Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je* 2 019*krát menší.*

(Pavel Calábek)

Řešení. V první části řešení budeme předpokládat, že jsme v hledaném osmimístném čísle N vyškrtli první čtyři číslice. Ty tvoří čtyřmístné číslo, které označíme A. Zbylé čtyři číslice čísla N tvoří čtyřmístné číslo B, které je zmíněno v zadání, přitom zřejmě platí $N = 10^4A+B$. Požadovaná vlastnost je proto vyjádřena rovnicí $10^4A+B = 2\,019B$ neboli $5\,000A = 1\,009B$. Protože čísla 5 000 a 1 009 jsou nesoudělná, musí být čtyřmístné číslo B násobkem (rovněž čtyřmístného) čísla 5 000, jehož dvojnásobek je už ovšem pětimístný. Podmínce dělitelnosti tak vyhovuje jediné číslo $B = 5\,000$. Pro ně z rovnice $5\,000A = 1\,009B$ vychází $A = 1\,009$, takže celkem $N = 10\,095\,000$ $(= 2\,019 \times 5\,000)$.

Ve druhé části řešení budeme uvažovat souhrnně všechny další případy povoleného škrtání čtyř číslic osmimístného čísla N. Tehdy mezi nimi není jeho první číslice, kterou označíme jako a. Ukážeme, že po takovém škrtání se číslo N zmenší více než 5 000krát (takže nemůže být řešením úlohy).

Skutečně, číslo N s dekadickým zápisem $N = 10^7a + \ldots$ přejde (po uvažovaném škrtu 4 číslic) v číslo se zápisem $10^3a + \ldots$,[1] které je jistě menší než $10^3(a + 1)$, pro avizované zmenšení tak stačí dokázat nerovnost $10^7a \geqq 5\,000 \cdot 10^3(a+1)$. Ta však platí, neboť po vydělení obou stran číslem $5 \cdot 10^6$ přejde v nerovnost $2a \geqq a + 1$ neboli $a \geqq 1$. Stačí dodat, že první číslice a zápisu čísla N je vždy různá od nuly.

Odpověď. Hledané osmimístné číslo je jediné, a to 10 095 000.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna čtyřmístná čísla, z nichž po vyškrtnutí prvního dvojčíslí dostaneme dvojmístné číslo, které je 69krát menší. [1725, 3450 a 5175. Hledané číslo je tvaru 10^2A+B, kde dvojmístná čísla A, B splňují rovnici $10^2A+B = 69B$ neboli $25A = 17B$. Díky nesoudělnosti čísel 17 a 25 odtud plyne, že B je násobkem čísla 25.]

N2. Dokažte, že pokud ve čtyřmístném čísle vyškrtneme dvě z jeho posledních tří číslic, dostaneme číslo více než 50krát menší. [Původní číslo je tvaru $\overline{c{\star}{\star}{\star}}$, zmenšené je tvaru $\overline{c{\star}}$, takže první z nich je alespoň 10^3c, zatímco druhé číslo je menší než $10(c+1)$. Proto stačí ověřit nerovnost $10^3c \geqq 50 \cdot 10(c + 1)$, ta je ovšem splněna pro každé $c \geqq 1$.]

D1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, pro něž platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$. [65–C–S–1]

D2. Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N. [56–C–II–4]

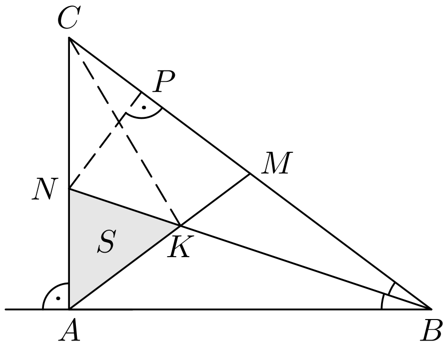
D3. Pro které racionální číslo $r > 1$ existuje nejvíce těch čtyřmístných čísel, z nichž vyškrtnutím prvního dvojčíslí dostaneme dvojmístné číslo, které je r-krát menší? [Pro $r = 101$. Podle označení z úlohy N1 hledáme takové r, pro které existuje největší počet dvojic A, B dvojmístných čísel splňujících rovnici $10^2A+B = rB$ neboli $10^2A = (r-1)B$. Číslo B je při daném r číslem A jednoznačně určeno, přitom $A \in \{10, 11, \ldots, 99\}$. Odtud plyne, že pro každé r je vhodných čísel nejvýše 90, přitom tento počet získáme, právě když

[1] Tři tečky znamenají vklady nižších mocnin základu 10, v obou případech obecně rozdílné. Pro další úvahy není jejich složení podstatné.

pro každé dvojmístné A bude $B = 10^2 A/(r-1)$ rovněž dvojmístné celé číslo. To je splněno pouze pro $r = 101$, kdy $B = A$, takže všech 90 vyhovujících čtyřmístných čísel je tvaru $\overline{abab}$.]

