Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Neznámé číslo je dělitelné právě čtyřmi čísly z množiny* $\{6, 15, 20, 21, 70\}$. *Určete, kterými.* (Michal Rolínek)

ŘEŠENÍ. Pokud by mezi hledanými čtyřmi čísly byla současně čísla 20 i 21, bylo by neznámé číslo násobkem tří, čtyř, pěti a sedmi, a tudíž by bylo dělitelné i čísly 6, 15, 70, což odporuje požadavkům úlohy. Do hledané čtveřice tak jedno z čísel 20, 21 nepatří, a proto tam patří všechna tři čísla 6, 15, 70. Každý společný násobek čísel 6 a 70 je dělitelný jak třemi, tak sedmi, a tudíž i jednadvaceti. Proto je čtvrtým hledaným číslem číslo 21.

Hledanými čtyřmi čísly jsou čísla 6, 15, 21, 70. Jejich nejmenší společný násobek je 210, což je číslo, které není dělitelné zbývajícím číslem 20. (Neznámým číslem tak může být i libovolný násobek $210l$, kde l je liché.) Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Úlohu lze řešit systematicky tak, že nejprve vypíšeme všech pět čtyřprvkových podmnožin, tedy množiny

$$\mathsf{A} = \{15, 20, 21, 70\}, \quad \mathsf{B} = \{6, 20, 21, 70\}, \quad \mathsf{C} = \{6, 15, 21, 70\},$$
$$\mathsf{D} = \{6, 15, 20, 70\}, \quad \mathsf{E} = \{6, 15, 20, 21\},$$

a zjistíme, která z nich může splňovat podmínky úlohy, tedy že existuje číslo N, mezi jehož dělitele patří všechny čtyři prvky uvažované množiny, zatímco vynechané páté číslo jeho dělitelem není. Tak všechny množiny kromě C postupně vyloučíme, kupříkladu množinu A: je-li N dělitelné oběma čísly $15 = 3 \cdot 5$ a $20 = 2 \cdot 10$, je dělitelné i číslem $2 \cdot 3 = 6$, tedy $6 \in \mathsf{A}$, a to je spor. Podobně dojdeme ke sporům $15 \in \mathsf{B}$, $21 \in \mathsf{D}$ a $70 \in \mathsf{E}$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

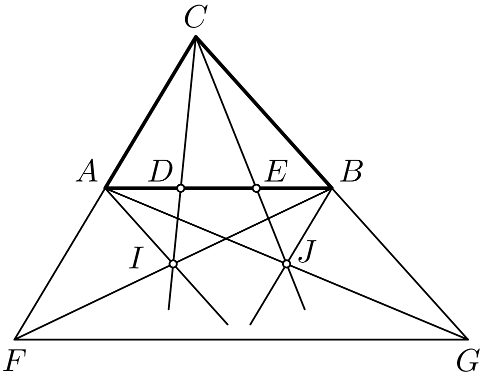
N1. Určete pět přirozených čísel, jejichž součet je 20 a jejichž součin je 420. [Protože $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1 + 4 + 3 + 5 + 7 = 20$ a hledaná čísla, jež jsou násobky 5 a 7, musejí být jednociferná (součet ostatních tří čísel je aspoň 6), jsou dvě z hledaných čísel přímo čísla 5 a 7 a zbylá tři (ne nutně různá) leží v množině $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, přitom jejich součet je 8 a součin 12, takže jde o trojici 1, 3, 4.]

N2. Jisté přirozené číslo má právě čtyři dělitele, jejichž součet je 176. Určete toto číslo, víte-li, že součet všech jeho číslic je 12. [Hledané číslo n je dělitelné třemi a větší než 9, proto jeho čtyřmi děliteli jsou právě čísla $1 < 3 < n/3 < n$. Odtud vychází $n = 129$.]

D1. Dané celé číslo je dělitelné alespoň čtyřmi čísly z množiny $\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$. Dokažte, že je dělitelné každým z nich. [Všimněme si, že $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ a $15 = 3 \cdot 5$. Proto je-li dotyčné číslo dělitelné všemi třemi čísly 2, 3 a 5, je dělitelné i všemi zbylými čísly 6, 10 a 15. V opačném případě by bylo dělitelné nejvýše dvěma z čísel 2, 3 a 5, a proto alespoň dvěma z čísel 6, 10 a 15, a tedy i každým z prvočísel 2, 3 a 5, a to je spor.]

2. *Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC jsou dány body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B jsou po řadě středy úseček CF a CG. Přímka CD protíná přímku FB v bodě I a přímka CE protíná přímku AG v bodě J. Dokažte, že průsečík přímek AI a BJ leží na přímce FG.* (Pavel Calábek)

Řešení. Rovnost $|AD| = |DE|$ znamená, že bod D je střed úsečky AE. Stejně tak je bod E středem BD, a protože body D a E leží uvnitř úsečky AB, dělí ji na třetiny (obr. 1).



