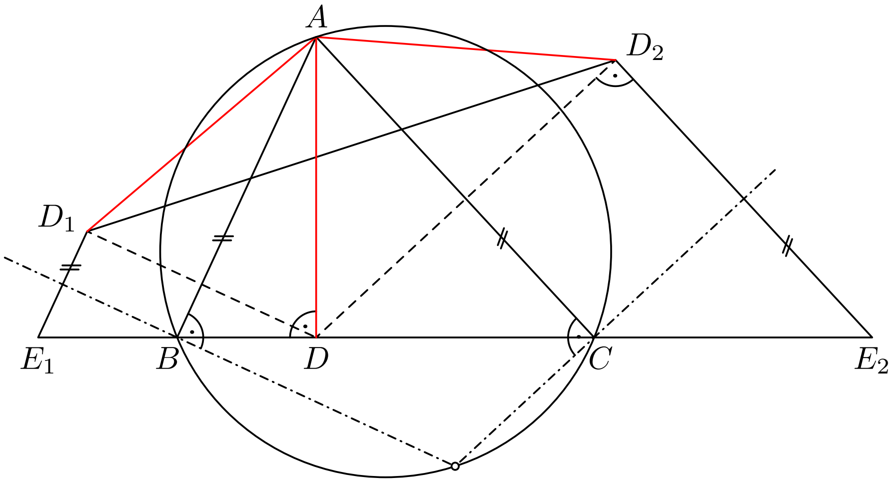
$$|\sphericalangle D_1D_2E_2| = |\sphericalangle D_1D_2D| + |\sphericalangle DD_2E_2| = (90° - \beta) + 90° = 180° - \beta,$$

[1] Předpoklad, že také úhel u vrcholu A je ostrý, v řešení potřebovat nebudeme.

zatímco vnitřní úhel u protilehlého vrcholu E_1 má zřejmě velikost β. Součet obou protilehlých úhlů je tak 180°, takže $E_1E_2D_2D_1$ je skutečně tětivový čtyřúhelník.

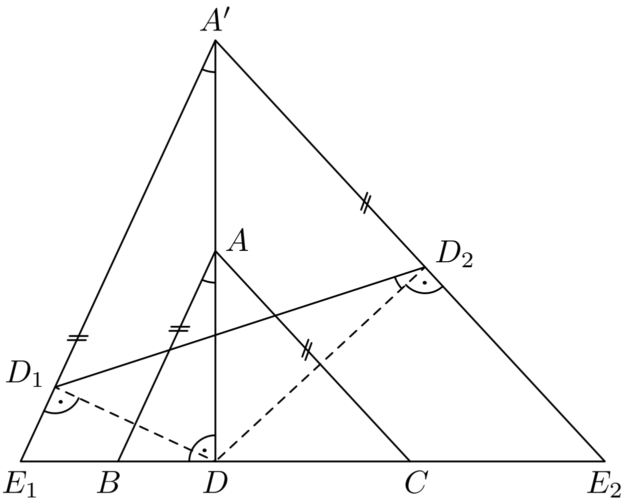
Přejděme k druhému tvrzení o tom, kde střed kružnice opsané čtyřúhelníku $E_1E_2D_2D_1$ leží. Víme, že je průsečíkem os jeho stran, z nichž pro naše úvahy vybereme strany E_1D_1 a E_2D_2.

Trojúhelník DE_2D_2 je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D_2. Přitom bod C leží na ose strany DD_2 a na jeho přeponě DE_2 — nutně tedy musí být jejím středem, a tudíž i středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Osa úsečky D_2E_2 tím pádem prochází bodem C (obr. 2) a navíc je zřejmě kolmá na AC. Analogicky osa úsečky D_1E_1 je přímka kolmá na AB procházející bodem B. Tyto dvě přímky se zřejmě protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC, neboť podle Thaletovy věty musí spojnice jejich průsečíku s bodem A tvořit průměr této kružnice. Tím je důkaz celého tvrzení hotov.



Obr. 2

Jiné řešení. Ukážeme jiný argument, proč $|\sphericalangle DD_2D_1| = 90^\circ - \beta$, což stačí k důkazu, že $E_1E_2D_2D_1$ je tětivový. Body E_1, E_2 jsou zřejmě po řadě obrazy bodů B, C ve stejnolehlosti se středem D a koeficientem 2. Pokud označíme A' obraz bodu A v této stejnolehlosti (obr. 3), budou trojice bodů A', D_1, E_1 a A', D_2, E_2 zřejmě ko-



Obr. 3

lineární. Čtyřúhelník $A'D_1DD_2$ je přitom tětivový, neboť oba úhly $A'D_1D$ a $A'D_2D$ jsou pravé. Odtud dostáváme $|\sphericalangle D_1D_2D| = |\sphericalangle D_1A'D|$. A protože $D_1A' \parallel BA$, je také $|\sphericalangle D_1A'D| = |\sphericalangle BAD| = 90° - \beta$, takže dohromady opravdu máme $|\sphericalangle DD_2D_1| = 90° - \beta$.

Jiné řešení. Ještě dalším poučným způsobem dokážeme první část tvrzení úlohy. Definujme bod A' jako v předešlém řešení (obr. 3). Potom použitím Eukleidových vět v pravoúhlých trojúhelnících $A'E_1D$ a $A'E_2D$ dostáváme $|A'D|^2 = |A'D_1| \cdot |A'E_1|$ a $|A'D|^2 = |A'D_2| \cdot |A'E_2|$. Dohromady tak máme rovnost

$$|A'D_1| \cdot |A'E_1| = |A'D_2| \cdot |A'E_2|.$$

Protože bod A' leží vně obou úseček D_1E_1 a D_2E_2, plyne z mocnosti[2] bodu A' ke kružnici $E_1D_1D_2$, že na téže kružnici leží i bod E_2 neboli že čtyřúhelník $D_1E_1E_2D_2$ je skutečně tětivový.

Poznámka. Existují další alternativní řešení tohoto úkolu pomocí situace, která vznikne po aplikování stejnolehlosti se středem v bodě D a koeficientem $1/2$. Pomocí ní může být například první část úlohy formulována tak, že máme dokázat, že kolmé průměty paty D na strany AB a AC leží spolu s body B a C na kružnici. Tato formulace je poměrně přirozená. Druhá část tvrzení se ale nejlépe dokazuje podle obr. 2.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte větu o obvodovém a středovém úhlu. [Mějme kružnici k se středem O a její tětivu AB. Nechť X je bod na k. Tvrzení dokážeme v případě, kdy je O vnitřním bodem trojúhelníku ABX (v ostatních případech je důkaz podobný). Označme $|\sphericalangle AXO| = \alpha$ a $|\sphericalangle BXO| = \beta$. Z rovnoramenných trojúhelníků AOX a BOX spočteme, že $|\sphericalangle XOA| = 180° - 2\alpha$ a $|\sphericalangle XOB| = 180° - 2\beta$. Z toho snadno máme $|\sphericalangle AOB| = 2(\alpha + \beta)$, což jsme měli dokázat.]

N2. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když je součet jeho protilehlých úhlů roven 180°. [Je-li $ABCD$ tětivový, označme O střed kružnice mu opsané. Konvexní a nekonvexní úhel AOC dávají dohromady 360°. Z věty o obvodovém a středovém úhlu máme, že tento součet je roven dvojnásobku součtu velikostí úhlů ABC a ADC — tento součet je tedy roven 180°. Předpokládejme naopak, že součet protilehlých úhlů je roven 180°. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|\sphericalangle ADC| \geqq 90°$. Potom $|\sphericalangle ABC| \leqq 90°$. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ADC. Bod O zřejmě leží v polorovině ACB. Navíc snadno vypočteme, že konvexní úhel AOC má velikost rovnou dvojnásobku úhlu při vrcholu B. Spolu s $|OA| = |OC|$ tak máme, že O musí nutně být středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, takže je středem kružnice opsané celému čtyřúhelníku $ABCD$.]

N3. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. [Jestliže je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, tak oba tyto úhly jsou rovny půlce příslušného středového úhlu AOB. Pokud naopak platí uvedená rovnost, označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Podívejme se na bod O z pohledu trojúhelníku ABD. Máme $|OA| = |OB|$. Dále velikost úhlu AOB (konvexního nebo nekonvexního) je rovna dvojnásobku velikosti úhlu při D. Jelikož leží ve „správné“ polorovině vzhledem k přímce AB, musí jít o střed kružnice opsané ABD, tedy i celému čtyřúhelníku.]