2. *V trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M střed přepony BC a N průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu B s odvěsnou AC. Úsečky AM a BN se protnou v bodě, který označíme K. Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníku BAK a čtyřúhelníku $CNKM$.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Úloha je o známém pravoúhlém trojúhelníku, totiž tom s odvěsnami délek 3, 4 a přeponou (označenou jako BC) délky 5, jehož obsah je $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Označme ještě P patu kolmice z bodu N na přímku BC (obr. 1). Protože bod N leží dle zadání na ose úhlu ABC, platí $|NA| = |NP|$.



Obr. 1

V celém řešení budeme hledat vztahy mezi obsahy různých částí trojúhelníku ABC. Protože M je střed strany BC, platí rovnosti

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 3 \quad \text{a} \quad S_{BMK} = S_{CMK},$$

neboť v obou případech se jedná o dvojici trojúhelníků se shodnou výškou k shodným základnám. Porovnání základen a výšek dvou trojúhelníků vede i k úměrám

$$S_{ABN} : S_{CBN} = S_{AKN} : S_{CKN} = |AN| : |CN| = 4 : 5,$$

protože v obou dvojicích jsou zapsány trojúhelníky se shodnými výškami ke svým základnám AN a CN, přitom trojúhelníky v první dvojici ABN, CBN mají navíc shodné výšky NA, resp. NP ze společného vrcholu N, takže poměr jejich obsahů je skutečně roven poměru $4 : 5$ délek jejich základen AB a CB. Ze známé hodnoty $S_{ABN} + S_{CBN} = S_{ABC} = 6$ tudíž plyne

$$S_{ABN} = \frac{8}{3} \quad \text{a} \quad S_{CBN} = \frac{10}{3}.$$

Naše řešení založíme na výpočtu neznámého obsahu trojúhelníku AKN, který označíme S jako na obrázku a pro který z dříve odvozených vztahů nyní sestavíme rovnici.

K tomu postupně vyjádříme

$$
\begin{aligned}
S_{ABK} &= S_{ABN} - S_{AKN} = \frac{8}{3} - S,\\
S_{BMK} &= S_{ABM} - S_{ABK} = 3 - \Big(\frac{8}{3} - S\Big) = S + \frac{1}{3},\\
S_{BCK} &= 2S_{BMK} = 2S + \frac{2}{3},\\
S_{CKN} &= S_{CBN} - S_{BCK} = \frac{10}{3} - \Big(2S + \frac{2}{3}\Big) = \frac{8}{3} - 2S.
\end{aligned}
$$

Dosazením do úměry $S_{AKN} : S_{CKN} = 4 : 5$ tak dostaneme rovnici

$$\frac{S}{\frac{8}{3} - 2S} = \frac{4}{5},$$

z níž vychází $S = \frac{32}{39}$. Obsahy, které máme porovnat, tak mají hodnoty

$$
\begin{aligned}
S_{ABK} &= S_{ABN} - S_{AKN} = \frac{8}{3} - S = \frac{72}{39},\\
S_{CNKM} &= S_{ACM} - S_{AKN} = 3 - S = \frac{85}{39}.
\end{aligned}
$$

Odpověď. Hledaný poměr je 72 : 85.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že libovolný trojúhelník je každou svou těžnicí rozdělen na dva menší trojúhelníky o stejném obsahu. [Dotyčné trojúhelníky mají shodnou výšku ke shodným základnám.]

N2. Dokažte, že libovolný trojúhelník je svými třemi těžnicemi rozdělen na šest menších trojúhelníků o stejném obsahu. [Pro trojúhelník ABC s těžnicemi AA_1, BB_1, CC_1 a těžištěm T využijte rovnosti typu $S_{ABA_1} = S_{ACA_1}$ a $S_{BTA_1} = S_{CTA_1}$, platné podle výsledku úlohy N1.]

N3. Odvoďte pravidlo o poměru, v jakém dělí osa vnitřního úhlu daného trojúhelníku jeho protější stranu: Osa úhlu BAC protne stranu BC trojúhelníku ABC v bodě P určeném úměrou $|PB| : |PC| = |AB| : |AC|$. [Ukažte, že oba poměry mají stejnou hodnotu jako poměr obsahů trojúhelníků ABP a ACP.]

