69. ročník Matematické olympiády (2019/2020)

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Pro kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí*

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokažte, že pak nutně platí $a > c > d > b$. (Michal Rolínek)

Řešení. Předně si uvědomme, že stačí dokázat $a > c$, což ve spojení s předpokladem $ab < cd$ povede k nerovnostem $cd > ab > bc$, odkud po vydělení krajních součinů číslem c vyjde $d > b$, a tudíž celkově $a > c > d > b$.

Za tímto účelem nerovnost pro součty přepíšeme do tvaru $b > c+d-a$ a s využitím nerovnosti pro součiny tak získáme

$$cd > ab > a(c + d - a) = ac + ad - a^2.$$

Získanou nerovnost mezi krajními výrazy snadno upravíme do součinového tvaru

$$(a - c)(a - d) > 0.$$

K dokončení důkazu nerovnosti $a > c$ nám tak zbývá vyloučit současnou platnost nerovností $a < c$ a $a < d$. V takovém případě by však díky nerovnosti $b < a$ platilo $b < c$ a $b < d$, čímž bychom dostali spor s nerovností $a + b > c + d$.

Jiné řešení. Nerovnost $a > c$ lze ukázat i následovně. Ke dvojici (a, b) určíme dvojici (x, δ) kladných čísel takovou, že $a = x + \delta$, $b = x - \delta$, totiž $x = \frac{1}{2}(a + b)$ a $\delta = \frac{1}{2}(a - b)$. Podobně určíme kladná y, ε tak, že $c = y + \varepsilon$, $d = y - \varepsilon$. Vztahy ze zadání pak přepíšeme jako

$$x > y, \qquad x^2 - \delta^2 < y^2 - \varepsilon^2$$

a jejich kombinací získáme

$$\delta^2 - \varepsilon^2 > x^2 - y^2 > 0,$$

tudíž $\delta > \varepsilon$. Konečně tak máme

$$a = x + \delta > y + \varepsilon = c.$$

Jsme hotovi.

Poznámka. Ukažme, že rozhodující nerovnost $a > c$ můžeme právě popsaným postupem odvodit, aniž bychom zaváděli nějaké substituce. Ze zadání úlohy plynou nerovnosti

$$(a + b)^2 > (c + d)^2 \quad \text{a} \quad -4ab > -4cd,$$

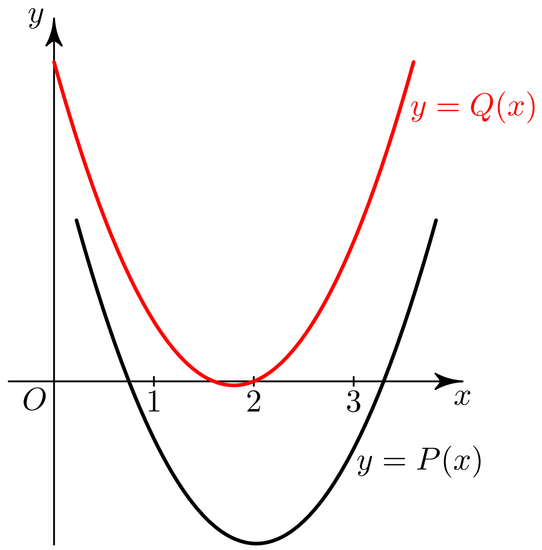
jejichž sečtením dostaneme $(a-b)^2 > (c-d)^2$. Protože základy obou posledních mocnin jsou kladné, plyne odtud nerovnost $a-b > c-d$. Jejím sečtením s nerovností $a+b > c+d$ a následným vydělením dvěma už dostaneme potřebný závěr $a > c$.

Jiné řešení. Zadané nerovnosti využijeme k porovnání dvou kvadratických trojčlenů. Označme $P(x) = (x-a)(x-b)$ a $Q(x) = (x-c)(x-d)$. Pak pro libovolné $x > 0$ platí

$$P(x) = x^2 - (a+b)x + ab < x^2 - (c+d)x + cd = Q(x).$$

Jelikož pro kladné x, jež neleží v intervalu (b, a), platí $P(x) \geqq 0$, platí také $Q(x) > P(x) \geqq 0$, žádné takové x proto nemůže být kořenem trojčlenu $Q(x)$. Kladné kořeny c, d tohoto trojčlenu tak musejí ležet uvnitř intervalu (b, a). Z toho již plynou dokazované nerovnosti $a > c > d > b$.

Pro názornost uvádíme i grafické znázornění situace (obr. 1).



$b = 0{,}75 < d = 1{,}6 < c = 2 < a = 3{,}3$

Obr. 1

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Součet kladných čísel a, b je nejvýše 16. Jaká je největší možná hodnota jejich součinu? [64. Do součinu ab dosaďte vyjádření $a = p + \varepsilon$ a $b = p - \varepsilon$, kde $p \leqq 8$ je aritmetický průměr čísel a a b.]

N2. Součin kladných čísel a, b je alespoň 16. Jaká je nejmenší možná hodnota jejich součtu? [8. Použijte stejné vyjádření čísel a, b jako v N1 a ukažte, že z $ab \geqq 16$ plyne $p \geqq 4$.]