N4. Je dán ostrý úhel XAY a uvnitř něho bod P. Nechť P_1, P_2 jsou obrazy bodu P v osové souměrnosti podle jednotlivých ramen AX, AY úhlu XAY. Dokažte, že $|\sphericalangle P_1AP_2| = 2|\sphericalangle XAY|$. [Označme $|\sphericalangle XAP| = \alpha$ a $|\sphericalangle PAY| = \beta$. Potom $|\sphericalangle XAY| = \alpha + \beta$. Díky osové souměrnosti platí $|\sphericalangle P_1AX| = \alpha$ a $|\sphericalangle P_2AY| = \beta$. Je tedy opravdu $|\sphericalangle P_1AP_2| = 2(\alpha + \beta)$.]

D1. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť D, E, F jsou po řadě paty výšek na strany BC, CA, AB. Dokažte, že se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě. [Nechť H značí průsečík přímek BE a CF. Stačí dokázat, že přímka AH je kolmá na BC. Všimněme si, že body A, F, H, E leží na kružnici díky pravým úhlům při vrcholech E, F. Totéž platí i pro body B, C, E, F. Je tedy $|\sphericalangle HAE| = |\sphericalangle HFE| = |\sphericalangle CBE| = 90° - \gamma$. Z toho již plyne dokazovaná kolmost.]

[2] `https://kms.sk/248/plugin/attachments/download/393/`, strana 37, sekce 2.2.

D2. Označme H průsečík přímek z úlohy D1. Dokažte, že H je středem kružnice vepsané trojúhelníku DEF. [Díky symetrii stačí dokázat, že DH je osa vnitřního úhlu EDF. Jelikož DH a DB jsou kolmé, stačí dokázat, že DB je osa vnějšího úhlu EDF, tedy že $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC|$. Oba tyto úhly jsou ale rovny α, což je vidět z tětivových čtyřúhelníků $AFDC$, resp. $AEDB$ (ty jsou tětivové díky pravému úhlu nad tětivami AC, resp. AB).]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme D patu jeho výšky na stranu BC. Dokažte, že paty kolmic z D na zbývající strany a zbývající výšky leží v přímce. [Nechť P, Q, R jsou postupně kolmé průměty bodu D na AB, AC a výšku z vrcholu B, jejíž patu ještě označíme S. Čtyřúhelníky $BDRP$, $DQSR$, $ASDB$ jsou díky pravým úhlům tětivové. Z nich postupně vypočítáme $|\sphericalangle DRP| = 180° - \beta$ a $|\sphericalangle DRQ| = |\sphericalangle DSC| = \beta$. Body P, Q, R jsou tedy kolineární. Díky symetrii jsme hotovi.]

D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H a středem kružnice opsané O. Dokažte, že přímky AH, AO jsou souměrně sdružené podle osy vnitřního úhlu BAC (takové dvojice přímek se společným bodem A se nazývají *izogonální* vzhledem k danému úhlu BAC). [Snadno vypočteme, že $|\sphericalangle BAH| = 90° - \beta$. Z rovnoramenného trojúhelníku AOC a věty o obvodovém a středovém úhlu pak určíme, že $|\sphericalangle CAO| = 90° - \beta$, takže $|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAO|$, odkud již plyne dokazované tvrzení.]

D5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že polopřímky izogonální vzhledem k úhlu BAC (viz definici izogonality v předešlé úloze) protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodech různých od A, které jsou souměrně sdruženy podle osy úsečky BC. [Označme K a L průsečíky těchto přímek s kružnicí opsanou. Z definice izogonality máme $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$, takže tětivy BK a CL mají stejnou velikost, a tak body B, C, K, L tvoří rovnoramenný lichoběžník, z čehož už plyne dokazované tvrzení.]

3. *Najděte všechna nezáporná celá čísla m, n, pro něž platí $|4m^2 - n^{n+1}| \leqq 3$.*

(Tomáš Jurík)

Řešení. Vzhledem k tomu, že člen s n roste mnohem rychleji než člen s m, má smysl prozkoumat nejprve malé hodnoty m.

Pokud $m = 0$, je zkoumaný vztah ekvivalentní s nerovností $n^{n+1} \leqq 3$. Tomu zřejmě vyhovují $n = 0$ a $n = 1$, zatímco pro $n \geqq 2$ platí $n^{n+1} \geqq 8$. Dostáváme tak dvě řešení $(m, n) = (0, 0)$ a $(m, n) = (0, 1)$.

Pro $m = 1$ řešíme nerovnici $|4 - n^{n+1}| \leqq 3$. Vidíme, že $n = 0$ nevyhovuje, $n = 1$ vyhovuje a pro $n \geqq 2$ platí $|4 - n^{n+1}| = n^{n+1} - 4 \geqq 4$. Máme tedy řešení $(m, n) = (1, 1)$.

Dále už budeme předpokládat, že $m \geqq 2$, danou nerovnici přepíšeme ve tvaru rovnice $4m^2 = n^{n+1} + a$, kde a je (neznámé) celé číslo, jehož absolutní hodnota nepřevyšuje 3, a rozlišíme případy $a = 0$, $|a| \in \{1, 3\}$ a $|a| = 2$.

Rozeberme nejprve případ, kdy $4m^2 = n^{n+1}$. Na levé straně rovnice je kladné sudé číslo, které je navíc druhou mocninou celého čísla. Totéž musí platit i pro pravou stranu rovnice, takže číslo n musí být kladné a sudé: položme $n = 2k$. Potom $n^{n+1} = (2k)^{2k+1}$, a protože exponent $2k + 1$ je lichý, bude toto číslo druhou mocninou celého čísla, právě když jeho základ $2k$ bude druhou mocninou celého čísla neboli $2k = r^2$, kde r je kladné celé číslo, které zjevně musí být sudé. Je proto $r = 2l$, a tudíž $k = 2l^2$ a $n = 2k = 4l^2$, kde l je kladné celé číslo. Protože m je kladné, z rovnice $4m^2 = n^{n+1}$ po vydělení čtyřmi a odmocnění dostaneme

$$m = \sqrt{\frac{n^{n+1}}{4}} = \frac{\left(\sqrt{4l^2}\right)^{4l^2+1}}{2} = \frac{(2l)^{4l^2+1}}{2} = l \cdot (2l)^{4l^2}.$$

Pro každé kladné celé číslo l tak vychází, že dvojice $(m, n) = (l(2l)^{4l^2}, 4l^2)$ je řešením úlohy.

Uvažujme nyní případy $4m^2 = n^{n+1} \pm a$, kde $a \in \{1, 3\}$. Z faktu, že pravá strana rovnice musí být sudé číslo, plyne, že n^{n+1} musí být liché číslo, což znamená, že samo n je liché číslo. Položme $n = 2k + 1$, kde k je nezáporné celé číslo. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} 4m^2 &= n^{2k+2} \pm a, \\ (2m + n^{k+1})(2m - n^{k+1}) &= \pm a. \end{aligned}$$

Číslo $\pm a$ potřebujeme rozložit na součin dvou celých čísel, která v součtu dávají $(2m + n^{k+1}) + (2m - n^{k+1}) = 4m \geqq 8$ (použili jsme předpoklad $m \geqq 2$). Alespoň jedno z nich je tedy větší než 3, což nemůže nastat, protože mezi děliteli čísla $\pm a$ mohou být pouze čísla -3, -1, 1, 3.

Zbývá rozebrat poslední možnost $4m^2 = n^{n+1} \pm 2$. Z této rovnice plyne, že číslo n není nula a je sudé, takže jeho mocnina n^{n+1} s exponentem větším než 1 je dělitelná čtyřmi stejně jako $4m^2$ na levé straně rovnice. Vidíme, že požadovaná rovnost nemůže platit, proto v tomto případě žádné řešení nedostaneme.

Závěr. Všechna řešení úlohy jsou $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ a nekonečně mnoho dvojic tvaru $(m, n) = (l(2l)^{4l^2}, 4l^2)$, kde l je libovolné přirozené číslo.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že n^{n+1} je druhou mocninou přirozeného čísla. [Zjevně vyhovují všechna lichá čísla n, neboť tehdy je exponent $n + 1$ sudý. Pokud je n sudé, je exponent $n + 1$ lichý, takže i samo n musí být druhou mocninou celého čísla, tj. $n = 4k^2$ pro nějaké celé číslo k.]

N2. Najděte všechna řešení nerovnice $|x^2 - y^2| \leqq 2$, kde x, y jsou celá čísla. [Máme rovnici $(x - y)(x + y) = a$, kde $|a| \leqq 2$. Je tak buď $(x - y)(x + y) = 0$ a úloze vyhovují libovolné dvojice (x, x) a $(x, -x)$, kde x je celé, anebo $|x + y| = |x - y| = 1$, protože obě čísla $x - y$, $x + y$ mají zřejmě stejnou paritu. Snadno tak najdeme další čtyři vyhovující dvojice: $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.]

D1. Dokažte, že žádné číslo tvaru $4k + 2$, kde k je celé číslo, nelze zapsat jako rozdíl dvou druhých mocnin celých čísel. [Druhé mocniny celých čísel dávají při dělení 4 zbytky 0 a 1, rozdíl dvou z nich tedy může dát jen zbytek 0, 1 nebo $3 \equiv -1$.]