D1. Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí $p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|$.
   a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.
   b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4. [65–C–I–4]

D2. V pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu A základny AB je bod K průsečíkem výšky CP lichoběžníku s jeho úhlopříčkou BD. Obsah čtyřúhelníku $APCD$ je polovinou obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník BCK. [65–C–II–3]

D3. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, přičemž $2|AB| = 3|CD|$.
   a) Najděte bod P uvnitř lichoběžníku tak, aby obsahy trojúhelníků ABP a CDP byly v poměru 3 : 1 a rovněž obsahy trojúhelníků BCP a DAP byly v poměru 3 : 1.
   b) Pro nalezený bod P určete postupný poměr obsahů trojúhelníků ABP, BCP, CDP a DAP. [64–C–II-3]

3. Úpravou *přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, připočteme k němu číslo* 1.

a) Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla dostaneme po několika úpravách číslo 1.

b) Pro které z čísel $1, 2, \ldots, 10^6$ *budeme potřebovat největší počet úprav, než získáme číslo* 1*?* (Ján Mazák)

Řešení. Pro ilustraci nejprve vypišme, jak vypadají postupné úpravy kupříkladu čísla 19:

$$19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Podle zadání každé sudé číslo n přejde úpravou $\boxed{:2}$ v číslo $\frac{1}{2}n$, zatímco každé liché číslo n přejde úpravou $\boxed{+1}$ v číslo $n+1$, které je samo sudé, takže po druhé úpravě $\boxed{:2}$ z původního lichého čísla n dostaneme číslo $\frac{1}{2}(n+1)$. Všimněme si, že první z nerovností

$$n > \tfrac{1}{2}n, \quad \text{resp.} \quad n > \tfrac{1}{2}(n+1)$$

platí pro každé sudé $n \geqq 2$ a že druhá nerovnost platí pro každé liché $n \geqq 3$. Znamená to, že pokud začneme opakovaně upravovat libovolně dané přirozené číslo větší než 1, budeme postupně (vždy po jedné nebo dvou úpravách) dostávat menší a menší přirozená čísla, takže se po konečném počtu kroků nutně dostaneme k číslu 1. (Kdybychom dostali nekonečnou posloupnost čísel vesměs větších než 1, pro nejmenší z nich bychom se dostali do sporu s jednou z výše uvedených nerovností.)

b) Pro vyřešení úkolu s konkrétním číslem 10^6 bude výhodné zjistit obecněji, která čísla budou potřebovat (s ohledem na svou velikost) relativně velký počet úprav, než přejdou v číslo 1. Budou to jistě čísla lichá, ve kterých se navíc úpravy $\boxed{:2}$ nebudou pokud možno opakovat za sebou (aby nedošlo k rychlému snížení hodnot jako $20 \to \to 10 \to 5$ v ilustračním příkladě), budou se tedy s úpravami $\boxed{+1}$ ob jednu střídat. Kandidáty s relativně velkým počtem potřebných úprav tak budeme nacházet v opačně zapsaném řetězci úprav

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 10 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 17 \leftarrow 34 \leftarrow 33 \leftarrow \ldots$$

(i předposlední úprava, stejně jako ta poslední, musí být $\boxed{:2}$, jinak bychom dostali $1 \leftarrow 2 \leftarrow 1$). Jak se zdá, každé z lichých čísel 3, 5, 9, 17, 33, $\ldots$, které se v takovém řetězci objevilo, je číslo tvaru 2^k+1 a číslo 1 z něj dostaneme po $2k+1$ úpravách. Tak pro $k=3$ jde o číslo 9, z něhož číslo 1 dostaneme po 7 úpravách, což je, jak se snadno numericky prověří, největší počet potřebných úprav pro všechna výchozí čísla, která nepřevyšují číslo $2^4 = 16$. To nás vede k domněnce, kterou nyní vyslovíme a posléze dokážeme matematickou indukcí.

Pro každé přirozené číslo k platí: Z libovolného čísla $n \in \{1, 2, \ldots, 2^{k+1}\}$ se dostaneme k číslu 1 po nejvýše $2k+1$ úpravách, přitom $2k+1$ úprav budeme potřebovat pro jediné z uvedených čísel, totiž pro číslo $n = 2^k+1$.