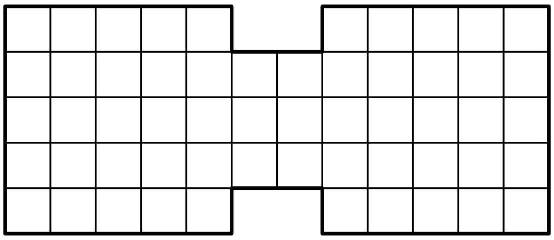
D1. Reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 splňují $a_1 > a_2$ a $b_1 > b_2$. Ukažte, že $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$. [Dokazovanou nerovnost ekvivalentně upravte na $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0$.]

D2. [Permutační nerovnost] Nechť $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ jsou reálná čísla a nechť y_1, $y_2, \ldots, y_n$ je nějaké pořadí pevně daných navzájem různých reálných čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom je výraz

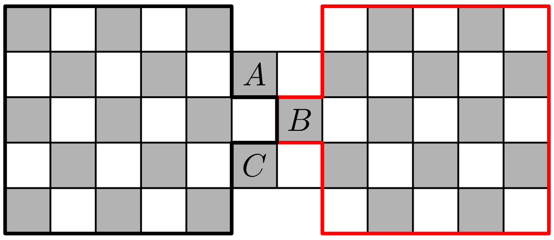
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

maximální, právě když je $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Dokažte. [Stačí ukázat, že uspořádání, která nesplňují $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$, lze vylepšit „prohozením“ jedné dvojice. To řeší úloha D1, která je vlastně úlohou D2 pro $n = 2$.]

2. *Dokažte, že počet možností, jak lze útvar na obrázku vydláždit dominovými kostkami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kostka pokrývá vždy dvě políčka sousedící stranou.)* (Josef Tkadlec)



Řešení. Políčka daného útvaru šachovnicově obarvíme. O útvaru U sestávajícím z levého čtverce 5×5 spolu s jedním políčkem navíc (jako na obr. 2), ukážeme, že je nutně také beze zbytku (a bez překryvu) vydlážděn.



Obr. 2

Označme V útvar, který pokrývají ty dominové kostky, jež zasahují do útvaru U. Jelikož dominová kostka zakryje jedno bílé a jedno černé pole, má útvar V stejný počet černých a bílých polí. Totéž ovšem platí i pro útvar U, jak snadno ověříme. Protože V však může oproti U obsahovat navíc jen ta tři pole sousedící s U (na obr. 2 označená A, B, C), která jsou všechna černá, není jiná možnost, než že $\mathsf{U} = \mathsf{V}$. Skutečně tak platí, že každé dláždění celého útvaru obsahuje jako svou část dláždění útvaru U.

Podobně můžeme argumentovat pro souměrně sdružený útvar U' na pravé straně. Nakonec si stačí uvědomit, že každé dláždění celého obrazce je jednoznačně určeno tím, jak jsou vydlážděny útvary U a U'. (Vzhledem k úplnému vydláždění útvaru $\mathsf{U} \cup \mathsf{U}'$ je už jednoznačně určena poloha dvou dominových kostek, jež pokrývají zbytek daného útvaru s poli A a C.)

Pokud označíme n počet dláždění útvaru U, bude celkový počet možností, kterak vydláždit zadaný útvar, roven n^2. Tím jsme ukázali, že hledaný počet způsobů je roven druhé mocnině přirozeného čísla.

Poznámka. Pro zajímavost uvádíme, že přesný počet dláždění lze spočítat s pomocí počítače. Výsledek je $36\,864 = 192^2$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že počet způsobů, jak lze na šachovnici 8×8 umístit maximální počet střelců tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali, je druhá mocnina přirozeného čísla. [Nepočítejte, pouze rozdělte na dvě podúlohy — rozmístění střelců na černá a na bílá políčka jsou navzájem nezávislá.]

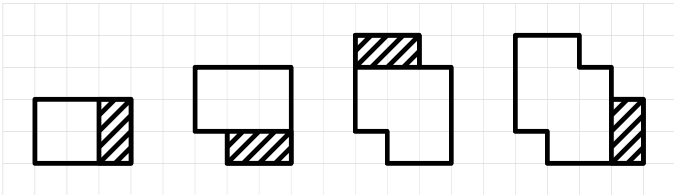
N2. Kolika způsoby lze vydláždit dominovými kostkami šachovnici 8×8, z níž jsou odříznuta dvě protější rohová pole? [Nelze žádným způsobem: jsou-li odříznutá pole bílá, je třeba pokrýt 30 bílých a 32 černých polí, přitom libovolně umístěná kostka domina pokryje vždy 1 bílé a 1 černé pole.]

D1. Kolika způsoby lze pokrýt dominovými kostkami obdélník 2×10? [Postupujte indukcí pro obdélníky $2 \times n$. Najdete tak souvislost s Fibonacciho čísly v podobě rovností

$p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, kde $p(n)$ značí počet možných vydláždění obdélníku $2 \times n$. Výsledek je 89.]

D2. Mějme šachovnici 8×8 a ke každé „hraně“, která odděluje dvě její políčka, napišme přirozené číslo, jež udává počet způsobů, kterak lze celou šachovnici rozřezat na obdélníčky 2×1 tak, aby dotyčná hrana byla součástí řezu. Určete poslední číslici součtu všech takto napsaných čísel. [63–A–III–3. Jaký je příspěvek jednoho vydláždění do celkového součtu?]