D2. Najděte všechna přirozená čísla x taková, že $x^2 + x - 2$ je mocnina dvou. [Platí $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, takže obě čísla $x - 1$ a $x + 2$ musejí být mocniny dvou. Jejich rozdíl je roven 3, tudíž jedna z těchto mocnin musí být lichá. Jediná možnost je $x - 1 = 2^0 = 1$ neboli $x = 2$, které opravdu vyhovuje, neboť $x^2 + x - 2 = 4$.]

D3. Najděte všechna přirozená x taková, že $x^2 + x + 1$ je druhou mocninou celého čísla. [Žádné takové číslo x neexistuje, neboť $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$.]

4. *Je dána množina* M *přirozených čísel s n prvky, kde n je liché číslo větší než jedna. Dokažte, že počet uspořádaných dvojic (p, q) různých prvků z* M *takových, že aritmetický průměr čísel p, q je prvkem* M*, je nejvýše $\frac{1}{2}(n - 1)^2$.*

(Martin Panák, Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Označme $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ prvky množiny M. Zvolme pevný index i. Pokud je prvek x_i aritmetickým průměrem prvků $x_j < x_k$, musí zřejmě platit $x_j < x_i < x_k$. Pro hodnotu j tak máme možnosti $1, \ldots, i - 1$ (těch je $i - 1$), zatímco pro hodnotu k máme možnosti $i + 1, i + 2, \ldots, n$ (těch je $n - i$). Navíc pokud je x_i aritmetickým průměrem různých dvojic $x_{j_1} < x_{k_1}$ a $x_{j_2} < x_{k_2}$, pak $j_1 \neq j_2$ a $k_1 \neq k_2$ (pokud by např. bylo $j_1 = j_2$, snadno bychom dostali $k_1 = k_2$, což je ve sporu s tím, že jde o různé dvojice). Každou z možných hodnot j či k proto můžeme vybrat nejvýše jednou, tudíž počet neuspořádaných dvojic p, q různých čísel z M, pro něž platí $x_i = \frac{1}{2}(p + q)$

s daným indexem i, je nejvýše $\min\{i-1, n-i\}$. S přihlédnutím k jejich požadovanému uspořádání je to pak dvojnásobek, $2\min\{i-1, n-i\}$.

Podle zadání je $n = 2k+1$, kde k je přirozené číslo. Sečtením našich odhadů pro všechny indexy $i = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme, že hledaný počet dvojic je nejvýše

$$\begin{aligned}2(\min\{0, 2k\} + \min\{1, 2k-1\} + \ldots + \min\{k, k\} + \ldots + \min\{2k, 0\}) =\\ = 2(0 + 1 + \ldots + (k-1) + k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 + 0) =\\ = 2(1 + (k-1)) + 2(2 + (k-2)) + \ldots + 2((k-1) + 1) + 2k = k \cdot 2k.\end{aligned}$$

Tím pádem jsme hotovi, protože $\frac{1}{2}(n-1)^2 = 2k^2$.

Poznámka 1. Pokud $n = 2k$, zjistíme, že počet zkoumaných dvojic je nejvýše

$$2(\min\{0, 2k-1\} + \min\{1, 2k-2\} + ... + \min\{2k-1, 0\}) = 2k(k-1).$$

Snadno ověříme, že jednotný vzorec pro zápis obou případů je $\binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část čísla x.

Poznámka 2. Zkoumaný odhad nelze obecně zlepšit, jak dosvědčuje příklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Stejná množina funguje i pro sudá n (viz poznámku 1).

Poznámka 3. V řešení jsme nikde nepoužili, že v uvažované množině M jsou přirozená čísla. Uvedené řešení funguje i pro n-prvkovou množinu reálných čísel.

Poznámka 4. Odhad počtu dvojic z tvrzení úlohy platí pro jakoukoli množinu M kladných reálných čísel i v případě, kdy aritmetický průměr dvou čísel p, q zaměníme jiným ze známých průměrů (kupř. geometrickým $\sqrt{pq}$ nebo harmonickým $2pq/(p+q)$). Je možné dokazovat stejný odhad i pro nesymetrické průměry, jakým je např. vážený průměr $\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q$, jen počet uspořádaných dvojic pak nelze počítat jako dvojnásobek počtu dvojic neuspořádaných.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pokud $p < q$, leží aritmetický průměr čísel p a q v intervalu (p, q). [Je třeba ověřit nerovnosti $p < (p+q)/2$ a $(p+q)/2 < q$. Obě jsou ekvivalentní s $p < q$.]

N2. Jsou dána čtyři přirozená čísla $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Může být číslo x_2 aritmetickým průměrem dvou různých (neuspořádaných) dvojic z těchto čísel? [Ne. Aby bylo x_2 průměrem nějakých dvou čísel, muselo by jedno z nich být menší než x_2, zatímco druhé by bylo větší. Jediný kandidát na menší číslo je x_1. Pokud by ale platilo $x_2 = (x_1+x_3)/2$ a $x_2 = (x_1 + x_4)/2$, měli bychom $x_3 = x_4$, což je ve sporu s předpokladem.]

N3. Je dána množina čísel $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kolik dvojic čísel $p < q$ z této množiny splňuje, že číslo $(p+q)/2$ je jedním z prvků množiny? [Čísla 1 a 5 zřejmě nejsou průměrem žádných dvou čísel. Čísla 2 a 4 jsou průměry dvojic $(1, 3)$ resp. $(3, 5)$. Konečně číslo 3 je průměrem dvojic $(1, 5)$ a $(2, 4)$. Dohromady máme čtyři dvojice.]

D1. Dokažte, že pro sudé n je maximální počet dvojic zkoumaných úlohou roven $\frac{1}{2}n(n-2)$.

D2. Pro každé přirozené n (sudé i liché) najděte příklad množiny, pro niž je počet zkoumaných dvojic maximální.

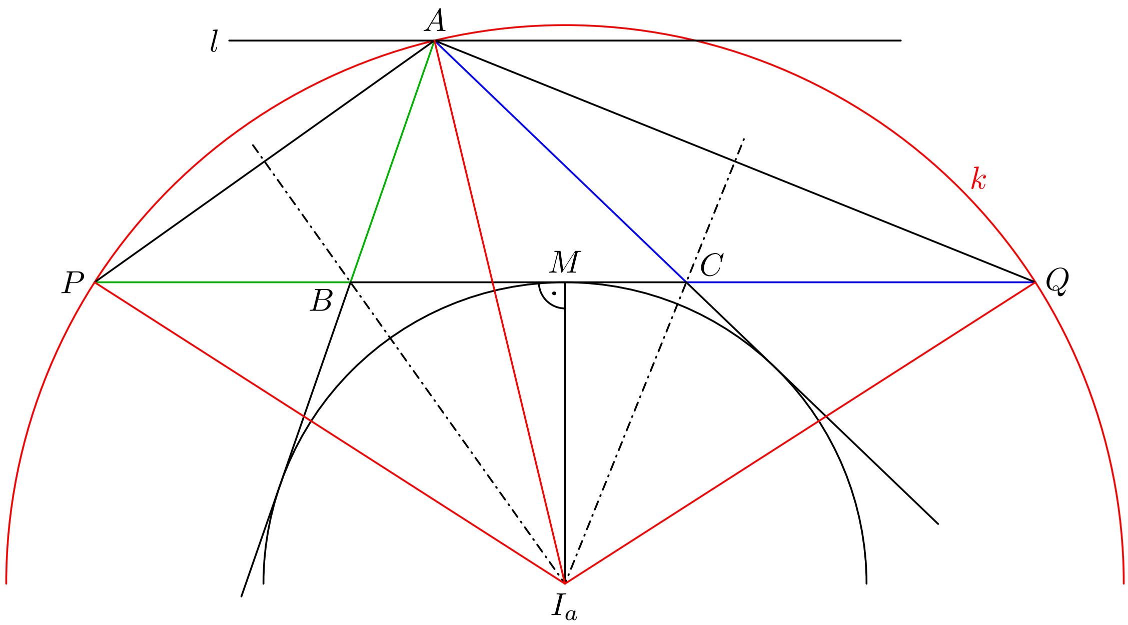
D3. Zůstane tvrzení úlohy v platnosti, i když místo množiny přirozených čísel uvažujeme množinu reálných čísel?

D4. Zůstane tvrzení v platnosti, i když nahradíme aritmetický průměr geometrickým?

5. *Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho obvod o, poloměr ϱ kružnice připsané ke straně BC a velikost výšky v na tuto stranu. Proveďte diskusi v závislosti na daných délkách.* (Patrik Bak)

Řešení. Označme P bod ležící na polopřímce opačné k polopřímce BC takový, že $|BP| = |BA|$. Analogicky označme Q bod ležící na polopřímce opačné k polopřímce CB takový, že $|CQ| = |CA|$. Úsečka PQ má pak délku rovnou velikosti obvodu o trojúhelníku ABC.