Označme $\mathsf{M}_k = \{1, 2, \ldots, 2^{k+1}\}$ množinu hodnot n z uvedeného tvrzení. Pro $k=1$ toto tvrzení plyne z řetězce $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3$, neboť $\mathsf{M}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$. Platí-li dané tvrzení pro určitou hodnotu k, bude platit i pro hodnotu $k+1$, když pro nově uvažovaná čísla n tvořící množinu

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{M}_{k+1} \setminus \mathsf{M}_k \quad \text{neboli} \quad \mathsf{N}_k = \{2^{k+1}+1, 2^{k+1}+2, \ldots, 2^{k+2}\}$$

dokážeme, že každé z nich po nejvýše dvou úpravách padne do množiny M_k, přitom to z nich, které přejde v číslo 2^k+1 teprve po dvou úpravách, je jedině číslo $2^{k+1}+1$.

Skutečně, libovolné sudé číslo $n \in \mathsf{N}_k$ přejde jedinou úpravou v číslo $\frac{1}{2}n$, které patří do M_k, protože z nerovnosti $n \leqq 2^{k+2}$ plyne $\frac{1}{2}n \leqq 2^{k+1}$. Libovolné liché číslo $n \in \mathsf{N}_k$ přejde po dvou úpravách v číslo $\frac{1}{2}(n+1)$, a to patří do M_k, protože z nerovnosti $n \leqq 2^{k+2}-1$ plyne $\frac{1}{2}(n+1) \leqq 2^{k+1}$.

Číslo, jehož úprava vede k (lichému) číslu 2^k+1, je jediné, a to sudé číslo $2^{k+1}+2$. To pak lze dostat dvěma způsoby: jednak z čísla $2^{k+1}+1 \in \mathsf{N}_k$ úpravou $\boxed{+1}$, anebo úpravou $\boxed{:2}$ z čísla $2^{k+2}+4$, které ovšem do množiny N_k nepatří. Tím je důkaz indukcí ukončen.

Nyní už snadno získáme odpověď na stanovený úkol. Protože

$$2^{19}+1 = 524\,289 < 10^6 < 2^{20},$$

je podle dokázaného tvrzení hledané číslo rovno 524 289.

Poznámka. Počty $p(n)$ úprav ze soutěžní úlohy, po kterých přejde dané výchozí číslo n poprvé v číslo 1, splňují zřejmě pro každé $n > 1$ rekurentní vztahy

$$p(2n) = p(n) + 1 \quad \text{a} \quad p(2n+1) = p(n+1) + 2.$$

Díky nim jsou všechny hodnoty $p(n)$ určeny prvními dvěma hodnotami $p(2) = 1$ a $p(3) = 3$. K určení a zápisu explicitního vzorce pro obecnou hodnotu $p(n)$ je výhodné využít dvojkovou soustavu: Pro každé $n > 1$ platí vzorec

$$p(n) = j(n-1) + 2 \cdot o(n-1),$$

kde $j(k)$ a $o(k)$ značí počet jedniček, resp. nul v dvojkovém zápise čísla k. Čtenáři přenecháváme důkaz tohoto vzorce matematickou indukcí (využijte při něm výše uvedené rekurentní vztahy), stejně jako prověrku faktu, že tvrzení, které jsme dokázali v řešení části b) soutěžní úlohy, je okamžitým důsledkem takto zapsaného explicitního vzorce.

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech návodných úlohách se zabýváme *úpravou* ze soutěžní úlohy.

N1. Pro které jednociferné číslo je třeba provést největší počet jeho úprav, než získáme číslo 1? O kolik úprav půjde? [Číslo 9, sedm úprav.]

N2. Najděte nejmenší přirozené číslo, pro které je třeba provést 8, resp. 9 jeho úprav, než získáme číslo 1. [Číslo 18, resp. číslo 17.]

N3. Určete všechna přirozená čísla, se kterými je třeba provést pět úprav, než získáme číslo 1. [Čísla 5, 12, 14, 15 a 32. Vypisujte všechny možné postupy úprav „odzadu", tj. od konečného čísla 1 k výchozímu číslu. Pro daný počet pěti úprav jsou tyto možnosti: $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 5$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 12$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 7 \leftarrow 14$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 15$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 32$.]

N4. Pro libovolná přirozená čísla k a p dokažte: Pokud všechna přirozená čísla nepřevyšující hodnotu k přejdou po nejvýše p úpravách v číslo 1, pak na totéž pro čísla nepřevyšující hodnotu $2k-1$ stačí nejvýše $p+2$ úprav. [Rozlište, zda je dané číslo n, $n \leqq 2k-1$, sudé nebo liché — v prvním případě stačí nejvýše $p+1$, ve druhém nejvýše $p+2$ úprav.]