D3. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje útvar, který lze kostkami domina vydláždit přesně n způsoby. [Postupujte indukcí. Stačí vhodně „přilepovat“ stále stejný kus.]



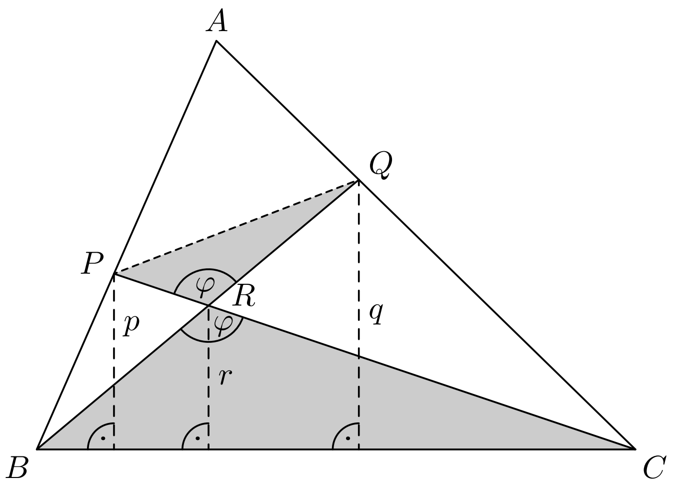
3. *Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body P a Q. Označme R průsečík přímek BQ a CP a p, q, r postupně vzdálenosti bodů P, Q, R od přímky BC. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(Patrik Bak)

Řešení. Dokazovanou nerovnost budeme v průběhu řešení ekvivalentně upravovat. Začneme úpravou do tvaru

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} > 1. \tag{1}$$



Obr. 3

Díky zřejmé podobnosti pravoúhlých trojúhelníků (obr. 3) platí

$$\frac{r}{p} = \frac{|CR|}{|CP|} = \frac{|CR|}{|CR| + |PR|}$$

a podobně také

$$\frac{r}{q} = \frac{|BR|}{|BQ|} = \frac{|BR|}{|BR| + |RQ|}.$$

Nerovnost (1) tak přepíšeme jako

$$\frac{|CR|}{|CR| + |PR|} + \frac{|BR|}{|BR| + |RQ|} > 1,$$

což lze dále (ekvivalentně) upravit roznásobením a odečtením shodných členů do tvaru

$$|BR| \cdot |CR| > |RQ| \cdot |PR|. \tag{2}$$

Součiny na obou stranách nerovnosti (2) nám připomenou známý vzorec na výpočet obsahu trojúhelníka $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Proto vynásobíme obě strany nerovnosti (2) kladným číslem $\frac{1}{2}\sin\varphi$, kde φ je společná velikost úhlů BRC a QRP. Výsledná nerovnost

$$\frac{1}{2}\sin\varphi \cdot |BR| \cdot |CR| > \frac{1}{2}\sin\varphi \cdot |RQ| \cdot |PR|$$

pak platí, právě když $S_{BRC} > S_{PRQ}$.

Poslední nerovnost již dokážeme snadno. Jelikož bod C má větší vzdálenost od přímky BP než bod Q, platí $S_{BPC} > S_{BPQ}$. Po odečtení obsahu trojúhelníka BPR od obou stran již získáme kýžené $S_{BRC} > S_{PRQ}$, a důkaz je tak u konce.

Jiné řešení. V tomto řešení budeme pracovat s poměry obsahů. Označíme-li $S_1 = S_{BRC}$, $S_2 = S_{CRQ}$, $S_3 = S_{PRQ}$, $S_4 = S_{BRP}$, můžeme délky p, q, r vyjádřit jako

$$r = \frac{2S_1}{|BC|}, \quad q = \frac{2(S_1 + S_2)}{|BC|}, \quad p = \frac{2(S_1 + S_4)}{|BC|}$$

a následně přepsat dokazovanou nerovnost do tvaru

$$\frac{1}{S_1 + S_4} + \frac{1}{S_1 + S_2} > \frac{1}{S_1},$$

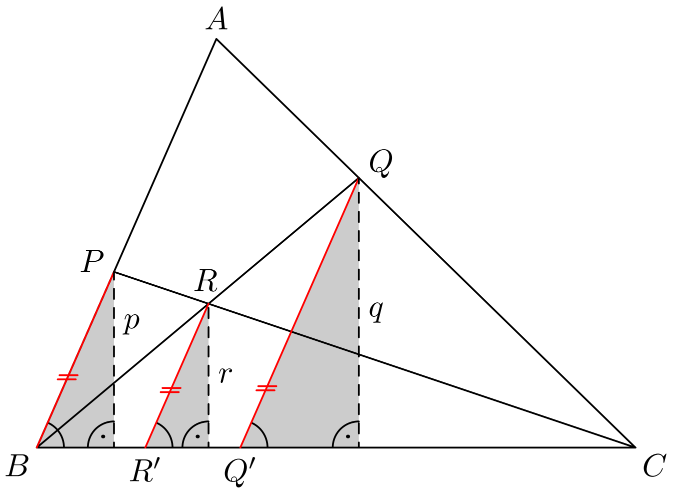
z něhož po provedení ekvivalentních úprav obdržíme

$$S_1^2 > S_2 S_4. \tag{3}$$

Jelikož zároveň pro obsahy S_1, S_2, S_3, S_4 platí známý vztah $S_1 S_3 = S_2 S_4$ (viz úlohu N1), můžeme pravou stranu (3) nahradit výrazem $S_1 S_3$, a po krácení nenulovým obsahem S_1 tak získáme ekvivalentní nerovnost $S_1 > S_3$ neboli $S_{BRC} > S_{PRQ}$. Tu dokážeme stejně jako v prvním řešení.