Dále označme I_a střed kružnice připsané ke straně BC trojúhelníku ABC (obr. 4). Přímka I_aB je proto osou úhlu ABP. A protože trojúhelník ABP je rovnoramenný, je to zároveň osa úsečky AP. Bod I_a tedy leží na ose úsečky AP a obdobně i na ose úsečky AQ, což znamená, že bod I_a je středem kružnice opsané trojúhelníku APQ, a leží tak i na ose jeho třetí strany PQ. Její střed M je proto kolmým průmětem bodu I_A na PQ, a tudíž je zároveň i dotykovým bodem kružnice připsané ke straně BC.



Obr. 4

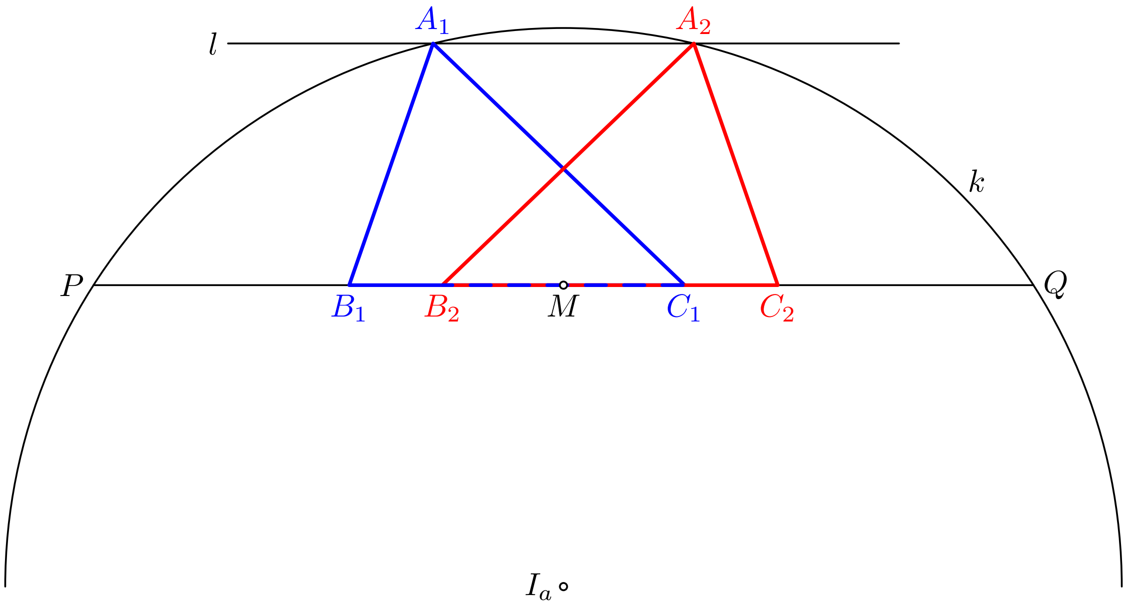
Z předešlého *rozboru* už vyplývá *konstrukce*. Nejprve sestrojíme úsečku PQ délky o a její střed M. Následně můžeme sestrojit bod I_a, neboť $|MI_a| = \varrho$ a $MI_a \perp PQ$. Poté najdeme bod A, který leží jednak na kružnici $k(I_a, |I_aP|)$ (neboť I_a je středem kružnice opsané trojúhelníku APQ) a jednak na přímce l rovnoběžné s PQ ve vzdálenosti v, která leží v polorovině opačné k PQI_a. Pomocí nalezených bodů A dovedeme sestrojit body B a C různými způsoby — například jako průsečíky os úseček AP a AQ s úsečkou PQ. Tyto průsečíky budou pro každý sestrojený bod A existovat a budou ležet na úsečce PQ ve „správném" pořadí, protože trojúhelník APQ je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A (střed I_a jeho kružnice opsané leží v polorovině opačné k polorovině PQA).

Nyní dokážeme, že takto sestrojené body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku, který má všechny požadované vlastnosti. Jelikož body B a C leží na osách úseček AP a AQ, platí $|AB| = |PB|$ a $|CA| = |CQ|$, takže $|AB| + |BC| + |CA| = |PB| + |BC| + |CQ| = |PQ| = o$. Bod A byl nalezen na přímce l, proto z její definice plyne, že vzdálenost A od BC je opravdu v. Konečně bod I_a je středem kružnice k opsané trojúhelníku APQ, takže leží na osách úseček AP a AQ, které jsou ale z rovnoramennosti ABP a ACQ

totožné s osami vnějších úhlů ABC a ACB, proto I_a je opravdu středem kružnice připsané ke straně BC trojúhelníku ABC. Navíc je I_a sestrojen tak, že jeho vzdálenost od PQ je rovna ϱ. Sestrojený trojúhelník ABC tak splňuje podmínky ze zadání.

Zbývá provést *diskusi* počtu řešení. Zajímá nás počet vyhovujících trojúhelníků ABC, z nichž žádný není obrazem jiného ve shodnosti, v níž by si jejich vrcholy odpovídaly podle písmen, kterými jsou označeny. Po sestrojení bodů P, Q máme dvě možné polohy pro bod I_a. Těm však budou odpovídat shodná řešení souměrně sdružená podle PQ, proto uvažujme jen jednu z těchto poloh. Následně určíme bod A jako průsečík kružnice k a přímky l.

Označme r poloměr kružnice k ($r = |I_aP| = |I_aQ|$). Vzdálenost bodu I_a od přímky l je rovna $\varrho + v$. Proto pokud $r > \varrho + v$, dostaneme dva různé průsečíky A_1 a A_2. Těm zřejmě budou odpovídat dva různé trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ (obr. 5), jež budou navzájem souměrně sdružené podle osy úsečky PQ, kterou je přímka MI_a. V tom případě má úloha dvě řešení.[3]



Obr. 5

Pokud $r = \varrho + v$, bude přímka l tečnou kružnice k, takže dostaneme jediný bod A a jediný vyhovující trojúhelník ABC (který ze symetrie bude navíc rovnoramenný).

Konečně pokud $r < \varrho + v$, pak žádný průsečík nedostaneme. Hodnotu r lze z pravoúhlého trojúhelníku PMI_a vyjádřit pomocí o a ϱ jako $\sqrt{|MI_a|^2 + |PM|^2} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{4}o^2}$. Výsledky můžeme shrnout do tabulky:

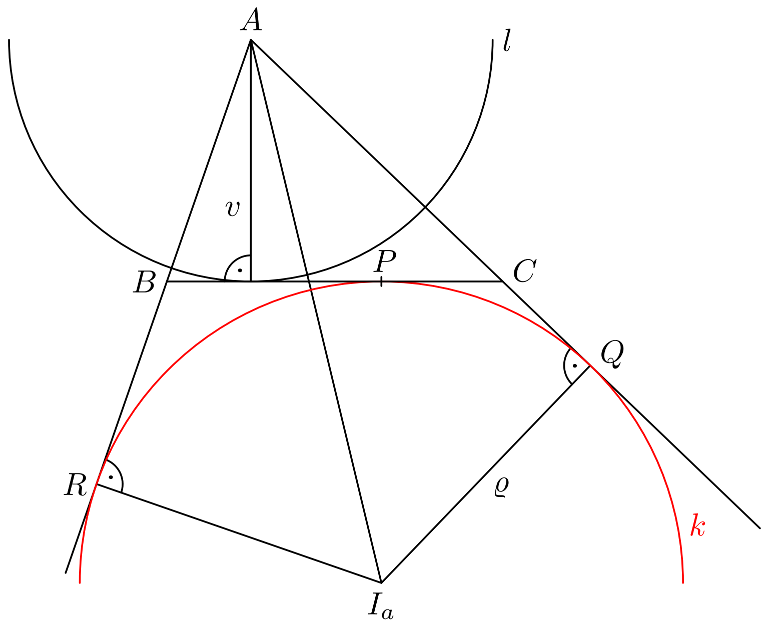
$$\begin{aligned} \sqrt{\varrho^2 + \tfrac{1}{4}o^2} &> \varrho + v\colon && 2 \text{ řešení} \\ \sqrt{\varrho^2 + \tfrac{1}{4}o^2} &= \varrho + v\colon && 1 \text{ řešení} \\ \sqrt{\varrho^2 + \tfrac{1}{4}o^2} &< \varrho + v\colon && 0 \text{ řešení} \end{aligned}$$

Poznámka. Závěrečná tabulka ukazuje, že v každém trojúhelníku ABC platí nerovnost $\sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{4}o^2} \geqq \varrho + v$. Ta se dá po umocnění napsat do hezčího ekvivalentního tvaru

[3] Oba trojúhelníky jsou sice nepřímo shodné, ale s odlišným pořadím vrcholů!

