68. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Mezi vybranými čísly nesmí být žádný násobek devíti a přitom mezi nimi může být nejvýše jedno číslo, které je dělitelné třemi, nikoli však devíti. Můžeme tedy vybrat všechna čísla, která nejsou dělitelná třemi, a přidat k nim jakékoli číslo, které je dělitelné třemi, nikoli však devíti.

Závěr. Největší možný počet čísel, která můžeme požadovaným způsobem vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, je tedy roven $\frac{2}{3} \cdot 2\,019 + 1 = 1\,347$.

Úloze vyhovuje např. množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots, 2015, 2017, 2018\}$, která má právě $1\,347$ prvků. Tato množina obsahuje číslo 3 jako jediné číslo dělitelné třemi, které však devíti dělitelné není.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za zdůvodnění, že tam nemůže být číslo dělitelné 9, 1 bod za zdůvodnění, že tam může být nejvýše jedno číslo dělitelné 3 (nedělitelné 9), 3 body za odhad maximálního počtu prvků na základě těchto pozorování, 1 bod za příklad vyhovující množiny.

2. Ukážeme, že vítěznou strategii má Pavel, který může vyhrát již svým druhým tahem.

Vrcholy uvažovaného čtyřstěnu označme písmeny A, B, C, D. V prvním tahu Pavel zvětší o 2 číslo u některého vrcholu čtyřstěnu $ABCD$, např. u A. Michal pak zvolí buď některou hranu vycházející z téhož vrcholu (např. AB), nebo vybere některou hranu, která z A nevychází, např. BC.

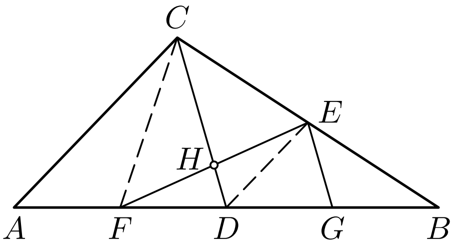
V prvním případě Pavel (ve svém druhém tahu) zvětší o 2 číslo napsané u jednoho z vrcholů C, D, např. u vrcholu C. U jednotlivých vrcholů A, B, C, D čtyřstěnu $ABCD$ pak budou *po řadě* napsána navzájem různá čísla $3, 1, 2, 0$. Ve druhém případě Pavel zvětší o 2 hodnotu u některého z vrcholů B nebo C, např. u B. U jednotlivých vrcholů A, B, C, D uvažovaného čtyřstěnu $ABCD$ jsou pak i v tomto případě napsána *po řadě* navzájem různá čísla $2, 3, 1, 0$.

Tím je úloha vyřešena.

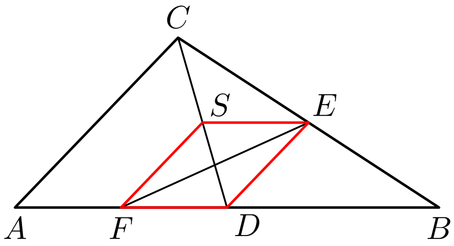
Poznámka. Úlohu lze řešit bez označení vrcholů jen úvahami o neuspořádaných čtveřicích k nim připsaných čísel, protože každé dva vrcholy čtyřstěnu jsou spojeny hranou. Se zápisy čtveřic čísel v pořadí od největšího po nejmenší pak celé řešení vypadá následovně: Po prvním Pavlově tahu vznikne čtveřice $2, 0, 0, 0$, kterou Michal může změnit buď na čtveřici $3, 1, 0, 0$, nebo na čtveřici $2, 1, 1, 0$. Každou z obou čtveřic zřejmě Pavel dokáže svým druhým tahem změnit na čtveřici $3, 2, 1, 0$, a to buď zvětšením jedné ze dvou nul na dvojku, anebo zvětšením jedné ze dvou jedniček na trojku.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vysvětlení, že po dvou tazích jsou možnosti 3,1,0,0 resp. 2,1,1,0, 2 body za první případ, 2 body za druhý případ, 1 bod za závěr. Za pouhé konstatování (bez hlubšího zdůvodnění), že vítěznou strategii má Pavel, udělte 1 bod.

3. Nechť G značí střed úsečky BD, což znamená, že bod D je nejen středem strany AB, ale i středem úsečky FG (obr. 1). Úsečka EG je pak střední příčkou v trojúhelníku BCD, a je tudíž rovnoběžná s CD. Bod C tak leží na rovnoběžce se stranou EG trojúhelníku GEF jdoucí středem D jeho strany FG, a proto tato rovnoběžka CD nutně prochází i středem H třetí strany EF, jak jsme měli dokázat.