D1. Nechť l je pevné liché číslo větší než 1. Úpravou přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, přičteme k němu dané číslo l. Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla dostaneme po několika úpravách číslo, které nepřevyšuje číslo l, přitom všechna další čísla nepřevyšují číslo $2l$ a periodicky se opakují. Na příkladu $l = 7$ se přesvědčte, že zřejmé opakování $l \to 2l \to l \to \ldots$ není jediné možné. [Využijte následujících poznatků: Sudé číslo se po jedné úpravě zmenší. Liché číslo větší než l se zmenší po dvou úpravách. Liché číslo, které nepřevyšuje l, se po jedné úpravě zvětší na sudé číslo nepřevyšující $2l$, takže po druhé úpravě se opět zmenší na číslo nepřevyšující l. Čísla v průběhu úprav se periodicky zacyklí, jakmile se v průběhu úprav objeví některé číslo podruhé. Pro $l = 7$ existují kromě $7 \to 14 \to 7$ ještě dva další cykly $1 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, $3 \to 10 \to 5 \to 12 \to 6 \to 3$ (protože jsme vypsali všechna čísla od 1 do 7, žádné další cykly neexistují).]

4. *Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu*

$$V=\frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

(Patrik Bak, Jaromír Šimša)

Řešení. Všimněme si úvodem, že výraz V má za daných podmínek na čísla a, b vždy smysl, neboť rovnost $a^2+b^2=1$ vylučuje možnost $a=b=0$, a tak je součet nezáporných čísel a, b různý od nuly (totiž kladný).

Určení minima. Z obecně platné nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$ v naší situaci máme $2ab \leqq a^2+b^2=1$, a tedy $0 \leqq ab \leqq 1/2$. Kromě toho nerovnost $2ab \leqq 1$ spolu s rovností $(a+b)^2=1+2ab$ vede k odhadům $1 \leqq (a+b)^2 \leqq 2$, z nichž po odmocnění dostaneme $1 \leqq a+b \leqq \sqrt{2}$. Proto platí

$$V=\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+ab+1}{a+b}=\frac{2+ab(1-2ab)}{a+b} \geqq \frac{2}{a+b} \geqq \frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

přitom rovnost $V=\sqrt{2}$ jak vidno nastane, právě když $2ab=1$ (neboli $a=b$, jak plyne z úvodní věty tohoto odstavce) a zároveň $a+b=\sqrt{2}$, tedy jedině pro $a=b=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Určení maxima. Díky předpokladu $a^2+b^2=1$ platí

$$\begin{aligned} V&=\frac{(a+b)(a^3+b^3)-ab(a^2+b^2)+ab+1}{a+b}=\frac{(a+b)(a^3+b^3)+1}{a+b}= \\ &=a^3+b^3+\frac{1}{a+b} \leqq 1+\frac{1}{1}=2, \end{aligned}$$

neboť kvůli rovnosti $a^2+b^2=1$ musí platit $0 \leqq a \leqq 1$ a $0 \leqq b \leqq 1$, odkud plynou odhady $a^3 \leqq a^2 \leqq a$, resp. $b^3 \leqq b^2 \leqq b$, po jejichž sečtení dostaneme

$$a^3+b^3 \leqq a^2+b^2 \leqq a+b \quad \text{neboli} \quad a^3+b^3 \leqq 1 \leqq a+b.$$

Rovnost $V=2$ nastane, právě když oba součty a^3+b^3, $a+b$ jsou (stejně jako součet a^2+b^2) rovny 1, tedy v případech, kdy $\{a,b\}=\{0,1\}$.

Odpověď. Minimální hodnota výrazu V je $\sqrt{2}$, jeho maximální hodnota je 2.