$o^2 \geqq 4v(2\varrho + v)$. Tato nerovnost se dá též dokázat pomocí známých vztahů $v = 2S/a$, $\varrho = 2S/(b + c - a)$ a Heronova vzorce $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, kde S označuje obsah trojúhelníku ABC. Po sérii ekvivalentních úprav totiž vyjde nerovnost $(b - c)^2 \geqq 0$.

Jiné řešení. Označme I_a střed kružnice k připsané ke straně BC a P, Q, R po řadě její dotykové body s přímkami BC, CA, AB. Pak zřejmě platí $|AQ| = |AR|$ a $|AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = |AB| + |BC| + |CA| = o$, takže obě úsečky AQ, AR mají délku $\frac{1}{2}o$. Uvažujme dále kružnici $l(A, v)$, jež se zřejmě dotýká přímky BC v patě výšky z vrcholu A. Přímka BC je tak společná (vnitřní) tečna kružnic k a l (obr. 6). Po tomto rozboru se můžeme hned pustit do popisu konstrukce.

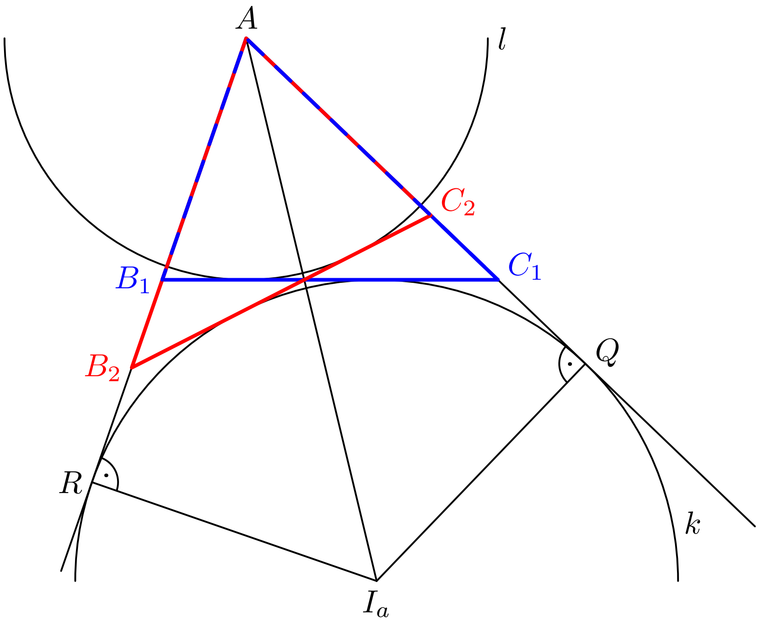


Obr. 6

Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník AQI_a s pravým úhlem při vrcholu Q, v němž známe délky odvěsen $|AQ| = \frac{1}{2}o$ a $|QI_a| = \varrho$. Analogické vlastnosti má i pravoúhlý trojúhelník ARI_a, takže snadno sestrojíme i bod R, například jako obraz bodu Q v osové souměrnosti dle přímky AI_a. Dále sestrojíme kružnice k a l. Body B a C pak najdeme jako průsečíky úseček AQ a AR s libovolnou ze společných vnitřních tečen kružnic k a l (jejich konstrukce je dobře známá školská úloha).

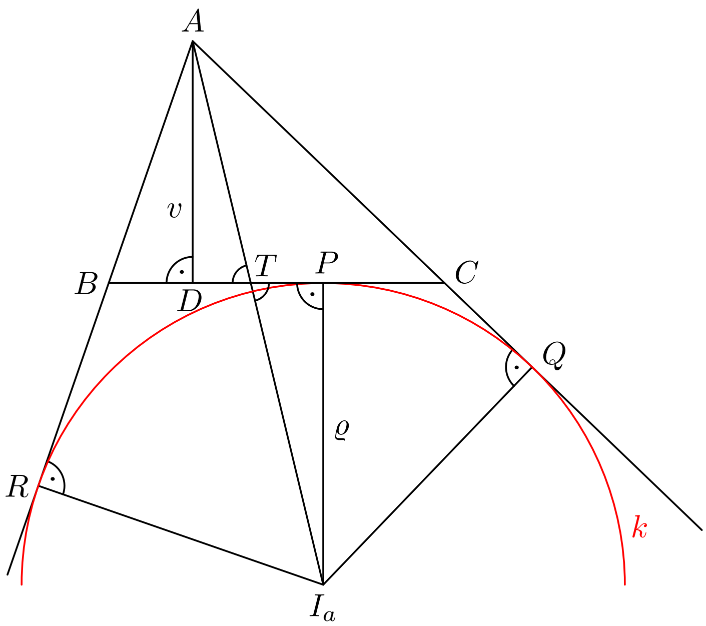
Ověřme, že takto sestrojený trojúhelník ABC splňuje podmínky ze zadání. Protože se přímka BC dotýká kružnice l (ta má střed v A), je vzdálenost bodu A od přímky BC rovna v. Kružnice k se zřejmě dotýká všech tří přímek AB, BC, CA, a protože body I_a a A leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce BC, musí jít o kružnici připsanou straně BC (a její poloměr je tak opravdu ϱ). Konečně z úvodního výpočtu plyne, že obvod trojúhelníku ABC je roven dvojnásobku délky úsečky AQ, tedy o.

Už stačí jen provést diskusi počtu řešení. Trojúhelník AQI_a můžeme sestrojit vždy, bod R je pak určen jednoznačně a totéž samozřejmě platí i o kružnicích k a l. Označme $r = |AI_a|$. Pokud $r > \varrho + v$, kružnice k a l nemají společný bod (a zřejmě žádná z nich „neobsahuje druhou“), takže existují právě dvě společné vnitřní tečny, kterým odpovídají dvojice bodů B_1, C_1 a B_2, C_2 (obr. 7). Trojúhelníky AB_1C_1 a AB_2C_2 (při takovém pořadí vrcholů) zřejmě nejsou shodné, takže v tom případě máme dvě řešení. Pokud $r = \varrho + v$, pak se kružnice k a l dotýkají, tudíž existuje právě jedna vnitřní společná tečna obou kružnic, jíž odpovídá jediný vyhovující trojúhelník ABC. Konečně pokud $r < \varrho + v$, pak společné vnitřní tečny neexistují, a tak úloha nemá řešení. Hodnota r je přitom z pravoúhlého trojúhelníku AQI_a rovna $\sqrt{|QI_a|^2 + |AQ|^2} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{4}o^2}$, takže dostáváme stejný výsledek diskuse jako v předešlém řešení.



Obr. 7

Jiné řešení. Stručně ukážeme ještě jiný způsob, jak dokončit předešlé řešení. Označme T průsečík AI_a a BC a dále D patu výšky z vrcholu A. Trojúhelníky TAD, TI_aP jsou podobné (podle věty uu, neboť jsou pravoúhlé a sdílejí vrcholový úhel, obr. 8). Platí tedy $|I_aT| : |TA| = |I_aP| : |AD| = \varrho : v$. Po sestrojení čtyřúhelníku AQI_aR proto



Obr. 8

můžeme sestrojit bod T jako (jediný) bod úsečky I_aA, jenž ji dělí v daném poměru z předchozí věty. Body B a C následně najdeme jako průsečíky kterékoli z tečen z bodu T ke kružnici k s úsečkami AR a AQ. Při důkazu správnosti konstrukce zpětně využijeme podobnost trojúhelníků $TAD \sim TI_aP$ na důkaz toho, že $|AD| = v$.

Diskuse počtu řešení pak závisí na poloze bodu T vzhledem ke kružnici k. Pokud označíme $r = |I_aA|$, není těžké vypočítat, že $|I_aT| = \varrho \cdot r/(\varrho + v)$. Pokud $|I_aT| > \varrho$, leží bod T ve vnější oblasti kružnice k, takže existují dvě tečny z bodu T ke k, které odpovídají dvěma řešením. V případě $|I_aT| = \varrho$ je tato tečna jediná, zatímco v případě $|I_aT| < \varrho$ leží bod T ve vnitřní oblasti kružnice k, takže se z něj tečna ke k vést nedá. Snadno se přesvědčíme, že nalezené podmínky odpovídají podmínkám z předešlých řešení.

Poznámka. Bod T popsaný v tomto řešení je zřejmě středem stejnolehlosti se záporným koeficientem, která zobrazuje k na l (kde l je kružnice z předešlého řešení). Sestrojit tento bod je prvním krokem jedné z možných konstrukcí společných vnitřních tečen kružnic k a l.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán trojúhelník ABC. Uvažujme kružnici připsanou straně BC tohoto trojúhelníku a označme P, Q, R dotykové body této kružnice s přímkami BC, CA, AB. Dokažte, že velikost úsečky $|AQ|$ je rovna polovině obvodu trojúhelníku ABC. [Zřejmě $|AQ| = |AR|$ a platí $|AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = |AB| + |BC| + |CA|$, odkud plyne dokazované tvrzení.]