Obr. 1

Vzhledem k tomu, že bod D dělí těžnici BA trojúhelníku BCF ve dvou třetinách, je jeho těžištěm. Úsečka CI je tudíž těžnicí trojúhelníku BCF a bod I je středem jeho strany BF. Úsečka AI je tedy střední příčkou trojúhelníku BCF neboli $AI \parallel BC$, a proto přímka AI prochází středem strany FG trojúhelníku CFG.

Podobně vidíme, že bod E je těžištěm trojúhelníku CAG, takže CJ je jeho těžnicí a J je středem jeho strany AG, a proto i přímka BJ rovnoběžná s FC prochází středem úsečky FG. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník (tzv. *Varignonův* rovnoběžník). [Využijte vlastnosti střední příčky v trojúhelníku: úsečky KL a MN jsou středními příčkami po řadě v trojúhelnících ABC a CDA.]

N2. Nechť D je střed strany AB trojúhelníku ABC a E bod jeho strany AC, pro který platí $|AE| = 2|CE|$. Označme F průsečík přímek BE a CD. Dokažte, že platí $|BE| = 4|EF|$. [Označme M střed úsečky AE. Úsečka EF je střední příčkou v trojúhelníku CMD a úsečka MD je střední příčkou v trojúhelníku ABE.]

D1. Nechť E, F jsou po řadě středy stran AB, CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že platí $|BC| + |AD| \geqq 2|EF|$. [Uvažujte střed M úhlopříčky AC a úsečky EM a FM, které jsou středními příčkami v trojúhelnících ABC a ACD.]

3. *Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(Patrik Bak)

Řešení. Pro uvažovaná kladná reálná čísla a, b, c vzhledem k předpokladům úlohy platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = 3^2 = 9.$$

Stačí tedy dokázat, že je splněna nerovnost $2ab+2bc+2ca > 3abc$. Ta je však ekvivalentní s nerovností

$$ab(2 - c) + bc(2 - a) + ca(2 - b) > 0,$$

která evidentně platí pro všechna kladná reálná čísla a, b, c, která nejsou větší než 2 a zároveň nemohou být (vzhledem k podmínce $a + b + c = 3$) všechna rovna 2. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Protože žádné z daných kladných čísel a, b, c nepřevyšuje číslo 2, platí zřejmě nerovnosti $a^2 \leqq 2a$, $b^2 \leqq 2b$ a $c^2 \leqq 2c$. Jejich sečtením dostaneme nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqq 2(a + b + c) = 2 \cdot 3 = 6,$$

přitom rovnost je vyloučena, neboť by muselo platit $a = b = c = 2$, což odporuje předpokladu $a + b + c = 3$. Proto k důkazu nerovnosti ze závěru soutěžní úlohy stačí ověřit odhad $3abc \leqq 9 - 6$ neboli $abc \leqq 1$, který je však okamžitým důsledkem tzv. nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\sqrt[3]{abc} \leqq \frac{a + b + c}{3}.$$

Tato nerovnost jak známo platí obecně pro libovolnou trojici nezáporných čísel a, b, c, přitom rovnost nastane jedině v případě $a = b = c$. (V zadané úloze je aritmetický průměr čísel a, b, c roven 1, takže platí $\sqrt[3]{abc} \leqq 1$ neboli $abc \leqq 1$.)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro reálná čísla se součtem 3 platí navíc $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Jaké hodnoty může nabývat výraz $ab + bc + ca$? [Jelikož $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$, je nutně $ab + bc + ca = 2$. Hodnota je dosažitelná díky trojici $(2, 1, 0)$.]

N2. Nezáporná reálná čísla a, b, c jsou všechna nejvýše rovna 1. Dokažte, že $3abc \leqq a+b+c$. Kdy nastane rovnost? [Upravíme na $a(1 - bc) + b(1 - ac) + c(1 - ab) \geqq 0$, výrazy v závorkách jsou nezáporné. Rovnost nastane, právě když buď $a = b = c = 0$, nebo $a = b = c = 1$.]

D1. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$. Kdy nastane rovnost? [Nerovnost je ekvivalentní s $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$, která jistě platí. Rovnost nastane jedině v případě $a = b = c$.]

D2. Reálná čísla a, b, c mají součet 3. Dokažte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kdy nastane rovnost? [Plyne z rovnosti $9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ a z předešlé úlohy. Rovnost nastane jedině v případě $a = b = c = 1$.]

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 \geqq 4y(x + z),$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. [Anulujte pravou stranu dané nerovnosti a upravte ji následně do tvaru $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) \geqq 0$, kde na levé straně je nezáporný součet $(x - 2y)^2 + (y - 2z)^2$. Rovnost zde nastane, právě když platí $(x, y, z) = (4c, 2c, c)$, kde c je libovolné reálné číslo.]

