68. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. V jednom kroku aktuální přirozené číslo k zvětšíme buď na sudé číslo $m = 2k$, nebo na liché číslo $m = 2k + 1$. Podle parity nového čísla m tak můžeme rekonstruovat předchozí číslo k: buď $k = m/2$, nebo $k = (m - 1)/2$ — podle toho, zda m je sudé či liché.

Liché číslo 2 019 se tedy na tabuli objeví jedině po čísle $(2\,019 - 1)/2 = 1\,009$. Protože je to opět číslo liché, po dvou krocích se dostaneme k cílovému číslu 2 019 pouze z čísla $(1\,009 - 1)/2 = 504$. To je číslo sudé, takže po třech krocích dostaneme 2 019 jen z čísla $504 : 2 = 252$, atd. Celý postup určování všech vyhovujících čísel od konečného 2 019 vede k následujícímu výsledku:

$$2\,019 \leftarrow 1\,009 \leftarrow 504 \leftarrow 252 \leftarrow 126 \leftarrow 63 \leftarrow 31 \leftarrow 15 \leftarrow 7 \leftarrow 3 \leftarrow 1.$$

(Číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, takže dále nepokračujeme.)

Odpověď. Takových počátečních hodnot čísla n je deset (jsou to 1, 3, 7, 15, 31, 63, 126, 252, 504 a 1 009).

Jiné řešení. Budeme-li čísla na tabuli zapisovat ve dvojkové soustavě, spočívá každá úprava aktuálního čísla n v tom, že ho vůbec nemusíme mazat, nýbrž pouze k jeho zápisu připsat zprava buď nulu (změna n na $2n$), nebo jedničku (změna n na $2n + 1$). Číslo 2 019 tedy dostaneme po určitém počtu kroků právě z takových čísel, jejichž dvojkový zápis je tvořen skupinou několika prvních číslic dvojkového zápisu čísla 2 019. Protože $2^{10} = 1\,024 < 2\,019 < 2\,048 = 2^{11}$, má dvojkový zápis čísla 2 019 právě 11 číslic, takže existuje celkem 10 počátečních čísel n, z nichž po jednom či více krocích dostaneme číslo 2 019. (Nejmenší z těchto čísel je číslo 1, které odpovídá první číslici dvojkového zápisu čísla 2 019, na ostatních devět čísel se zadání úlohy neptá.)

Poznámka. Samotný zápis čísla 2019 v dvojkové soustavě nás nezajímá, ostatně jej obvykle hledáme právě posloupností úprav popsanou v prvním řešení. Tak dvojkový zápis 11111100011 čísla 2 019 dostaneme, když v získané skupině čísel $1, 3, 7, \ldots, 1\,009$, 2 019 zaměníme každé liché číslo jedničkou a každé sudé číslo nulou.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za obecné zdůvodnění, že každé předchozí číslo je určeno číslem následujícím, 1 bod za nalezení všech čísel až po jednotku a 1 bod za formulaci správného závěru.

Obecný popis z prvního odstavce řešení není nutný (stejně jako závěrečná poznámka o nejmenším přirozeném čísle 1), řešitel může zpětný postup rovnou začít určením čísla 1 009 z čísla 2 009 a pokračovat dále. Pokud však při postupných výpočtech čísel udělá numerickou chybu, více než 4 body neudělujte. Pokud učiní více chyb, dejte nejvýše 3 body. Za řešení, která našla 1009, ale nepokračovala v hledání dalších čísel, udělte 1 bod.

V případě druhého řešení dejte po 1 bodu za popis chování operace $\times 2$ a za popis chování operace $\times 2 + 1$ ve dvojkové soustavě. Další 2 body za vysvětlení, která čísla odpovídají hledaným, 1 bod za nalezení počtu číslic čísla 2019 ve dvojkové soustavě (buď odhadem nebo ručním převodem) a konečně 1 bod za samotný závěr.

2. Trojmístné číslo $n = \overline{abc}$ má požadovanou vlastnost, právě když jeho číslice a, b, c splňují rovnici

$$100a + 10b + c = (10a + c)b^2. \tag{1}$$

Protože číslice b v ní má nejsložitější zastoupení, probereme postupně její možné hodnoty.

