ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
69. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2019/2020)

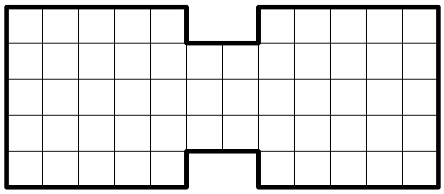
Kategorie A

1. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokažte, že pak nutně platí $a > c > d > b$. (*Michal Rolínek*)

2. Dokažte, že počet možností, jak lze útvar na obrázku vydláždit dominovými kostkami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kostka pokrývá vždy dvě políčka sousedící stranou.) (*Josef Tkadlec*)



3. Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body P a Q. Označme R průsečík přímek BQ a CP a p, q, r postupně vzdálenosti bodů P, Q, R od přímky BC. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(*Patrik Bak*)

4. Řekneme, že podmnožina P množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 42\}$ je *polovičatá*, pokud obsahuje 21 prvků a každé z 42 čísel v množinách P a $\mathsf{Q} = \{7x;\, x \in \mathsf{P}\}$ dává při dělení číslem 43 jiný zbytek. Určete počet polovičatých podmnožin množiny M. (*Josef Tkadlec*)

5. V rovině jsou dány dva různé body O a A. Určete množinu ortocenter všech trojúhelníků ABC, pro něž je bod O středem kružnice opsané. (*Pavel Šalom*)

6. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je roven mocnině některého prvočísla. (*Jaromír Šimša*)

Kategorie B

1. V reálném oboru uvažujme soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálným parametrem a.

a) Najděte všechny hodnoty a, pro které má uvedená soustava řešení.

b) Dokažte, že pro libovolné řešení (x, y) této soustavy platí $x^2 + |y| \geqq 4$. Kdy v této nerovnosti nastane rovnost? *(Ján Mazák)*

2. Přirozené číslo n má aspoň 73 dvojmístných dělitelů. Dokažte, že jedním z nich je číslo 60. Uveďte rovněž příklad čísla n, které má právě 73 dvojmístných dělitelů, včetně náležitého zdůvodnění. *(Josef Tkadlec)*

3. Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:

a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.

b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$. *(Jaroslav Švrček)*

4. Nechť p, q jsou daná nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že pokud má rovnice

$$px^2 - (p + q)x + p = 0$$

celočíselný kořen, potom má celočíselný kořen i rovnice

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(Patrik Bak)

5. Jsou dány kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, které se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná vnější tečna se dotýká kružnice a v bodě T_a a kružnice b v bodě T_b. Pomocí r_a, r_b vyjádřete poměr poloměrů kružnic k_a, k_b opsaných po řadě trojúhelníkům T_aAT, T_bBT. *(Šárka Gergelitsová)*

6. Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici 8×8 tak, aby se střelci navzájem neohrožovali. *(Ján Mazák)*

Kategorie C

1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. (*Patrik Bak*)

2. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož všechny strany jsou shodné a protější strany rovnoběžné. Bod P je takový, že čtyřúhelník $CDEP$ je rovnoběžník. Dokažte, že bod P je středem kružnice opsané trojúhelníku ACE a současně i průsečíkem výšek trojúhelníku BDF. (*Jakub Löwit*)

3. Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro něž platí

$$2[a, b] + 3(a, b) = ab,$$

kde $[a, b]$ značí nejmenší společný násobek a (a, b) největší společný dělitel přirozených čísel a a b. (*Jaroslav Švrček*)

4. Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Označme M střed strany BC a předpokládejme, že rovnoběžka s přímkou AK vedená bodem M protne stranu AC ve vnitřním bodě L. Dokažte, že přímka KL dělí trojúhelník ABC na dvě části stejného obsahu. (*Josef Tkadlec*)

5. Tabulku 3×3 máme vyplnit devíti danými čísly tak, aby v každém řádku i sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou. Rozhodněte, zda je možné takový úkol splnit s čísly
a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Pokud ano, zjistěte, kolika způsoby lze úkol splnit tak, aby největší číslo bylo uprostřed tabulky. (*Jaromír Šimša*)

6. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. Najděte největší možnou hodnotu součtu $a + b + c$. (*Ján Mazák*)