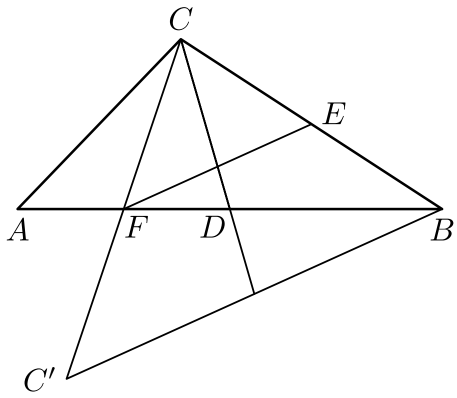
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Označme S střed těžnice CD trojúhelníku ABC (obr. 2). Úsečka DE je střední příčka v trojúhelníku ABC, takže $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$, a úsečka FS je střední příčka v trojúhelníku ADC, takže $|FS| = \frac{1}{2}|AC|$. Úsečky DE a FS jsou tedy shodné a rovnoběžné (se stranou AC). Čtyřúhelník $DESF$ je proto rovnoběžník, a jak známo, jeho úhlopříčky se vzájemně půlí. Tím je důkaz ukončen.

Jiné řešení. Pro bod D platí $|FD| : |DB| = 1 : 2$. Sestrojíme-li bod C' jako obraz bodu C ve středové souměrnosti podle středu F (obr. 3), bude BF těžnice trojúhelníku BCC' a bod D jeho těžiště. Přímka CD tudíž obsahuje těžnici trojúhelníku BCC', a proto půlí jeho stranu BC' stejně jako jeho střední příčku EF s ní rovnoběžnou.



Obr. 3

Jiné řešení. Máme dokázat, že na přímce CD leží těžnice trojúhelníku CEF, což je ekvivalentní tomu, že obsahy trojúhelníků CDF a CED (obr. 1) jsou stejné.[1] Přitom zřejmě pro obsahy jednotlivých trojúhelníků platí

$$S(CDE) = \tfrac{1}{2}S(DBC) = \tfrac{1}{2}S(CAD) = S(DFC),$$

neboť E je střed BC, D je střed AB a F je střed AD.

Poznámka. Rovnost obsahů se dá dokázat i postupným výpočtem obsahů vzhledem k obsahu trojúhelníku ABC: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $S(ABC) = 1$. Jelikož $|FB| : |AB| = \frac{3}{4}$, je $S(BFC) = \frac{3}{4}$. Jelikož $|FD| : |DB| = \frac{1}{2}$, je $S(CDF) = \frac{1}{4}$. Dále $S(CDB) = \frac{1}{2}$, a protože E je střed CB, je $S(CED) = \frac{1}{2}S(CDB) = \frac{1}{4}$, takže opravdu $S(CDF) = S(CDB)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu udělte 3 body za zavedení bodu G, 1 bod za důkaz $EG \parallel CD$, 2 body za zdůvodnění, že střední příčka DH trojúhelníku GEF musí ležet na přímce CD.

Při druhém postupu dejte 3 body za zavedení bodu S, 1 bod za objev obou středních příček ED, FS, 1 bod za zdůvodnění, že jde o dvě rovnoběžné a shodné úsečky, a 1 bod za závěr, že $DESF$ je rovnběžník, a tudíž se jeho úhlopříčky půlí (místo toho lze uplatnit větu *usu* k důkazu shodnosti trojúhelníků DEH a SFH, kde H značí průsečík úhlopříček, z níž potřebná rovnost $|EH| = |FH|$ plyne).

Při třetím postupu dejte 3 body za zavedení bodu C', 1 bod za zdůvodnění, že D je těžiště trojúhelníku BCC' (a tudíž CD je přímka jeho těžnice), dále 1 bod za objev střední příčky EF a 1 bod za závěr, že těžnice půlí střední příčku.

Konečně za tvrzení, že stačí dokázat rovnost obsahů trojúhelníků CDF, CED (nebo ekvivalentně, že obsah čtyřúhelníku $CFDE$ je dvakrát větší než jeden z nich) dejte 3 body, za důkaz rovnosti zmíněných obsahů další 3 body. Za nedokončený výpočet však udělte nejvýše 1 bod.

[1] To plyne ze známého faktu, že pro libovolný bod X uvnitř úhlu QPR mají trojúhelníky PXQ, PXR stejný obsah, právě když bod X leží na přímce těžnice z vrcholu P trojúhelníku PQR.