Předně si povšimneme, že nemůže být $b \in \{0, 1\}$ (pro takové číslice by pravá strana (1) nebyla trojmístným číslem). Protože $a \geqq 1$, nemůže být ani $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ — pro takové číslice by pravá strana byla alespoň $250a$, zatímco levá strana (1) je vždy menší než $100a + 100 \leqq 200a$. Zbývá nám proto probrat hodnoty $b \in \{2, 3, 4\}$.

Pro $b = 2$ přejde (1) v rovnici $100a + 20 + c = 40a + 4c$ neboli $20 = 3(c - 20a)$, což je vyloučeno, neboť 20 není násobkem tří (navíc $c - 20a < 0$ díky tomu, že $a \geqq 1$ a $c \leqq 9$).

Pro $b = 3$ přejde (1) v rovnici $100a + 30 + c = 90a + 9c$ neboli $5(a + 3) = 4c$, což znamená, že c je nenulová číslice dělitelná pěti, tedy $c = 5$, a tak $a = 1$. Našli jsme řešení $n = 135$ (zkouška není nutná).

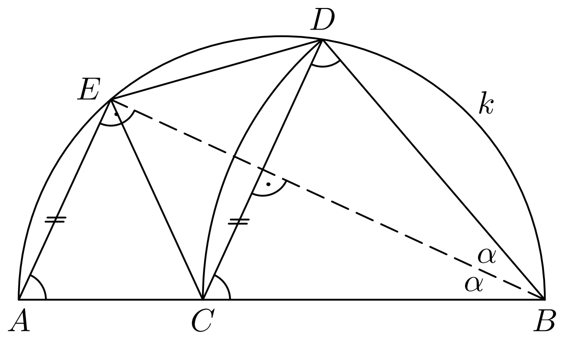
Pro $b = 4$ přejde (1) v rovnici $100a + 40 + c = 160a + 16c$ neboli $40 = 3(20a + 5c)$, což je vyloučeno, neboť 40 není násobkem tří (navíc je $3(20a + 5c) \geqq 60$).

Odpověď. Vyhovuje jediné číslo 135.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za sestavení rovnice, 1 bod za vyloučení $b \leqq 1$, 1 bod za vyloučení $b \geqq 5$, 1 bod za vyloučení $b = 2$, 1 bod za vyloučení $b = 4$, 1 bod za vyřešení $b = 3$ a nalezení čísla 135. V případě neúplného řešení udělte 1 bod za uhodnutí řešení.

3. Protože druhý z trojúhelníků AEC a CBD je podle zadání rovnoramenný s hlavním vrcholem B, ukážeme v první části řešení, že i první trojúhelník AEC je rovnoramenný s hlavním vrcholem E.

Protože bod E leží na ose úhlu ABD, mají jednak oba úhly ABE a DBE stejnou velikost, kterou označíme α (obr. 1), jednak platí $|EC| = |ED|$. Úsečka DE je však shodná i s úsečkou AE, neboť jim oběma jako tětivám kružnice k odpovídají shodné obvodové úhly α s vrcholem B.[1] Dohromady dostáváme, že i úsečky AE a CE jsou shodné. Tudíž AEC je skutečně rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem E.



Obr. 1

Rovnoramenné trojúhelníky AEC a CBD budou (jak máme dokázat) podobné, a to podle věty *uu*, když ukážeme, že mají shodné úhly EAC a BCD při svých základnách AC, resp. CD. To je však na obrázku již vyznačeno jako důsledek rovnoběžnosti úseček AE a CD, které jsou totiž obě kolmé na přímku BE (úhel AEB je pravý podle Thaletovy věty, kolmost $BE \perp CD$ plyne z osové souměrnosti trojúhelníku BCD).