N2. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 se středy v bodech O_1, O_2, které nemají společný bod a žádná neleží ve vnitřní oblasti druhé. Připomeňte si, jak sestrojit společné vnitřní tečny těchto kružnic. [Tyto tečny se protínají ve středu stejnolehlosti se záporným koeficientem, která převádí jednu kružnici na druhou. Stačí najít tento střed a sestrojit z něj tečny. Tento střed najdeme například takto: Vezmeme body $P \in k_1$, $Q \in k_2$ takové, že $PO_1 \parallel QO_2$, přičemž P, Q leží v navzájem opačných polorovinách vzhledem k O_1O_2. Hledaný střed stejnolehlosti je pak průsečíkem přímek O_1O_2 a PQ. Jiný postup konstrukce společných vnitřních tečen daných kružnic $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ plyne z toho, že tyto přímky jsou zřejmě rovnoběžné s tečnami z bodu O_2 k pomocné kružnici $k_1'(O_1, r_1 + r_2)$, které snadno sestrojíme užitím Thaletovy kružnice s průměrem O_1O_2.]

N3. Sestrojte trojúhelník ABC, pokud znáte jeho obvod, výšku na stranu BC a velikost úhlu α. [Označme P a Q body na polopřímkách opačných k BC a CB takové, že $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Z rovnoramenných trojúhelníků BAP a CAQ snadno spočítáme, že $|\sphericalangle BAP| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle CAQ| = \frac{1}{2}\gamma$. Tím pádem $|\sphericalangle PAQ| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \alpha = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. V trojúhelníku APQ známe stranu PQ, úhel při vrcholu A a také výšku na stranu PQ, takže ho umíme sestrojit. Body B, C následně najdeme jak průsečíky strany PQ a os úseček AP a AQ.]

D1. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice mu vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB v bodech P, Q, R. Dokažte, že $|AQ| = s - a$, kde $a = |BC|$ a s je polovina obvodu trojúhelníku ABC (další dvě rovnosti analogicky). [Postupujeme podobně jako v úloze N1. Platí $|AQ| = |AR|$ a $|AQ| + |AR| = |AB| - |BR| + |AC| - |CQ| = |AB| - |BP| + |AC| - |CP| = |AB| + |AC| - |BC|$, z čehož již plyne dokazované tvrzení.]

D2. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A je poloměr kružnice vepsané roven $s - a$, kde $a = |BC|$ a s je polovina obvodu ABC. [Označme I střed jeho vepsané kružnice a P, Q dotykové body s odvěsnami AB, AC. Čtyřúhelník $APIQ$ je čtverec, takže $|IQ| = |AP|$. Z výsledku úlohy D1 plyne, že $|AP| = s - a$.]

D3. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice mu vepsaná se dotýká strany BC v bodě D. Kružnice připsaná jeho straně BC se jí dotýká v bodě E. Dokažte, že D, E jsou souměrně sdruženy podle středu BC. [Z úlohy D1 víme, že $|BD| = s - b$. Zbývá dokázat, že $|CE| = s - b$. Pokud označíme F dotykový bod připsané kružnice s přímkou AC, pak podle úlohy N1 máme $|AF| = s$. Je tedy $|CE| = |CF| = |AF| - |AC| = s - b$.]

D4. Dokažte, že v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ je součet velikostí jeho protilehlých stran stejný. [Předpokládejme, že čtyřúhelník je tečnový, a označme po řadě P, Q, R, S dotykové body vepsané mu kružnice se stranami AB, BC, CD, DA. Potom $|AB| + |CD| = |AP| + |PB| + |CR| + |RD| = |AS| + |BQ| + |CQ| + |DS| = |BC| + |AD|$.]

D5. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice k mu vepsaná se dotýká strany BC v bodě D. Nechť E je obraz bodu D ve středové souměrnosti podle středu BC. Úsečka AE protíná kružnici k ve dvou bodech, označme F ten, který je blíže k bodu A. Dokažte, že $DF \perp$ $\perp BC$. [Podle úlohy D3 je bod E dotykový bod kružnice l připsané straně BC. Nechť I_a je střed této kružnice a I střed kružnice k. Bod A je středem stejnolehlosti, která zobrazuje l na k. V této stejnolehlosti se E zobrazuje na F, takže $IF \parallel I_aE$. Jenže I_aE je přímka kolmá na BC.]

6. *Na hrací desce je nakreslen pravidelný n-úhelník s jedním vrcholem vyznačeným jako past. Tom a Jerry hrají následující hru. Na počátku Jerry postaví figurku na některý vrchol n-úhelníku. V každém kroku pak Tom řekne nějaké přirozené číslo a Jerry posune figurku o tento počet vrcholů podle své volby buď ve směru, anebo proti směru chodu hodinových ručiček. Najděte všechna $n \geqq 3$, při kterých může Jerry tahat figurkou tak, aby nikdy neskončila v pasti. Jak se změní odpověď, když je Tom k desce otočen zády, zná jen dané n a nevidí, kam Jerry figurku na počátku postaví ani kam s ní v jednotlivých krocích táhne?* (Pavel Calábek)

Řešení. Nejprve očíslujme vrcholy postupně v jednom směru $0, 1, \ldots, n-1$ tak, aby ve vrcholu 0 byla past. Pokud stojí figurka na vrcholu a a Tom řekne číslo b, pak vrcholy, v nichž po tomto tahu může být figurka, odpovídají zbytkům čísel $a-b$ a $a+b$ při dělení číslem n — tyto zbytky budeme označovat jako $(a-b)_n$, resp. $(a+b)_n$.

Předpokládejme nejprve, že n má lichého dělitele d většího než 1. Dokážeme, že pak může Jerry táhnout figurkou tak, aby nikdy neskončila v pasti. Jeho strategie bude následující:

Na začátku položí figurku na libovolný vrchol, který není dělitelný d,[4] a dál bude vybírat směr posunu figurky tak, aby nikdy neskončila na vrcholu s číslem dělitelným d. Dokážeme, že takovou možnost má Jerry vždy, tudíž jeho figurka nikdy neskončí v pasti, neboť její číslo 0 je dělitelné d.

Pokud je figurka na vrcholu s číslem a nedělitelným d a Tom řekne číslo b, pak aspoň jedno z čísel $p = (a+b)_n$ nebo $q = (a-b)_n$ není dělitelné d. Pro vhodná celá čísla p', q' je totiž $a + b = p'n + p$ a $a - b = q'n + q$ a sečtením obou rovností dostaneme $2a = n(p' + q') + (p+q)$. Pokud by obě čísla p a q byla dělitelná d, byla by pravá strana poslední rovnosti dělitelná d (d dělí n), zatímco číslo $2a$ na levé straně dělitelné číslem d není (d je dle předpokladu liché číslo, jež nedělí a). Alespoň jeden ze dvou možných Jerryho tahů je tedy takový, že se figurka posune na vrchol s číslem nedělitelným d, a tím pádem nikdy neskončí v pasti.

Zbývá tedy vyšetřit případ, kdy n nemá lichého dělitele, je tudíž $n = 2^k$ pro nějaké přirozené číslo $k \geqq 2$. Dokážeme, že v tomto případě Tom po konečném počtu tahů dokáže dostat figurku do pasti.

Pro jednodušší vyjadřování budeme říkat, že vrchol n-úhelníku, který není past, má stupeň b, bude-li 2^b nejvyšší mocnina čísla 2, která ještě dělí jeho nenulové číslo.

Nyní popíšeme Tomovu strategii pro $n = 2^k$, když vidí pozici figurky. Předpokládejme, že figurka je aktuálně na vrcholu stupně p. Takový vrchol má číslo $2^p q$, kde q je liché. V takovém případě Tom řekne 2^p. Dokážeme, že díky tomu dostane figurku buď do pasti, nebo na vrchol, jehož stupeň bude vyšší než p. To už Tomovi zaručí, že po konečném počtu kroků vyhraje, neboť všechny vrcholy mají čísla menší než $n = 2^k$, tudíž jejich stupně jsou menší než k, a tak se stupeň vrcholu, kam figurka táhne, nemůže pořád jen zvětšovat.

[4] Takovou vlastnost má pro libovolné $d > 1$ například vrchol s číslem 1.

Díky Tomovu tahu 2^p figurka skončí na vrcholu s číslem $r = (2^p(q \pm 1))_n$, přičemž znaménko odpovídá směru, kterým Jerry figurkou táhl. Pokud $r = 0$, je figurka v pasti. Pokud $r \neq 0$, můžeme psát $2^p(q \pm 1) = nr' + r$. Číslo $q \pm 1$ je v každém případě sudé, takže levá strana uvedeného vztahu je dělitelná číslem 2^{p+1}. A protože $p \leqq k - 1$, dělí mocnina 2^{p+1} i číslo $n = 2^k$, tudíž dělí i druhý sčítanec r z pravé strany. Jelikož $r \neq 0$, znamená to, že stupeň vrcholu s číslem r je vyšší než p. To jsme potřebovali zdůvodnit.