Jiné řešení. Body R a Q vedeme rovnoběžky se stranou AB a jejich průsečíky s BC označíme postupně R' a Q'. Díky rovnosti úhlů $|\sphericalangle CQ'Q| = |\sphericalangle CR'R| = |\sphericalangle CBA| = \beta$ a vzniklým pravoúhlým trojúhelníkům (obr. 4) můžeme psát

$$p = |BP| \sin\beta, \qquad r = |RR'| \sin\beta, \qquad q = |QQ'| \sin\beta.$$



Obr. 4

Po dosazení do dokazované nerovnosti a vynásobení obou stran kladnou hodnotou $|RR'| \sin\beta$ získáme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{|RR'|}{|BP|} + \frac{|RR'|}{|QQ'|} > 1.$$

Z podobností $\triangle CBP \sim \triangle CR'R$ (*uu*) a $\triangle BQ'Q \sim \triangle BR'R$ (*uu*) obdržíme

$$\frac{|RR'|}{|BP|} = \frac{|CR'|}{|BC|} \quad \text{a} \quad \frac{|RR'|}{|QQ'|} = \frac{|BR'|}{|BQ'|}.$$

A jelikož Q' leží uvnitř úsečky BC, platí $|BQ'| < |BC|$, takže

$$\frac{|RR'|}{|BP|} + \frac{|RR'|}{|QQ'|} = \frac{|CR'|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|} > \frac{|CR'|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BC|} = 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Postup z posledního řešení se zavedenými body R' a Q' lze obměnit tak, že namísto dokazované nerovnosti odvodíme její upřesnění v podobě rovnosti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{v},$$

kde v značí vzdálenost bodu A od přímky BC. K tomu rovnost po vynásobení hodnotou r přepíšeme do tvaru

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q}\left(1 - \frac{q}{v}\right) = 1$$

a výraz na levé straně upravíme užitím výšek podobných trojúhelníků takto:

$$\begin{aligned}\frac{r}{p} + \frac{r}{q}\left(1 - \frac{q}{v}\right) &= \frac{|R'C|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|}\left(1 - \frac{|Q'C|}{|BC|}\right) = \\ &= \frac{|R'C|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|} \cdot \frac{|BC| - |Q'C|}{|BC|} = \\ &= \frac{|R'C|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|} \cdot \frac{|BQ'|}{|BC|} = \frac{|R'C| + |BR'|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BC|} = 1.\end{aligned}$$

Jiné řešení. Ještě jiným způsobem dokážeme rovnost

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{v}$$

z poznámky k předchozímu řešení.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $S_{ABC} = 1$. Označme $S_{BRC} = x$, $S_{ARC} = y$ a $S_{ABR} = z$, takže $x + y + z = 1$. Pak platí

$$\frac{v}{p} = \frac{|AB|}{|PB|} = 1 + \frac{|AP|}{|PB|} = 1 + \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = 1 + \frac{y}{x}$$

(použili jsme výsledek doplňující úlohy D2).

Analogicky odvodíme rovnost

$$\frac{v}{q} = 1 + \frac{z}{x}.$$

Navíc zřejmě platí

$$\frac{v}{r} = \frac{S_{ABC}}{S_{BRC}} = \frac{1}{x}.$$

Celkem tedy máme

$$\frac{v}{p} + \frac{v}{q} - \frac{v}{r} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{z}{x}\right) - \frac{1}{x} = \frac{x + y + x + z - 1}{x} = 1,$$

což je ekvivalentní dokazované rovnosti.

Dodejme, že čísla x, y, z tvoří trojici takzvaných barycentrických souřadnic bodu R v rovině ABC. Řešení je elementárním přepisem úvah, které jsou při jejich používání běžné.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Ukažte, že platí

$$S_{APB} \cdot S_{CPD} = S_{BPC} \cdot S_{DPA}.$$

[Vyjádřete obsahy všech čtyř trojúhelníků pomocí takových základen, které leží na téže úhlopříčce čtyřúhelníku $ABCD$.]

N2. Ukažte, že v konfiguraci ze zadání úlohy platí $S_{BRC} > S_{PRQ}$. [Porovnejte obsahy trojúhelníků BCP a BQP.]

D1. Body P a Q leží ve stejné polorovině určené přímkou l. Jejich kolmé průměty na přímku l označme jako P' a Q' a průsečík přímek PQ' a $P'Q$ jako R. Ukažte, že pro vzdálenosti p, q, r bodů P, Q, R od přímky l platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

[Uvažujte o vhodných dvojicích podobných trojúhelníků, které jsou určeny zadanými body a jejich kolmými průměty na přímku l.]

D2. Je dán bod X uvnitř trojúhelníka ABC. Ukažte, že označíme-li D průsečík přímek AX a BC, platí

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

[Nakreslete přímku AX vodorovně. Pak vynikne, že oba zlomky se rovnají podílu vzdáleností bodů B a C od přímky AX.]