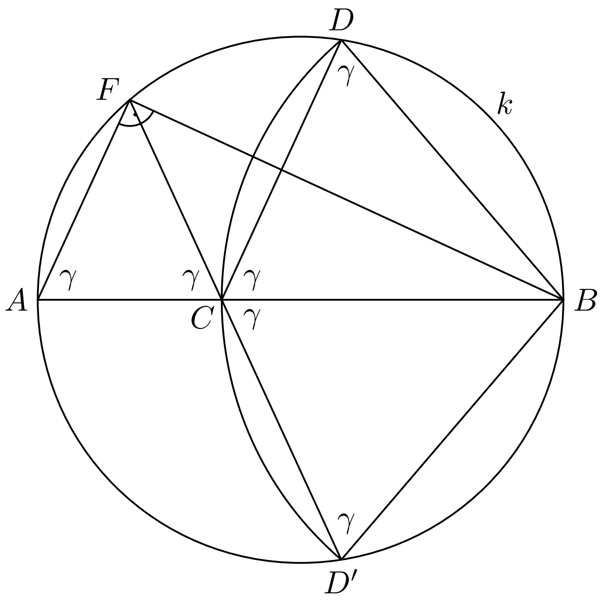
Pokud si nepovšimneme rovnoběžnosti úseček CD a AE, lze z trojúhelníků BCD a ABE snadno vypočítat, že oba úhly BCD a BAE (a tedy i CAE) mají velikost $90° - \alpha$.

---

[1] Lze se též odvolat na známý výsledek, že bod E je středem oblouku AD kružnice opsané trojúhelníku ABD — ten se však dokazuje právě užitím poučky, že shodné obvodové úhly v téže kružnici přísluší pouze jejím shodným obloukům.

Poznámka. Rovnoramennost trojúhelníku AEC se dá zdůvodnit i tak, že $|\sphericalangle CAE| = 180^\circ - |\sphericalangle EDB|$ (kružnice) $= 180^\circ - |\sphericalangle ECB|$ (osová souměrnost) $= |\sphericalangle ACE|$ (vedlejší úhel).

Jiné řešení. Kružnice se středem B a poloměrem $|BC|$ protne kružnici k nejen v bodě D, ale rovněž v bodě D', který je s bodem D souměrně sdružený podle průměru AB kružnice k. Označme ještě F druhý průsečík přímky CD' s kružnicí k. Souměrně sdružené rovnoramenné trojúhelníky CBD a CBD' mají při svých základnách CD a CD' čtyři shodné vnitřní úhly, které jsou na obr. 2 označeny písmeny γ stejně jako pátý úhel ACF (vrcholový k úhlu BCD') a šestý úhel FAB (shodný s obvodovým úhlem $FD'B$). Podle věty *uu* jsou trojúhelníky AFC a CBD podobné, takže naše řešení bude hotovo, když ukážeme, že bod F leží na ose úhlu CBD (a tudíž platí $E = F$). To je však snadné: jednak díky shodným souhlasným úhlům BAF, BCD platí $AF \parallel CD$, jednak díky tomu, že úhel AFB je podle Thaletovy věty pravý, platí $BF \perp AF$; dohromady máme $BF \perp CD$, a tak je přímka BF skutečně osou souměrnosti rovnoramenného trojúhelníku BCD s hlavním vrcholem B.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu z prvního řešení dejte celkem 4 body za důkaz, že AEC je rovnoramenný trojúhelník (z toho 1 bod za odvození rovnosti $|CE| = |DE|$, 2 body za zdůvodnění rovnosti $|AE| = |DE|$, další 1 bod za jejich důsledek $|AE| = |CE|$) a konečně 2 body za porovnání vnitřních úhlů obou rovnoramenných trojúhelníků. Za nezdůvodněné konstatování rovnosti $|AE| = |CE|$ žádný bod neudělujte, za případné pokračování v podobě ověřování shodnosti vnitřních úhlů obou dotyčných trojúhelníků pak udělte nejvýše 1 bod. Ten udělte i v případě, kdy jediným odvozeným poznatkem je fakt $AE \parallel CD$ a jeho důsledek v podobě shodnosti úhlů CAE a BCD.

Při druhém postupu udělte 2 body za konstrukci bodů D' a F, 2 body za důkaz podobnosti trojúhelníků AFC, BCD a 2 body za zdůvodnění rovnosti $E = F$.