Nyní dokážeme, že pro $n = 2^k$ svede Tom po konečném počtu kroků dostat figurku do pasti, aniž by její pozici viděl. Jeho strategie se v předchozím případě opírala o znalost stupně jejího vrcholu. Aby se tohoto problému zbavil, potřebuje především mít pro každou možnou hodnotu p stupně jejího vrcholu připravenu strategii (posloupnost tahů), která mu zaručí úspěch — takovou posloupnost tahů označme $S(p)$. Dohodněme se ještě, že „tahem b“ v těchto strategiích nazveme Tomův krok, kdy řekne právě dotyčné číslo b.

Zamysleme se nyní nad tím, jak mají vypadat jednotlivé strategie $S(p)$. Použijeme přitom poučení z předešlé části, kde jsme dokázali, že pokud při figurce na vrcholu stupně p Tom použije tah 2^p, přejde následně figurka buď do pasti, nebo na vrchol stupně vyššího než p.

Je jasné, že strategie $S(k-1)$ spočívá v jediném tahu 2^{k-1}. Vrchol stupně $k-1$ je totiž jediný a má číslo $\frac{1}{2}n = 2^{k-1}$, takže po tahu 2^{k-1} se z něj figurka (libovolným směrem) přemístí do pasti.

Podobně strategie $S(k-2)$ začíná tahem 2^{k-2}. To Tomovi buď zaručí výhru, nebo se figurka dostane na vrchol s vyšším stupněm, tedy nutně na vrchol stupně $k-1$. Proto pokud po tahu 2^{k-2} Tom použije strategii $S(k-1)$, určitě vyhraje, protože $S(k-1)$ je z definice vítězná strategie pro vrchol stupně $k-1$.

Analogicky strategie $S(k-3)$ začne tahem 2^{k-3}. Tento tah Tomovi buď přinese výhru, nebo dostane figurku na vrchol stupně $k-1$, anebo na vrchol stupně $k-2$. Pro obě tyto možnosti již sice má Tom strategii, neví však, která z nich nastala. Klíčové pozorování je však toto:

Strategie $S(k-1)$ buď zafunguje, nebo nezmění stupeň vrcholu. Skutečně, pokud je figurka na vrcholu stupně $k-2$, tj. na vrcholu s číslem tvaru $2^{k-2}q$ (kde q je liché), pak vrchol po provedení strategie $S(k-1)$ (obsahující pouze tah 2^{k-1}) bude mít číslo $r = (2^{k-2}(q \pm 2))_n$. Z vyjádření $2^{k-2}(q \pm 2) = nr' + r$ totiž vidíme, že 2^{k-2} dělí r (jelikož dělí levou stranu uvedeného vztahu i $n = 2^k$), zatímco 2^{k-1} už r nedělí (neboť $q \pm 2$ je liché), a to znamená, že vrchol s číslem r má stupeň $k-2$.

Díky tomu vidíme, že po tahu 2^{k-3}, který nevedl k vítězství, má vždy smysl použít strategii $S(k-1)$. Pokud je figurka na vrcholu stupně $k-1$, je vítězná. V opačném případě je na vrcholu stupně $k-2$, a to i po provedení strategie $S(k-1)$, takže následné provedení strategie $S(k-2)$ zaručí, že Tom figurku dostane do pasti.

Uvědomme si, že naše klíčové pozorování vychází ze všeobecného faktu, že pokud je figurka na vrcholu stupně p, pak po provedení tahu $2^{p'}$, kde $p' > p$, zůstane figurka na vrcholu stupně p. To dokážeme podobně: Je-li figurka na vrcholu s číslem $2^p q$, kde q je liché, pak po tahu $2^{p'}$ je na vrcholu s číslem $r = (2^p(q + 2^{p'-p}))_n$, platí tedy $2^p(q + 2^{p'-p}) = nr' + r$, takže 2^p dělí levou stranu a také n, z čehož plyne, že dělí i r, avšak 2^{p+1} nedělí levou stranu a dělí n, proto nemůže dělit r, z čehož už plyne, že r je číslo vrcholu stupně p.

Nyní jsme připraveni formálně popsat strategii $S(p)$, kde p je dané celé číslo splňující $0 \leqq p \leqq k-1$. Tuto strategii definujeme sestupnou matematickou indukcí:

(i) $S(k-1)$ sestává z tahu 2^{k-1}.

(ii) Pokud celé l splňuje $0 \leqq l \leqq k-2$, definujme, že $S(l)$ sestává z tahu 2^l následovaného tahy ze strategií $S(k-1), S(k-2), ..., S(l+1)$.

Všimněme si, že z této definice vyplývá, že strategie $S(p)$ sestává pouze z tahů tvaru 2^t, kde $t \geqq p$. To můžeme formálně dokázat sestupnou matematickou indukcí:

Pokud $p = k-1$, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že je dané p takové, že tvrzení platí pro čísla $k-1, k-2, \ldots, p+1$. Dokážeme, že pak platí i pro p. Strategie $S(p)$ sestává z tahu 2^p (pro který dokazované tvrzení zřejmě platí), a z tahů ze strategií $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(p+1)$. Z indukčního předpokladu máme, že pro každé l splňující $k-1 \geqq l \geqq p+1$ strategie $S(l)$ obsahuje pouze tahy tvaru 2^t, kde $t \geqq l$. Jelikož $l \geqq p+1$, je $t \geqq p+1 \geqq p$. Všechny tyto tahy jsou tedy požadovaného tvaru, což dokazuje tvrzení pro p, čímž je důkaz indukcí hotov.

Připomeňme naše pozorování, které říká, že pokud je figurka na vrcholu stupně p a my uděláme tah $2^{p'}$, kde $p' > p$, bude figurka opět na vrcholu stupně p. Díky němu dostáváme, že aplikováním celé strategie $S(p')$, jež sestává pouze z požadovaných tahů, se tato skutečnost nezmění.

Díky tomu vidíme, že strategie $S(p)$ opravdu dostane figurku do pasti, pokud na začátku stojí na vrcholu stupně p. Formálně to dokážeme sestupnou matematickou indukcí:

Pro $p = k-1$ jsme to zdůvodnili už předtím. Předpokládejme, že je číslo p je takové, že tvrzení platí pro čísla $k-1, k-2, \ldots, p+1$. Dokážeme, že pak platí i pro p. Předpokládejme, že jsme na vrcholu stupně p. Po aplikování prvního tahu 2^p je figurka buď v pasti, nebo se dostane na vrchol stupně p', kde $p' > p$. V druhém případě strategie $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(p'+1)$ nezmění fakt, že jsme na vrcholu stupně p', a následně strategie $S(p')$ z indukčního předpokladu zafunguje a dostane figurku do pasti. Důkaz indukcí je tedy hotov.

Poslední krok, který zbývá, je definovat Tomovu finální strategii. Ta bude sestávat z postupného provedení strategií $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(0)$. Nyní už snadno zdůvodníme, že tato posloupnost strategií bude vždy úspěšná — je-li totiž figurka na začátku na vrcholu stupně h, pak strategie $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(h+1)$ tento fakt nezmění a následně zafunguje strategie $S(h)$. Tím je ukončena poslední část úlohy.

Závěr. Pro n, které je mocninou dvou, má vyhrávající strategii Tom, přičemž nemusí vidět pozici figurky. Pro všechna ostatní n má vyhrávající strategii Jerry.

Poznámka. Kdyby Tom kromě toho, že nevidí figurku, neznal ani číslo n, pak by v případě, že n je mocnina dvou, mohl i tak vyhrát v konečném čase. Stačilo by mu zkoušet postupně svou strategii pro všechny mocniny dvou.

Poznámka. Vraťme se ještě k případu, kdy n není mocnina dvou, tj. je tvaru $2^k l$, kde $l > 1$ je liché. Z našeho řešení vyplývá, že všechny počáteční pozice, pro které Jerryho strategie nefunguje, jsou násobky l. V těchto pozicích opravdu vyhrává Tom, přičemž nemusí vidět pozici figurky — stačí již popsanou strategii modifikovat tak, že všude, kde je tah 2^a, bude tah $2^a l$.

Jiné řešení. Ukážeme jiné řešení v případech, kdy Tom vidí figurku. Úlohu si můžeme přeformulovat tak, že hrajeme na celočíselné ose, přičemž pasti jsou čísla dělitelná n (jiná čísla než celá v našem řešení neuvažujeme). Číslo nazveme *špatné*, pokud existuje posloupnost tahů, která dostane na něm stojící figurku do pasti, ať hraje Jerry jakkoli. Všechna ostatní čísla nazveme *dobrá*. Z definice jsou všechna čísla dělitelná n špatná.