D4. Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnost

$$3a^2 + 2bc > 2ab + 2ac.$$

[Danou nerovnost upravte na tvar $a^2 - (b - c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 > 0$ a rozdíl prvních dvou druhých mocnin nahraďte příslušným součinem.]

4. *Každé pole tabulky 2×13 obarvíme právě jednou ze čtyř barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? (Za sousední považujeme právě ta pole tabulky, která mají společnou stranu.)*

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Pole prvního sloupce tabulky můžeme za daných podmínek obarvit právě $4 \cdot 3 = 12$ způsoby. Sousední sloupec pak lze podle zadání úlohy obarvit právě $3^2 - 2$ způsoby, neboť každé pole v něm můžeme s ohledem na sousední sloupec obarvit jednou ze tří zbylých barev, od výsledného počtu 3^2 možností však musíme odečíst oba případy, kdy bychom v tomto sloupci dostali pod sebou dvě stejně obarvená pole (jde právě o ty dvě barvy nepoužité v prvním sloupci).

Analogicky můžeme pokračovat v postupném obarvování dalších sloupců, přičemž u každého z nich máme opět vždy 3^2-2 možností. Počty možností pro jednotlivé sloupce nakonec mezi sebou vynásobíme, abychom dostali hledaný počet způsobů vyhovujících obarvení celé tabulky.

Závěr. Celkově existuje $12 \cdot (3^2-2)^{13-1} = 12 \cdot 7^{12}$ možností pro obarvení polí tabulky 2×13 požadovaným způsobem.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kolika způsoby lze obarvit pole tabulky 2×3 dvěma různými barvami tak, že každé pole je obarveno jednou barvou? [Pro každé pole tabulky existují vždy 2 možnosti obarvení, pro celou tabulku máme tedy $2^6 = 64$ možností.]

N2. Každé pole tabulky 13×13 obarvíme právě jednou ze dvou barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? [2 možnosti.]

N3. Každé pole tabulky 2×2 obarvíme právě jednou ze tří barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? [Pro obarvení prvních dvou sousedních polí máme 6 možností, pro zbývající pole pak už jen tři možnosti, celkem $6 \cdot 3 = 18$ možností.]

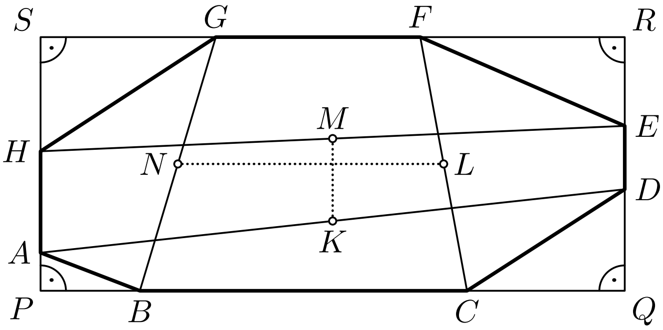
D1. Určete, kolika způsoby lze obarvit pole tabulky 3×3 třemi různými barvami (každé pole právě jednou barvou) tak, aby v každém řádku a každém sloupci byly použity všechny tři barvy. [Existuje 12 možností. První sloupec obarvíme celkem $3 \cdot 2 = 6$ způsoby, pro druhý sloupec máme s ohledem na podmínky úlohy pouze 2 možnosti. Obarvení polí posledního, třetího sloupce je tím už jednoznačně určeno. Celkově tak máme $3\cdot 2\cdot 2 = 12$ možností.]

5. *Nechť α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω značí po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D, E, F, G, H konvexního osmiúhelníku $ABCDEFGH$, v němž platí*

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta=\varepsilon+\varphi=\psi+\omega.$$

Označme dále K, L, M, N po řadě středy úhlopříček AD, CF, EH, GB. Dokažte, že přímky KM a LN jsou navzájem kolmé. (Josef Tkadlec)

Řešení. Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního osmiúhelníku je $6\cdot 180° = 1\,080°$, takže každý ze součtů čtyř dvojic sousedních úhlů ze zadání úlohy je roven $1\,080° : 4 = 270°$, což zároveň znamená, že všech osm vnitřních úhlů je tupých. Označme postupně P, Q, R a S průsečíky dvojic přímek stran sousedících se stranami AB, CD, EF a GH (obr. 2). Pak platí $|\sphericalangle APB| = 180° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = (\alpha+\beta) - 180° = 90°$, takže přímky BC a AH jsou na sebe kolmé. Podobně dokážeme, že $BC \perp DE$, $ED \perp FG$ a také $FG \perp AH$. Průsečíky přímek, na nichž leží strany AH, BC, DE a FG, tedy tvoří vrcholy pravoúhelníku $PQRS$.