Jiné řešení. Ukažme jiný postup, jak dokázat nerovnosti $\sqrt{2} \leqq V \leqq 2$ (že jsou obě rovnosti dosažitelné, už prověřovat nebudeme). Jako v původním řešení využijeme rovnost $a^2+b^2=1$ k úpravě čitatele zadaného zlomku, totiž

$$a^4+b^4+ab+1=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+ab+1=2+ab(1-2ab),$$

a dvojici nerovností, které chceme dokázat, ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \leqq \frac{2+ab(1-2ab)}{a+b} &\leqq 2, \quad |\cdot(a+b), \\ \sqrt{2}(a+b) \leqq 2+ab(1-2ab) &\leqq 2(a+b), \quad |^2 \\ 2(a+b)^2 \leqq \bigl(2+ab(1-2ab)\bigr)^2 &\leqq 4(a+b)^2, \\ 2(1+2ab) \leqq \bigl(2+ab(1-2ab)\bigr)^2 &\leqq 4(1+2ab). \end{aligned}$$

Máme tedy dokázat odhady $2 + 4ab \leqq W \leqq 4 + 8ab$, kde

$$W = \bigl(2 + ab(1 - 2ab)\bigr)^2 = 4 + 4ab(1 - 2ab) + a^2b^2(1 - 2ab)^2.$$

Dolní odhad $2 + 4ab \leqq W$ dostaneme, když stejně jako v původním řešení odvodíme nerovnost $2ab \leqq 1$; díky ní pak totiž platí $2 + 4ab \leqq 4 \leqq W$.

Horní odhad $W \leqq 4 + 8ab$ po dosazení rozvoje pro W dále ekvivalentně upravíme (za předpokladu, že obě čísla a, b jsou *kladná*, jinak je totiž nutně $\{a, b\} = \{0, 1\}$ a pak, jak víme, nastává rovnost $V = 2$, a tedy i $W = 4$):

$$\begin{aligned} 4 + 4ab(1 - 2ab) + a^2b^2(1 - 2ab)^2 &\leqq 4 + 8ab, \quad &| - 4\\ 4ab(1 - 2ab) + a^2b^2(1 - 2ab)^2 &\leqq 8ab, \quad &| : ab\\ 4(1 - 2ab) + ab(1 - 2ab)^2 &\leqq 8. \end{aligned}$$

Levá strana poslední nerovnosti je ovšem díky odhadům $0 < ab \leqq \frac{1}{2}$ dokonce menší než číslo $4 + \frac{1}{2}$. Tím je důkaz obou nerovností $\sqrt{2} \leqq V \leqq 2$ hotov.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

V úlohách N1–N4 i D1 jsou a, b nezáporná čísla, pro něž platí $a^2 + b^2 = 1$.

N1. Najděte nejmenší i největší možnou hodnotu jak součinu ab, tak součtu $a+b$. [$\min(ab) = 0$, $\max(ab) = 1/2$, $\min(a + b) = 1$, $\max(a + b) = \sqrt{2}$. Využijte nerovnost $(a - b)^2 \geqq 0$ a rovnost $(a + b)^2 = 1 + 2ab$.]

N2. Ukažte, že součet $a^4 + b^4 + ab + 1$ závisí jen na součinu ab. [Součet lze upravit do tvaru $2 + ab(1 - 2ab)$.]

N3. Vyjádřete, oč se výraz $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$ ze soutěžní úlohy liší od součtu $a^3 + b^3$. [$V - (a^3 + b^3) = 1/(a + b)$]

N4. Dokažte rovnost $\max(a^3 + b^3) = 1$. [Využijte nerovnosti $a^3 \leqq a^2$ a $b^3 \leqq b^2$.]

D1. Najděte největší možnou hodnotu podílu $P = ab/(a + b)$. [$\max P = \sqrt{2}/4$. Využijte rovnosti $2P = (a + b) - 1/(a + b)$ a faktu, že $\max(a + b) = \sqrt{2}$ (úloha N1).]

D2. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí

$$0 \leqq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leqq |t - 1|.$$ [67–B–I–2]

D3. Najděte všechna kladná reálná čísla t taková, že pro libovolné nezáporné reálné číslo x platí nerovnost

$$\frac{t}{x + 2} + \frac{x}{t(x + 1)} \leqq 1.$$ [67–B–II–2]

D4. Určete všechna reálná čísla r taková, že nerovnost $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pro všechny dvojice reálných čísel a a b, která jsou větší nebo rovna r. [66–B–I–6]

D5. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ platí:

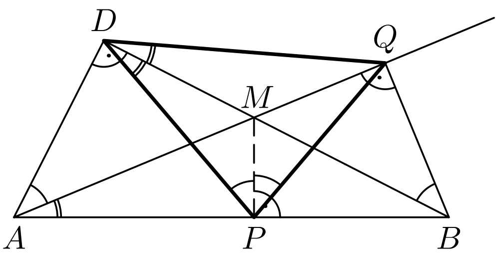
$$(-a + b + c)\Bigl(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Bigr) \geqq 3.$$ [66–C–II–4]

