1. Najděte všechna celá čísla a, pro něž má rovnice

$$a(x^2+x)=3(x^2+1)$$

aspoň jeden celočíselný kořen. (*Jaromír Šimša*)

Řešení. Má-li rovnice celočíselný kořen m, je číslo $3(m^2+1)$ rovno $am(m+1)$, takže je dělitelné číslem m, které je zřejmě různé od nuly. Vzhledem k nesoudělnosti čísel m a m^2+1 odtud plyne, že číslo m je dělitelem čísla 3, takže $m \in \{-3,-1,1,3\}$. Do původní rovnice postupně dosadíme za x všechny čtyři hodnoty m a zjistíme tak, že celočíselné a vyjde pro právě dvě z nich. Je to jednak $x=-3$, kterému odpovídá $a=5$, jednak $x=1$, pro něž $a=3$. (Pro $x=-1$ vychází $0\cdot a=6$, pro $x=3$ rovnice $12a=30$ s neceločíselným kořenem a.)

Odpověď. Rovnice má celočíselný kořen pro $a=3$ nebo $a=5$.

Poznámka. Rovnost pro celočíselný kořen m bychom mohli také upravit na tvar

$$am(m+1)=3(m^2+1)=3(m-1)(m+1)+6,$$

odkud vidíme, že číslo $m+1$ dělí číslo 6. Tato úvaha vede k osmi možnostem pro číslo m s podobnou diskusí.

Jiné řešení. Danou rovnici upravíme do standardního tvaru

$$(a-3)x^2+ax-3=0. \tag{1}$$

Pro $a=3$ jde o lineární rovnici s celočíselným kořenem $x=1$, takže $a=3$ vyhovuje. Pro celé $a\neq 3$ je rovnice kvadratická a její celočíselný diskriminant

$$D=a^2+12(a-3)=(a+6)^2-72$$

musí být druhou mocninou celého čísla (i v případě třeba jen racionálního kořene).

Nechť $D=n^2$ pro celé nezáporné číslo n. Platí tak

$$n^2=(a+6)^2-72.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(a+n+6)(a-n+6)=(a+6)^2-n^2=72=2^3\cdot 3^2.$$

Oba celočíselné činitele $a-n+6$ a $a+n+6$ mají zřejmě stejnou paritu (jejich součet je sudý), takže podle jejich součinu 72 to musí být dvě sudá čísla, pro která navíc platí $a-n+6 \leqq a+n+6$. Nastanou tak pro ně pouze možnosti uvedené v následující tabulce, ve které současně uvádíme i odpovídající hodnoty čísel a, n a odpovídající kořeny kvadratické rovnice (1):

$a-n+6$	-36	-18	-12	2	4	6
$a+n+6$	-2	-4	-6	36	18	12
a	-25	-17	-15	13	5	3
n	17	-7	-3	17	7	3
kořeny (1)	$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{5}, -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}, \frac{1}{5}$	$-3, \frac{1}{2}$	rovnice není kvadratická

Vidíme, že kromě již diskutovaného případu $a = 3$ má daná rovnice celočíselný kořen pouze v případě $a = 5$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho závěrečný 1 bod za shrnující odpověď $a \in \{3, 5\}$. Předcházejících 5 bodů v závislosti na zvoleném postupu přidělujte následovně.

Při postupu podle prvního řešení udělte 2 body za důkaz, že výraz pouze v proměnné m dělí určené celé číslo (např. $m \mid 3$, $m + 1 \mid 6$, $m(m + 1) \mid 6$, …), 1 bod za uvedení všech možností pro m a dále nejvýše 2 body za správné dopočtení odpovídajících hodnot a.

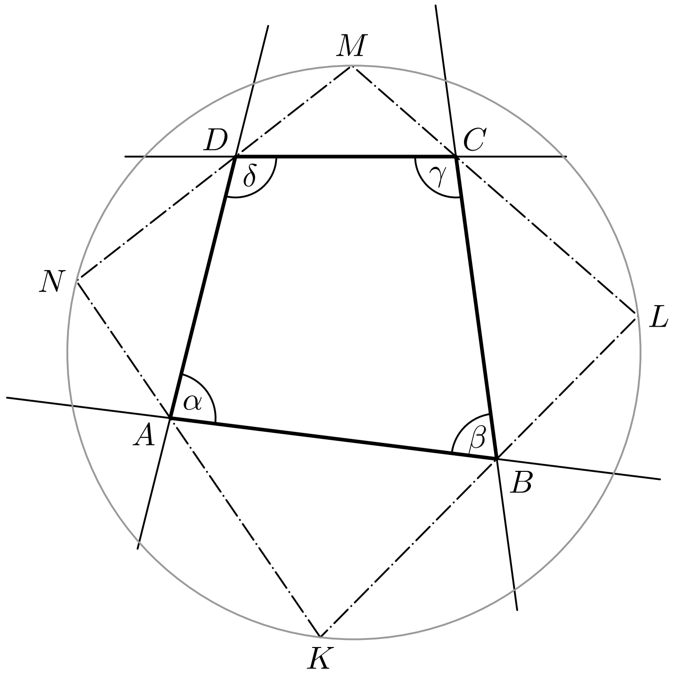
Při postupu podle druhého řešení udělte 1 bod za diskusi lineární rovnice v případě $a = 3$, 1 bod za tvrzení, že diskriminant kvadratické rovnice musí být kvadrátem celého čísla, 1 bod za nalezení všech možností pro D ($D \in \{3^2, 7^2, 17^2\}$), 1 bod za zdůvodnění, proč jiné hodnoty D nevyhovují a 1 bod za vyloučení všech možností pro a kromě $a = 5$.