Obr. 2

Body K a M jsou tudíž středy příček AD a EH ($K \neq M$) pásu omezeného rovnoběžkami PS a QR, a proto leží na jeho ose. Podobně body L a N ($L \neq N$) jsou středy příček CF a GB, a leží tak na ose pásu omezeného rovnoběžkami PQ a RS. Vzhledem k tomu, že osy obou pásů jsou na sebe kolmé, jsou na sebe kolmé i přímky KM a LN, což jsme měli dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro libovolné přirozené $n \geqq 3$ odvoďte vzorec pro součet s_n velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku. [$s_n = (n-2) \cdot 180°$]

N2. V rovině je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran AB, CD a EF se protínají v jednom společném bodě. [Průsečíky přímek BC, DE a FA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Osy jeho vnitřních úhlů jsou totožné s osami úseček AB, CD a EF.]

N3. V rovině je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, EA a osa vnitřního úhlu při vrcholu D se protínají v jednom společném bodě. [Průsečíky přímek AB, CD a DE tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku s hlavním vrcholem D. Osy vnitřních úhlů při jeho základně jsou totožné s osami úseček BC a EA.]

6. *Najděte všechna trojmístná čísla n s třemi různými nenulovými číslicemi, která jsou dělitelná součtem všech tří dvojmístných čísel, jež dostaneme, když v původním čísle vyškrtneme vždy jednu číslici.* (Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Hledáme trojmístná čísla $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, která jsou dělitelná součtem

$$\overline{bc} + \overline{ac} + \overline{ab} = (10b + c) + (10a + c) + (10a + b) = 20a + 11b + 2c,$$

kde $\{a, b, c\}$ je tříprvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$. To nastane, právě když existuje přirozené číslo k takové, že

$$100a + 10b + c = k(20a + 11b + 2c)$$

neboli

$$(100 - 20k)a = (11k - 10)b + (2k - 1)c. \tag{1}$$

Protože pravá strana poslední rovnice je kladná, musí (s ohledem na tvar levé strany) platit $k \leqq 4$. Možné hodnoty k nyní prozkoumáme jednotlivě.

- $k = 1$. Z (1) máme rovnici $80a = b+c$, která nemá řešení, neboť $80a \geqq 80$ a $b+c \leqq 17$.
- $k = 2$. Z (1) obdržíme rovnici $60a = 12b+3c$ neboli $20a = 4b+c$. Protože $4b+c \leqq 44$, je $a \leqq 2$. Navíc z rovnice plyne, že číslo c musí být násobkem čtyř, tedy $c \in \{4, 8\}$, což v obou případech $a = 1$, $a = 2$ s výhodou využijeme.
  Pro $a = 1$ máme $20 = 4b+c$ s jedinou vyhovující dvojicí různých číslic $b = 3$, $c = 8$, které odpovídá $n = 138$.
  Pro $a = 2$ máme $40 = 4b+c$ s jedinou vyhovující dvojicí různých číslic $b = 9$, $c = 4$, které odpovídá $n = 294$.
- $k = 3$. Z (1) máme rovnici $40a = 23b + 5c$. Podle dělitelnosti pěti může být jedině $b = 5$. Dostaneme tak $40a = 23 \cdot 5 + 5c$ neboli $8a = 23 + c$ s dvěma vyhovujícími dvojicemi (a, c) rovnými $(3, 1)$ a $(4, 9)$, kterým odpovídají dvě hledaná n, a to $n = 351$ a $n = 459$.
- $k = 4$. Z (1) dostaneme rovnici $20a = 34b + 7c$ neboli $20(a - b) = 7(2b + c)$. Protože čísla 20 a 7 jsou nesoudělná a pravá strana je kladná, musí být $a - b$ kladný násobek sedmi, takže $a - b = 7$ a $2b + c = 20$. Taková soustava nemá řešení, neboť podle první rovnice je $b \leqq 2$, a tudíž $2b + c \leqq 4 + 9 = 13$.

Závěr. Dané úloze vyhovují čtyři trojmístná čísla, a to 138, 294, 351 a 459.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna trojmístná čísla, která jsou jedenáctkrát větší než jejich ciferný součet. [198, z rovnosti $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$ upravené do tvaru $89a = b + 10c$ plyne $a = 1$, takže $b = 9$ a $c = 8$.]

N2. Určete všechna trojmístná čísla, která jsou sedmkrát větší než dvojmístné číslo, které vznikne z daného čísla vyškrtnutím jeho prostřední číslice. [105, z rovnosti $100a+10b+ + c = 7(10a + c)$ upravené do tvaru $5(3a + b) = 3c$ plyne $c = 5$.]

N3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, pro něž platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$. [65–C–S–1]

D1. Určete největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo. [67–C–S–1]

D2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi. [67–C–I–1]