D3. [Cevova věta (část)] Na stranách BC, CA a AB trojúhelníka ABC jsou po řadě zvoleny body D, E a F tak, že se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě. Ukažte, že pak platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

[Využijte třikrát výsledek úlohy D2.]

4. *Řekneme, že podmnožina* P *množiny* $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ *je* polovičatá, *pokud obsahuje* 21 *prvků a každé z* 42 *čísel v množinách* P *a* $\mathsf{Q} = \{7x;\, x \in \mathsf{P}\}$ *dává při dělení číslem* 43 *jiný zbytek. Určete počet polovičatých podmnožin množiny* M.

(Josef Tkadlec)

Řešení. Se všemi čísly budeme počítat jako se zbytkovými třídami při dělení prvočíslem 43.

Nejprve si uvědomíme, že množiny P a Q tvoří disjunktní rozklad množiny M. Nechť P je polovičatá množina a nechť $x \in \mathsf{P}$, pro něž pak též $7x \in \mathsf{Q}$.

Ukážeme, že $7^2x \in \mathsf{P}$. Pokud naopak předpokládáme, že $7^2x \in \mathsf{Q}$, pak existuje $y \in \mathsf{P}$ takové, že $7^2x = 7y$. Podle návodné úlohy N2 je takové y určeno jednoznačně, a tudíž je jím $7x$. Jelikož $7x \notin \mathsf{P}$, dostáváme potřebný spor.

Pak samozřejmě $7^3x \in \mathsf{Q}$ a zopakováním předešlého argumentu ukážeme, že $7^4x \in \in \mathsf{P}$, a následně i $7^5x \in \mathsf{Q}$. V principu bychom takto mohli pokračovat i dále, nicméně již $7^6x \equiv 49^3x \equiv 6^3x \equiv x \pmod{43}$, čímž se „cyklus“ uzavře. Cyklická šestice (různých) čísel $(x, 7x, 7^2x, 7^3x, 7^4x, 7^5x)$ má tak zařazení $(\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{Q})$.

Množinu M nyní rozdělíme do sedmi takových cyklických šestic jako

$$(1, 7, 6, 42, 36, 37),\quad (2, 14, 12, 41, 29, 31),\quad (3, 21, 18, 40, 22, 25),$$
$$(4, 28, 24, 39, 15, 19),\quad (5, 35, 30, 38, 8, 13),\quad (9, 20, 11, 34, 23, 32),$$
$$(10, 27, 17, 33, 16, 26).$$

Každá z těchto šestic bude mít zařazení buďto $(\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{Q})$, anebo $(\mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{P})$, přičemž každá taková volba určí množiny P a Q vyhovující podmínkám úlohy. Počet možností je tak $2^7 = 128$.

Poznámka. Ve skutečnosti není nutné sedm cyklických šestic nalézt přímo. Stačí jen dokázat *existenci* takového rozkladu množiny M. Ta plyne ze dvou dílčích tvrzení:

(i) Každý prvek M je prvkem nějaké šestice.

(ii) Mají-li dvě šestice společný jeden prvek, pak už mají společné všechny prvky.

Platnost prvního tvrzení je okamžitá a k důkazu druhého si stačí uvědomit, že podle konstrukce jsou šestice uzavřené na násobení číslem 7, a jeden společný prvek tak „vygeneruje“ postupným násobením sedmi pět dalších společných prvků.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dáno prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ a přirozené číslo a nesoudělné s p. Ukažte, že žádná dvě čísla z množiny $\mathsf{V} = \{0a, 1a, \dots, (p-1)a\}$ nedávají stejný zbytek při dělení prvočíslem p. [Předpokládejte opak a ke sporu doveďte fakt, že p dělí rozdíl nějakých dvou čísel z množiny V.]

N2. [„Sedminásobek je jednoznačný“] Při značení z úlohy ukažte, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ existuje právě jedno $y \in \mathsf{M}$ takové, že $x \equiv 7y \pmod{43}$ (čtěte jako „x dává stejný zbytek jako $7y$ při dělení 43“). [Podle N1 pro $p = 43$ a $a = 7$ se mezi násobky 7 všech nenulových zbytků objeví každý nenulový zbytek právě jednou, tedy i předem zvolený zbytek x.]

N3. Jaké zbytky dávají mocniny sedmi při dělení 43? Je-li $1 \in \mathsf{P}$, co lze říci o příslušnosti těchto zbytků do množin P a Q ze zadání úlohy? [1, 7, 6, 42, 36, 37. Dále rozmyslete, proč v případě $1 \in \mathsf{P}$ je již příslušnost ostatních pěti určených zbytků do množin P a Q určena jednoznačně: $6, 36 \in \mathsf{P}$ a $7, 42, 37 \in \mathsf{Q}$.]