Pozor! Řešitel může získat částečné body pouze za jeden postup, částečné body podle různých postupů se nesčítají. Za pouhé uhodnutí obou hodnot $a \in \{3, 5\}$ udělte 1 bod, je-li uhodnuta jen jedna hodnota, žádný bod nepřidělujte.

2. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici.

(Kružnicí připsanou například straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AD a BC.) (*Jaroslav Švrček, Pavel Calábek*)

Řešení. Posuzované středy kružnic vně připsaných stranám daného čtyřúhelníku $ABCD$ označíme K, L, M, N podle obr. 1. Naší úlohou je dokázat, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový. Využijeme k tomu obvykle označených vnitřních úhlů α, β, γ, δ výchozího čtyřúhelníku $ABCD$. Bod K je průsečíkem os vnějších úhlů tohoto



Obr. 1

čtyřúhelníku při vrcholech A, B. Proto

$$|\sphericalangle BAK| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad |\sphericalangle ABK| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta.$$

Odtud pro velikost třetího vnitřního úhlu trojúhelníku ABK plyne

$$|\sphericalangle AKB| = 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Podobně pro střed M kružnice vně připsané straně CD čtyřúhelníku platí

$$|\sphericalangle CMD| = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta).$$

Součet velikostí vnitřních úhlů při protějších vrcholech K a M čtyřúhelníku $KLMN$ je tak

$$|\sphericalangle AKB| + |\sphericalangle CMD| = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \tfrac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ,$$

což je nutná a postačující podmínka k tomu, aby čtyřúhelník $KLMN$ byl tětivový. Tím je důkaz ukončen.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za důkaz, že součet dvou protějších úhlů čtyřúhelníku $KLMN$ je 180°, a 1 bod za následné konstatování, že (právě) takové čtyřúhelníky jsou tětivové (místo toho je možné zmínit i potřebné poznatky o obloucích jako ekvigonálách).

Hodnocení důkazu 5 body rozdělte takto: 1 bod za poznatek, že středy kružnic vně připsaných leží na osách vnějších úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, 2 body za potřebná vyjádření čtyř úhlů při hranici $ABCD$ jako např. úhlu BAK pomocí úhlu α, 1 bod za vyjádření dvou protějších úhlů v $KLMN$ a 1 bod za jejich sečtení do hodnoty $180°$.

Pokud řešitel ukáže, že tvrzení platí pro čtyřúhelníky $ABCD$ konkrétního tvaru, potom v případě čtverců body nedávejte, v případě kosočtverců a obdélníků nejvýše 1 bod, v obecnějších případech (rovnoběžníky a lichoběžníky) nejvýše 2 body; tyto body se nesčítají.

3. Určete největší přirozené číslo k, pro které lze na šachovnici 8×8 rozmístit k věží a k střelců tak, aby žádná figurka neohrožovala jinou. (Střelec ohrožuje libovolné pole diagonály a věž libovolné pole řádku i sloupce, na nichž stojí.)

(*Josef Tkadlec*)

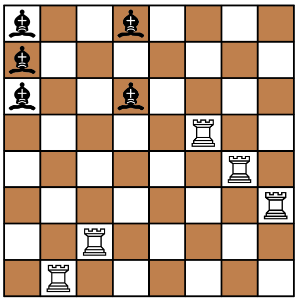
Řešení. Uvažujme libovolné vyhovující rozmístění k věží a k střelců. Dokažme, že platí nerovnost $k \leqq 5$.

Je-li v některé řadě (resp. sloupci) šachovnice umístěna věž, musí být jedinou figurkou této řady (resp. sloupce). Pro počet k rozmístěných věží tak nutně platí $k \leqq 8$ a navíc je jimi neobsazeno celkem $8-k$ řad a $8-k$ sloupců šachovnice. Střelci v počtu k tak mohou stát pouze na některém z $(8-k)^2$ polí, v nichž se tyto řady a sloupce šachovnice protínají. Proto musí platit nerovnost

$$k \leqq (8-k)^2.$$

Odtud již plyne $k \leqq 5$, neboť odvozená nerovnost neplatí pro žádné $k \in \{6, 7, 8\}$, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Jak vidíme z následujícího obrázku, 5 věží a 5 střelců lze rozmístit na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali, proto největší možné k dané vlastnosti je $k = 5$.



Obr. 2

Poznámka. Odvození nerovnosti $k \leqq 5$ lze podat stručněji takto: nejprve vyloučíme stejně jako v podaném řešení hodnotu $k = 6$ (6 střelců by muselo stát na 4 polích, která leží ve dvou řadách a dvou sloupcích neobsazených 6 věžemi) a poté konstatujeme, že pokud by existovalo vyhovující rozmístění pro $k > 6$, odebráním libovolných $k-6$ věží a $k-6$ střelců bychom dostali vyhovující rozmístění pro $k = 6$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho 1 bod za vyloučení možností $k > 6$ a 2 body za vyloučení možnosti $k = 6$. Konečně 3 body ohodnoťte konstrukci příkladu správného rozestavení pro $k = 5$. Za konstatování, že k nalezenému příkladu pro $k = 5$ již nelze žádnou další věž přidat, ovšem další body nedávejte — k úplnému vyřešení úlohy by bylo zapotřebí takto otestovat všechna vyhovující rozmístění pro $k = 5$. Je-li uveden správný příklad rozestavení pouze pro $k = 4$, udělte 1 bod.