D6. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Ukažte, že pak také platí $c^2 + ab \leqq ac + bc$. [63–C–II–3]

D7. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel $ab+bc$, $bc + ca$, $ca + ab$ není větší než 8. [60–B–I–3]

5. *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD.* (Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)

Řešení. Poznamenejme předně, že díky pravoúhlému trojúhelníku ADM je úhel BMA tupý. Úhly BAM, ABM jsou tudíž ostré, takže kolmý průmět P bodu M padne dovnitř strany AB, zatímco kolmý průmět Q bodu B padne na polopřímku opačnou k polopřímce MA (obr. 2, v němž vystačíme jen s naznačenou úhlopříčkou AC, neboť vrcholu C se dokazované tvrzení netýká — může jím dokonce být i vnitřní bod úsečky MQ). V takto upřesněné situaci objevíme díky Thaletově větě hned tři tětivové čtyřúhelníky: prvním je čtyřúhelník $ABQD$, jemuž lze opsat Thaletovu kružnici s průměrem AB a uvnitř kterého nutně leží i bod M, a dalšími dvěma jsou $APMD$ a $BPMQ$. V obrázku jsou zároveň vyznačeny shodné obvodové úhly. Jedním obloučkem shodné úhly nad tětivou DQ ve čtyřúhelníku $ABQD$ a s nimi shodný nad tětivou DM ve čtyřúhelníku $APMD$, jakož i druhý nad tětivou MQ ve čtyřúhelníku $BPMQ$. Dvěma obloučky pak shodné úhly nad tětivou BQ opět ve čtyřúhelníku $ABQD$ a s nimi shodný nad tětivou MP ve čtyřúhelníku $APMD$.



Obr. 2

Výsledkem je, že v trojúhelníku PQD platí $|\sphericalangle DPM| = |\sphericalangle QPM|$ a $|\sphericalangle PDM| = |\sphericalangle QDM|$, tudíž bod M je průsečíkem dvou os vnitřních úhlů trojúhelníku PQD, kteroužto vlastnost má právě střed jeho vepsané kružnice.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Připomeňte si Thaletovu větu a obecnější poznatek o obvodových a středových úhlech v dané kružnici.

N2. V soutěžní úloze objevte tři čtveřice pojmenovaných bodů, které leží vždy na jedné kružnici.

D1. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [57–B–II–3]

D2. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X. Průsečík úsečky XC se stranou AB označíme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označíme Z. Ukažte, že $YZ \perp AC$. [Nalezněte skrytou čtveřici bodů, co leží na jedné kružnici.]

D3. Pomocí počítání velikostí úhlů dokažte, že výšky v ostroúhlém trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. [Označme postupně D a E paty výšek z vrcholů A a B, dále P průsečík úseček AD a BE a X průsečík CP a AB. Dokážeme, že přímka CP je kolmá na AB. Čtyřúhelníky $ABDE$ a $CDPE$ jsou tětivové, protože jejich vrcholy leží na Thaletových kružnicích s průměry AB a CP. Proto úhly BAD, BED, PCD mají všechny stejnou velikost $90° - |\sphericalangle ABC|$. Úhel CXB, který dopočítáme ze známých velikostí zbývajících úhlů v trojúhelníku CXB, je tedy pravý.]

6. *Konečnou množinu přirozených čísel nazveme* pěknou*, jestliže k výpisu těchto čísel v desítkové soustavě potřebujeme sudý počet každé ze zastoupených číslic. Pěknými množinami jsou například* $\{11, 13, 31\}$*,* $\{10, 100, 110\}$ *a také prázdná množina. Určete, kolik je všech pěkných podmnožin množiny* $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$*.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Množinu $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ ze zadání rozdělíme na dvě části

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}, \quad \mathsf{B} = \{11, 12, \ldots, 2\,018\}$$

a ukážeme, že hledaný počet všech pěkných podmnožin množiny M je roven počtu *všech* podmnožin množiny B (včetně prázdné množiny). Protože množina B má $2\,018 - 10 = 2\,008$ prvků, bude tento počet roven číslu $2^{2\,008}$, neboť obecně každá n-prvková množina má právě 2^n podmnožin (stačí uplatnit pravidlo součinu ke skutečnosti, že pro každý z n prvků máme dvě možnosti: buď ho do konstruované podmnožiny zahrnout, či nikoli).