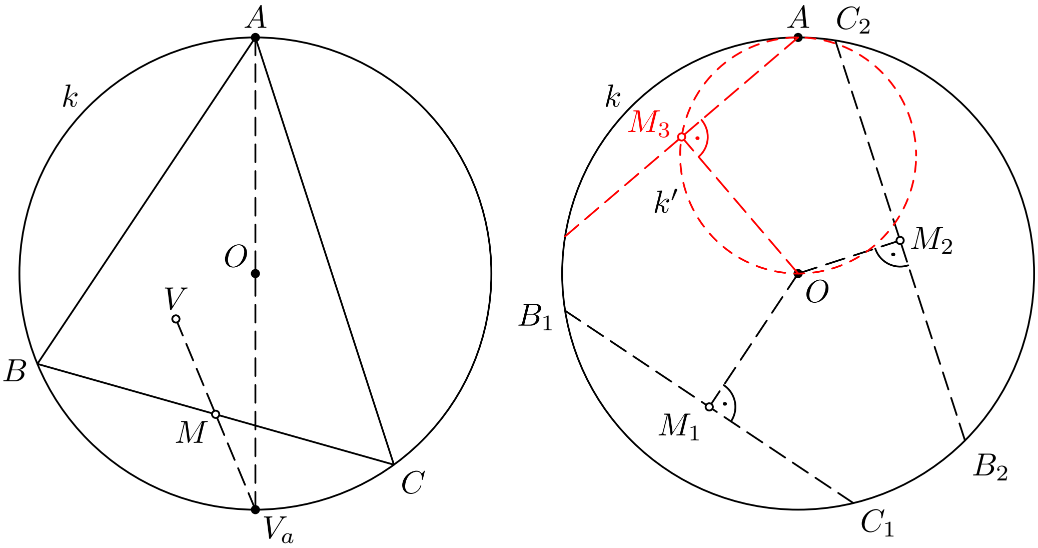
D1. Je dáno prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{1, \dots, p-1\}$ a její prvek a. Ukažte, že pak existuje právě jeden prvek $b \in \mathsf{U}$ takový, že ab dává zbytek 1 při dělení p. [Podle N1 je mezi „násobky“ čísla a zastoupen každý možný zbytek při dělení p právě jednou. Tedy i zbytek 1.]

D2. [Malá Fermatova věta] Je dáno prvočíslo p a přirozené číslo a nesoudělné s p. Ukažte, že pak $p \mid a^{p-1} - 1$. [Podle N1 jsou množiny U a V (po redukci na zbytky při dělení p) shodné. Rovnat se tak musí i součiny jejich nenulových prvků. Co vyjde?]

D3. [Wilsonova věta]. Ukažte, že pro každé prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$. [Tvrzení je triviální pro $p \in \{2, 3\}$. V případě $p \geqq 5$ ze součinu vyškrtneme všechny dvojice činitelů, jejichž součin dává při dělení p zbytek 1. Která dvě čísla zbydou (neboť tvoří takovou dvojici sama se sebou)?]

5. *V rovině jsou dány dva různé body O a A. Určete množinu ortocenter všech trojúhelníků ABC, pro něž je bod O středem kružnice opsané.* (Pavel Šalom)

Řešení. Předně si uvědomme, že všechny uvažované trojúhelníky ABC mají společnou kružnici opsanou $k(O, |OA|)$. Její průměr s krajním bodem A má, jak známo, za druhý krajní bod obraz V_a ortocentra V trojúhelníku ABC v souměrnosti podle středu M strany BC (viz návodné úlohy N1–N3 a obr. 5 vlevo). Tento bod $V_a \in k$ je tedy rovněž všem uvažovaným trojúhelníkům ABC společný.

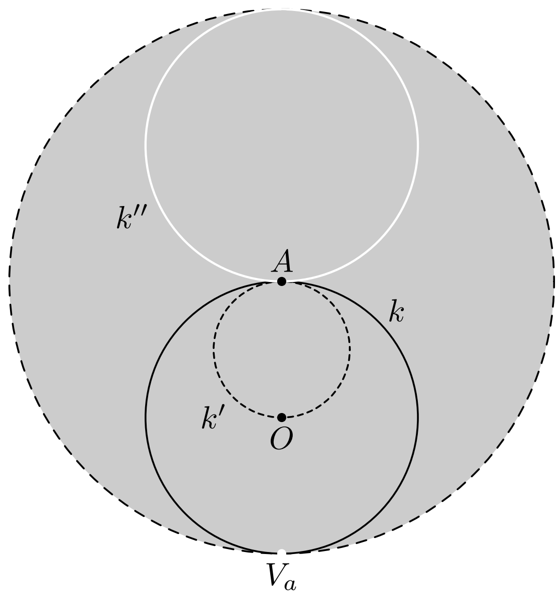


Obr. 5

Z předchozího plyne, že hledaná množina všech ortocenter V je obrazem množiny středů M všech tětiv BC kružnice k ($B \neq A$, $C \neq A$) ve stejnolehlosti $H(V_a, 2)$, neboť tři různé body téže kružnice vždy určují trojúhelník. Stačí tedy určit množinu všech popsaných středů M, o nichž předem víme, že všechny leží ve vnitřku kružnice k.

Je jasné, že střed O do této množiny patří. Pro ostatní body M vnitřku dané kružnice k platí, že jsou středem její vhodné tětivy, která je bodem M určena jednoznačně (podle klasické konstrukce — stačí protnout kolmici k OM vedenou bodem M s kružnicí k, tři příklady jsou vykresleny na obr. 5 vpravo). Tato konstrukce pak selže (tj. nedostaneme *trojúhelník* ABC), právě když je jedním z krajních bodů sestrojené tětivy bod A. To se stane právě pro body M ležící na obrazu k' kružnice k ve stejnolehlosti $H(A, \frac{1}{2})$ s výjimkou bodu O, jenž byl vyšetřen zvlášť (a k němuž naopak existuje nekonečně mnoho vhodných tětiv).