Uvědomme si, že Jerry má vyhrávající strategii, právě když existuje alespoň jedno dobré číslo a. V tom případě mu stačí položit figurku na ně. Ať už Tom řekne jakékoli číslo, je alespoň jedno z obou čísel, na které se figurka může přemístit, dobré, protože v opačném případě by z definice špatného čísla platilo, že číslo a je špatné, což je spor. Pokud jsou naopak všechna čísla špatná, tak z jejich definice jsou všechny možné pozice figurky pro Jerryho prohrávající.

Dále platí, že pokud jsou dvě různá čísla a a b špatná a číslo $(a+b)/2$ je celé, je špatné. Skutečně, pokud je $(a+b)/2$ celé, mají čísla a a b stejnou paritu, takže i číslo $(b-a)/2$ je celé. Tah $(b-a)/2$ dostane figurku z čísla $(a+b)/2$ na jedno z čísel a nebo b, takže číslo $(a+b)/2$ je opravdu špatné. Naopak je snadno vidět, že pokud je číslo špatné, je to proto, že je buď dělitelné číslem n, nebo je aritmetickým průměrem dvou špatných čísel. S těmito pozorováními již svedeme popsat všechna špatná čísla.

Předpokládejme, že n má lichého dělitele d většího než 1. Na začátku jsou tedy všechna špatná čísla dělitelná d (protože jde o čísla dělitelná n). Pokud máme dvě špatná čísla a a b dělitelná d a jejich aritmetický průměr je celé číslo, je i tento průměr dělitelný d (jelikož d je liché). Všechna špatná čísla tedy musejí být dělitelná d, proto existuje nějaké dobré číslo, tedy v tomto případě má Jerry vyhrávající strategii.

V druhém případě je $n = 2^k$ pro nějaké přirozené číslo k. Dokážeme, že v tomto případě jsou všechna celá čísla špatná. Použijeme k tomu následující úvahu: Pro všechna celá čísla a a přirozená čísla l platí, že pokud jsou krajní body intervalu $\langle a, a+2^l\rangle$ špatné, jsou i všechna čísla tohoto intervalu špatná. Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle l:

Pro $l = 1$ máme interval $\langle a, a+2\rangle$. Jeho jediný vnitřní bod $a+1$ je zřejmě průměrem krajních bodů, které jsou špatné, takže i číslo $a+1$ je špatné. Předpokládejme, že tvrzení platí pro l a všechna celá a. Dokážeme, že pak platí i pro $l+1$. Máme dokázat, že všechna čísla intervalu $\langle a, a+2^{l+1}\rangle$ jsou špatná. Protože podle předpokladu jsou krajní body špatné, je i střed tohoto intervalu rovný $a+2^l$ špatný. Interval se rozdělil na dva podintervaly $\langle a, a+2^l\rangle$ a $\langle a+2^l, a+2^{l+1}\rangle$. Na oba tyto intervaly však můžeme použít indukční předpoklad. Všechny vnitřní body těchto intervalů jsou tedy špatné, takže i celý interval $\langle a, a+2^{l+1}\rangle$ je špatný. Tím je důkaz indukcí hotov.

Nyní již stačí pouze aplikovat toto pomocné tvrzení na intervaly $\langle 2^k l, 2^k(l+1)\rangle$, kde l je celé číslo. Jejich krajní body jsou špatné, protože to jsou násobky $n = 2^k$. Délka těchto intervalů je mocnina dvou, takže nutně všechna čísla těchto intervalů jsou špatná. Těmito intervaly ale pokrýváme všechna celá čísla, tudíž důkaz, že všechna celá čísla jsou špatná, je hotov.

Poznámka. Strategii jsme v tomto řešení popsali implicitně. Dá se však zpětně odvodit. V prvním případě stačí každé dvojici (a, b), kde a je dobré číslo a b je libovolné, přiřadit takový Jerryho tah, při němž figurka skončí na dobrém čísle. V druhém případě je třeba pro každé špatné číslo poznamenat tah, který ji dostane na špatná čísla, kvůli nimž je špatné (zmiňovaný tah $(b-a)/2$ v řešení). Je vidět, že takto explicitně popsané strategie jsou stejné jako strategie z předchozího řešení.

Poznámka. Podobně jako v předešlém řešení lze i zde pomocí předvedených úvah popsat, jak vypadá situace pro všechny možné počáteční pozice figurky. V kontextu tohoto řešení to znamená pro obecné n popsat všechna dobrá čísla. Zkombinováním úvah z řešení se dá dokázat, že pokud $n = 2^k l$, kde l je liché číslo, jsou dobrá *právě* ta čísla, která nejsou násobky l.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vyřešte úlohu pro lichá čísla n. [V tomto případě vždy vyhrává Jerry, protože se nikdy neocitne na políčku, které je z obou stran stejně vzdálené od pasti, takže vždy jeden z jeho dvou tahů nevede do pasti.]

N2. Dokažte, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Tom volí pouze čísla nejvýše rovná $n/2$. [V prvé řadě Tomovi stačí volit čísla nejvýše rovná n, protože čísla a, $a+n$ zřejmě mají stejný efekt. Rovněž je vidět, že i čísla a, $n-a$ mají stejný efekt. Tomovi tedy stačí volit vždy menší číslo z dvojice a, $n-a$. To je zřejmě nejvýše rovno $n/2$.]

N3. Vyřešte úlohu pro $n=6$. [Očíslujme vrcholy $0, 1, \ldots, 5$ tak, že 0 je past. Figurka nikdy nemůže být na vrcholu s číslem 3, protože tahem 3 by nutně skončila v pasti. Podle úlohy N2 stačí předpokládat, že Tom říká jen čísla 1, 2, 3. Uvědomte si, že pro každý ze zbývajících vrcholů 1, 2, 4, 5 a pro každé Tomem zadané číslo 1, 2, 3 může Jerry udělat tah, že figurka neskončí na vrcholech s čísly 3 a 6, takže nemůže prohrát.]

N4. Vyřešte úlohu pro $n=4$. [Očíslujme vrcholy jako v úloze N3. Rozdělme si vrcholy, jež nejsou pastmi, do dvou skupin $A=\{2\}$ a $B=\{1,3\}$. Pokud je figurka ve skupině A, Tom tahem 2 vyhraje. Pokud je figurka ve skupině B, vyhraje buď tahem 1, nebo ji dostane do skupiny A, kde vyhraje tahem 2. Pokud by neviděl pozici figurky, vyzkouší nejprve tah 2. Tímto tahem buď vyhraje, nebo bude figurka ve skupině B, kde zůstane i po tomto tahu. Tehdy mu stačí použít strategii pro skupinu B, tj. říci čísla 1, 2. Finální strategie v případě, že nevidí figurku, je tudíž 2, 1, 2.]

N5. Tom zvolí k dané hře (při které na hrací desku s n-úhelníkem vidí) jednoduchou strategii: v každém kroku řekne takové číslo menší než n, při kterém se následně figurka ocitne v pasti, posune-li ji Jerry proti směru chodu hodinových ručiček. Ukažte, že Tom zaručeně vyhraje v případě $n=8$. [Vypisujte postupně polohy figurky od vítězného konce, a ukažte, že takto dostanete všechny možné výchozí polohy figurky. Dokážete objevit, která další n budou mít stejnou vlastnost?]

D1. Jak se změní odpověď v úloze, má-li Tom zakázanou konečnou množinu čísel, tj. nesmí je říci? [Odpověď se nezmění. Pokud Tom používá ve své strategii zakázané číslo a, stačí ho nahradit číslem $a+kn$ pro nějaké přirozené k. Jelikož je zakázáno konečně mnoho čísel, nějaké číslo tohoto tvaru zakázáno nebude. Takovou výměnu provedeme se všemi zakázanými čísly, která se mohou v jeho strategii vyskytnout.]

D2. Jak se změní odpověď, pokud Tom nevidí figurku a zároveň nezná číslo n? [Odpověď se nezmění.]

D3. Jak se změní odpověď v případě, že figurka je na začátku položena na nějakém konkrétním políčku?

D4. Čtyři poháry jsou umístěny do rohů čtvercového tácu. Každý je umístěn dnem vzhůru nebo dnem dolů. Slepá osoba je posazena před tác a má za úkol převracet poháry tak, aby byly všechny otočeny stejným směrem. Poháry jsou převraceny následujícím způsobem: V jednom tahu mohou být uchopeny libovolné dva poháry, přičemž osoba cítí jejich orientaci a může buď některý z nich otočit opačným směrem, nebo oba z nich, anebo žádný. Následně je tác otočen o celočíselný násobek úhlu 90°. Jak má osoba postupovat při převracení? [`https://en.wikipedia.org/wiki/Four_glasses_puzzle`]