Úvodní tvrzení ověříme, když ukážeme, že každá pěkná podmnožina P dané množiny M je jednoznačně určena svou částí ležící v B, tedy množinou $\mathsf{Q} = \mathsf{P} \cap \mathsf{B}$, a že naopak ke každé množině $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{B}$ se najde pěkná množina $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{M}$, pro kterou $\mathsf{Q} = \mathsf{P} \cap \mathsf{B}$. Bude to znamenat, že mezi množinou všech pěkných podmnožin M a množinou všech podmnožin B existuje bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení), takže obě množiny mají stejný počet prvků.

Popišme tedy, jak lze kteroukoli pevně zvolenou pěknou množinu $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{M}$ jednoznačně rekonstruovat podle její části $\mathsf{Q} = \mathsf{P} \cap \mathsf{B}$, tj. určit její druhou část $\mathsf{P} \cap \mathsf{A}$. Jinými slovy, podle známé množiny Q máme rozhodnout, které z nejmenších čísel tvořících množinu A do pěkné množiny P patří a které ne. Jednoduše to zjistíme pro každou z číslic $c \in \{2, 3, \ldots, 9\}$: protože počet výskytů číslice c v zápisu všech čísel z P je sudý, číslo c do P patří, právě když je počet číslic c v zápisu všech čísel z části Q lichý (neboť zmíněné dva počty se mohou lišit nejvýše o 1). Stejnou úvahou o počtu nul můžeme rozhodnout, zda do množiny P patří číslo 10. Majíce tuto informaci o čísle 10, můžeme učinit (podle počtu jedniček) i poslední rozhodnutí, a to zda v P leží číslo 1. Tím je rekonstrukce celé množiny P hotova.

Postup z předchozího odstavce můžeme zřejmě celý úspěšně uplatnit k *libovolné* podmnožině Q množiny B (aniž předem víme, že dotyčná pěkná množina P existuje, takže namísto o rekonstrukci půjde o její konstrukci). Sestavíme tak pěknou množinu $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{M}$, která vznikne z množiny Q přidáním některých (výše přesně určených) čísel z A a pro niž bude platit rovnost $\mathsf{Q} = \mathsf{P} \cap \mathsf{B}$, jak jsme si přáli. Tím je řešení celé úlohy hotovo.

Odpověď. Hledaný počet pěkných podmnožin je 2^{2008}.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Ve všech úlohách se jedná o pěkné množiny ve smyslu soutěžní úlohy.

N1. Neznámá pěkná množina P obsahuje právě tato vícemístná čísla: 13, 21, 34, 55, 89. Najděte všechna jednomístná čísla, která patří do P. [Právě čísla 2, 4, 8 a 9, každá z ostatních číslic je totiž v daných pěti dvojmístných číslech zastoupena v sudém počtu exemplářů.]

N2. Kolik pěkných podmnožin má množina

$$\{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}?$$

[$4^3 = 64$. Každá ze tří daných trojic čísel $\overline{c}, \overline{cc}, \overline{ccc}$ má v pěkné množině čtyři možná zastoupení: $\emptyset$, $\{\overline{cc}\}$, $\{\overline{c}, \overline{ccc}\}$ nebo $\{\overline{c}, \overline{cc}, \overline{ccc}\}$. Jiné řešení: každá z dotyčných pěkných množin je určena svými vícemístnými čísly, která mohou spolu vytvořit libovolnou z 2^6 podmnožin množiny $\{11, 22, 33, 111, 222, 333\}$.]

N3. Kterými konečnými množinami Q vícemístných čísel můžeme zaměnit množinu $\{13, 21, 34, 55, 89\}$ v zadání N1 tak, aby úloha měla řešení? [V zápisech všech čísel z Q musí být číslice 0 zastoupena v sudém počtu, a to je jediná podmínka na Q, neboť podle parit počtů zastoupení ostatních číslic 1 až 9 pak určíme, která z čísel 1 až 9 do kýžené pěkné množiny budou patřit a která ne.]

N4. Kolik pěkných podmnožin má množina

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}?$$

[32. Dvojmístná čísla z každé dotyčné pěkné množiny mohou tvořit libovolnou z 2^5 podmnožin pětiprvkové množiny $\{11, 13, 15, 17, 19\}$.]

N5. Kolik pěkných podmnožin má množina

$$\{1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30\}?$$

[256. Čísla *větší než* 10 z každé dotyčné pěkné množiny mohou tvořit libovolnou z 2^8 podmnožin osmiprvkové množiny

$$\{11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30\}.$$

(Číslo 10 bude patřit do pěkné podmnožiny tehdy a jen tehdy, když tam bude patřit právě jedno z čísel 20 a 30.)]