Určili jsme tak množinu všech bodů M, kterou je vnitřek kružnice k, z něhož je odebrána kružnice k' s výjimkou bodu O. Hledaná množina ortocenter je, jak víme, obrazem této množiny ve stejnolehlosti $H(V_a, 2)$. Protože obrazem kružnice k je kružnice se



Obr. 6

středem A a poloměrem $|AV_a|$, zatímco obrazem kružnice k' je kružnice k'', jež je současně obrazem kružnice k v souměrnosti podle středu A, a konečně obrazem bodu O v dané stejnolehlosti je bod A, je hledaná množina (včetně konstrukce) určena a znázorněna na obr. 6. Je jí vnitřek kružnice se středem A a poloměrem $|AV_a|$, z něhož je odebrána kružnice k'' a do nějž je naopak vrácen bod A.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Ukažte, že $|\sphericalangle BVC| = 180° - |\sphericalangle BAC|$. [Nezapomeňte na případ, kdy je trojúhelník ABC tupoúhlý.]

N2. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Ukažte, že obraz V' bodu V v souměrnosti podle přímky BC padne na kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Ukažte, že totéž platí i pro obraz V'' bodu V v souměrnosti podle středu úsečky BC. [V obou důkazech využijte výsledek úlohy N1.]

N3. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Z úlohy N2 víme, že obraz V'' bodu V ve středové souměrnosti podle středu strany BC leží na kružnici opsané. Ukažte navíc, že AV'' je průměrem této kružnice. [Díky středové souměrnosti platí $CV \parallel BV''$, a proto z $CV \perp AB$ plyne $BV'' \perp AB$.]

N4. Je dána kružnice k se středem S a uvnitř ní bod X. Určete množinu středů všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem X. [V případě $X = S$ jde o množinu $\{S\}$, v případě $X \neq S$ o Thaletovu kružnici nad průměrem XS.]

N5. Je dána kružnice k se středem S a uvnitř ní bod X. Určete množinu bodů, jež jsou středem nějaké její tětivy, která neobsahuje bod X. [Ke konstrukci tětivy s daným středem využijte faktu, že osa každé tětivy prochází středem kružnice. Kdy však tato konstrukce vede k tětivě, jež bodem X prochází? Hledanou množinou je vnitřek kružnice k, a to v případě $X = S$ s výjimkou jediného bodu S, v případě $X \neq S$ jsou vyloučeny všechny body Thaletovy kružnice nad průměrem XS kromě bodu S (který tentokrát do výsledné množiny naopak patří).]

D1. [Feuerbachova kružnice] Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V a středem O kružnice opsané. Ukažte, že středy jeho stran, středy spojnic vrcholů s jeho ortocentrem a paty jeho výšek leží na jedné kružnici, jejíž střed je navíc středem úsečky VO. [Využijte výsledku úlohy N2 a použijte stejnolehlost $H(V, \frac{1}{2})$.]

D2. V rovině ω jsou dány dva různé body O a T. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O. [58–A–III–6]

6. *Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin*

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)$$

je roven mocnině některého prvočísla. (Jaromír Šimša)

Řešení. Hledané trojice mají splňovat rovnost

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)=p^n, \tag{1}$$

kde p je vhodné prvočíslo a n je celé číslo, které je alespoň 3, neboť každý z činitelů na levé straně (1) je větší než 1.

Kdyby všechna tři čísla a, b, c byla násobky prvočísla p, splňovala by trojice přirozených čísel $(a/p, b/p, c/p)$ díky (1) podobnou rovnost

$$\Big(\frac{a}{p}+2\frac{b}{p}\Big)\Big(\frac{b}{p}+2\frac{c}{p}\Big)\Big(\frac{c}{p}+2\frac{a}{p}\Big)=p^{n-3},$$

takže by byla rovněž řešením úlohy. Kdyby i v této trojici byla všechna tři čísla násobky prvočísla p, mohli bychom přejít k řešení $(a/p^2, b/p^2, c/p^2)$ atd., až po konečném počtu kroků dojdeme k závěru, že každá vyhovující trojice (a, b, c) je tvaru

$$a=p^k a_1,\ b=p^k b_1,\ c=p^k c_1,$$

kde $k \geqq 0$ je celé číslo, aspoň jedno z přirozených čísel a_1, b_1, c_1 není dělitelné prvočíslem p a přitom součin tří činitelů a_1+2b_1, b_1+2c_1, c_1+2a_1 je mocninou prvočísla p, takže je mocninou p i každé z nich:

$$a_1+2b_1=p^\alpha,\ b_1+2c_1=p^\beta,\ c_1+2a_1=p^\gamma. \tag{2}$$

Celočíselné exponenty α, β, γ jsou přitom kladné, neboť na levých stranách (2) jsou opět čísla větší než 1.

Pohlédneme-li na (2) jako na soustavu tří lineárních rovnic, snadno určíme její jediné řešení

$$a_1=\frac{p^\alpha-2p^\beta+4p^\gamma}{9},\quad b_1=\frac{p^\beta-2p^\gamma+4p^\alpha}{9},\quad c_1=\frac{p^\gamma-2p^\alpha+4p^\beta}{9}. \tag{3}$$

Díky tomu, že $\min(\alpha,\beta,\gamma) \geqq 1$, jsou čitatelé zlomků v (3) násobky prvočísla p. Kdyby tudíž neplatilo $p=3$, byla by všechna tři čísla a_1, b_1, c_1 v rozporu s jejich výběrem dělitelná prvočíslem p, neboť zlomky v (3) mají jmenovatel 3^2, takže jejich krácení prvočíslem p není možné. Nutně proto platí $p=3$.

S ohledem na cykličnost soustavy (2) můžeme předpokládat, že číslo γ je z čísel α, β, γ maximální a že pokud je v této trojici maximálních čísel více, je takové kromě čísla γ i číslo β. Platí tak

$$\text{buď}\quad \max(\alpha,\beta)<\gamma,\quad \text{nebo}\quad \alpha \leqq \beta=\gamma. \tag{4}$$

Z nerovnosti $b_1>0$ pak podle (3) s dosazeným $p=3$ máme $4\cdot 3^\alpha > 2\cdot 3^\gamma - 3^\beta \geqq 3^\gamma$, odkud $3^{\gamma-\alpha}<4$ neboli $\gamma-\alpha \in \{0,1\}$. Obě možné hodnoty nyní analyzujme odděleně.

(i) V případě $\gamma - \alpha = 0$ máme podle (4) rovnosti $\alpha = \beta = \gamma$. Dosazením do (3) dostáváme $a_1 = b_1 = c_1 = 3^{\gamma-1}$, tudíž $\gamma = 1$ a $(a, b, c) = (3^k, 3^k, 3^k)$.

(ii) V případě $\gamma - \alpha = 1$ musí být $\beta = \gamma$, jinak bychom totiž podle (4) ze vztahů $\beta \leqq \gamma - 1$ a $\alpha = \gamma - 1$ pro hodnotu b_1 z (3) dostali

$$9b_1 = 3^\beta - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^\alpha \leqq 3^{\gamma-1} - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^{\gamma-1} = -3^{\gamma-1} < 0,$$

a to je spor. Platí proto $\beta = \gamma$, což spolu s $\alpha = \gamma - 1$ po dosazení do (3) dává

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3^{\gamma-1} - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^\gamma}{9} = 7 \cdot 3^{\gamma-3}, \\ b_1 &= \frac{3^\gamma - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^{\gamma-1}}{9} = 3^{\gamma-3}, \\ c_1 &= \frac{3^\gamma - 2 \cdot 3^{\gamma-1} + 4 \cdot 3^\gamma}{9} = 13 \cdot 3^{\gamma-3}, \end{aligned}$$

tudíž $\gamma = 3$, $(a_1, b_1, c_1) = (7, 1, 13)$, $(a, b, c) = (7 \cdot 3^k, 3^k, 13 \cdot 3^k)$.

Odpověď. Hledané trojice jsou $(3^k, 3^k, 3^k)$ a $(7 \cdot 3^k, 3^k, 13 \cdot 3^k)$ (až na cyklickou permutaci), přitom k je libovolné nezáporné celé číslo.

Poznámka. Kdybychom v zadání úlohy nepožadovali, aby celá čísla a, b, c byla *kladná*, existovaly by mnohé další vyhovující trojice, kupříkladu $(2^k, 0, 2^{k+1})$ nebo $(11 \cdot 5^k, -5^{k+1}, 3 \cdot 5^k)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro která je součin $(a + 2b)(b + 2a)$ mocninou některého prvočísla p. [$a = b = 3^k$, kde $k \geqq 0$. Ze soustavy rovnic $a + 2b = p^u$ a $b + 2a = p^v$ vyjádřete neznámé a, b a ukažte, že jejich hodnoty jsou obě kladné, jen když se přirozená čísla u a v rovnají — pak ovšem také $a = b$.]

N2. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a + b)(b + c) \times$ $\times (c + a)$ je roven mocnině některého prvočísla. [Ukažte, že alespoň jedna závorka je sudá, a proto $p = 2$. Při uspořádání $a \geqq b \geqq c$, které můžeme předpokládat, bude pro tři mocniny $a+b$, $a+c$, $b+c$ čísla 2 platit $a+b \geqq a+c \geqq b+c$. Kdyby $a+b$, $a+c$ byly různé mocniny čísla 2, byla by první alespoň dvojnásobkem druhé, tj. $a + b \geqq 2(a + c)$, odkud by plynulo $b \geqq a + 2c > a$, a to je spor s $a \geqq b$. Proto musí platit $a + b = a + c$ neboli $b = c$. To už vede k závěru, že úloze kromě snadno uhodnutelných trojic $[2^k, 2^k, 2^k]$ vyhovují v libovolném pořadí také trojice čísel $[2^n - 2^k, 2^k, 2^k]$, kde $0 \leqq k < n - 1$, a že žádná jiná řešení neexistují.]

D1. Pro navzájem různá přirozená čísla a, b, c platí, že

$$(a + b + c) \mid (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a).$$

Ukažte, že číslo $a + b + c$ je složené. [Pokud by $a + b + c$ bylo prvočíslem, dělilo by jednu ze závorek, řekněme $a + 2b$, a tedy by dělilo i rozdíl $a + 2b - (a + b + c) = b - c$, takže by platilo $a + b + c < |b - c|$, což je spor.]