**69. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie A

**1.** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y}+z=1,\qquad \frac{1}{y+z}+x=1,\qquad \frac{1}{z+x}+y=1.$$

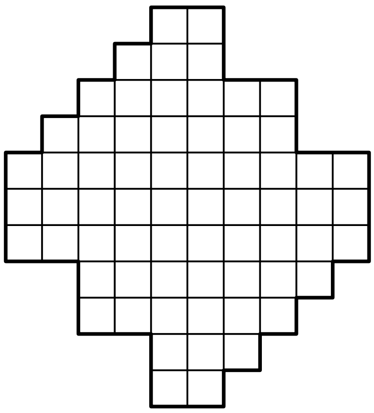
**2.** V ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ označme $O$ střed kružnice opsané. Obraz bodu $O$ v osové souměrnosti podle přímky $AC$ označme $P$. Dokažte, že středy úseček $AO$ a $BP$ leží na téže kolmici k přímce $BC$.

**3.** Pro libovolnou čtyřprvkovou podmnožinu $\mathsf{P}$ množiny $\{1,2,3,\ldots,12\}$ označme

$$\mathsf{Q}=\{3x\colon x\in\mathsf{P}\}\quad\text{a}\quad\mathsf{R}=\{4x\colon x\in\mathsf{P}\}.$$

Určete počet takových množin $\mathsf{P}$, pro něž čísla z $\mathsf{P}$, $\mathsf{Q}$, $\mathsf{R}$ dávají při dělení číslem 13 všechny možné nenulové zbytky.

**4.** Určete, kolika způsoby lze útvar



vydláždit dominovými kostkami.

Krajské kolo kategorie A se koná

**v úterý 14. ledna 2020**

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

**1.** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y}+z=1, \qquad \frac{1}{y+z}+x=1, \qquad \frac{1}{z+x}+y=1.$$

(*Tomáš Bárta*)

**Řešení.** Odečteme-li od sebe první dvě rovnice a převedeme oba zlomky na společného jmenovatele, dostaneme

$$\frac{(y+z)-(x+y)}{(x+y)(y+z)}+z-x=0,$$

odkud po vytknutí členu $z-x$ získáme

$$(z-x)\left(\frac{1}{(x+y)(y+z)}+1\right)=0 \tag{1}$$

Analogickými úpravami pro rozdíl jiných dvojic rovnic pak obdržíme i

$$(y-z)\left(\frac{1}{(z+x)(x+y)}+1\right)=0, \quad (x-y)\left(\frac{1}{(y+z)(z+x)}+1\right)=0.$$

Předpokládejme nejprve, že jsou čísla $x$, $y$, $z$ navzájem různá. Pak lze jejich nenulovými rozdíly odvozené rovnice vydělit a po zjednodušení řešit soustavu

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)&=-1,\\ (y+z)(z+x)&=-1,\\ (z+x)(x+y)&=-1,\end{aligned}$$

kterou lze ovšem po roznásobení přepsat jako

$$\begin{aligned}y^2&=-1-xy-yz-zx,\\ z^2&=-1-xy-yz-zx,\\ x^2&=-1-xy-yz-zx.\end{aligned}$$

Rovnost $x^2=y^2=z^2$ však znamená, že se alespoň dvě z čísel $x$, $y$, $z$ rovnají, což je ve sporu s předpokladem o jejich různosti.

V dalším případě, kdy platí $x=y=z$, zbývá podle původní soustavy vyřešit rovnici $1/(2x)+x=1$. Kvadratická rovnice $2x^2-2x+1=0$, která je jejím důsledkem, má však záporný diskriminant, a tak ani rovnice $1/(2x)+x=1$ žádné reálné řešení nemá.

Zbývá případ, kdy jsou právě dvě z čísel $x$, $y$, $z$ stejná. S ohledem na symetrii se stačí zabývat případem $x=y\neq z$. Z rovnosti (1) po vydělení nenulovým číslem $z-x$ získáme

$$-1=(x+y)(y+z)=2x(x+z),$$

zatímco z první zadané rovnice vyjde

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2x}=1-z.$$

Pak stačí dvěma způsoby vyjádřit hodnotu $1/(2x)$ jako

$$-x-z=\frac{1}{2x}=1-z,$$

odkud již máme $x=-1$ a následně $z=3/2$. Snadno ověříme, že trojice $(-1,-1,\frac{3}{2})$ vyhovuje i původní soustavě rovnic.

*Odpověď.* Soustava rovnic má právě tři řešení $(-1,-1,\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2},-1,-1)$, $(-1,\frac{3}{2},-1)$.

**Jiné řešení.** Nechť $x, y, z$ jsou řešení soustavy. Poté co každou z rovnic vynásobíme jmenovatelem příslušného zlomku, získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + xz + yz &= x + y,\\ 1 + yx + zx &= y + z,\\ 1 + zy + xy &= z + x. \end{aligned}$$

Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou, dostaneme

$$yz - yx = x - z \quad \text{neboli} \quad (y + 1)(z - x) = 0.$$

Podobným odčítáním (anebo s ohledem na symetrii) v souhrnu obdržíme soustavu rovnic

$$0 = (y + 1)(z - x) = (z + 1)(x - y) = (x + 1)(y - z). \tag{2}$$

Nyní rozlišíme, zda je některé z čísel $x$, $y$, $z$ rovno číslu $-1$, či nikoliv. Pokud ne, podle (2) bychom měli $x = y = z$ a po dosazení do původní soustavy bychom dostali kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem (viz první řešení). Musí tedy nastat případ, kdy se číslo $-1$ v trojici $(x, y, z)$ nachází.

S ohledem na symetrii stačí rozebrat pouze případ, kdy $x = -1$. Tehdy se soustava (2) redukuje na rovnici $(y+1)(z+1) = 0$, a tedy alespoň jedno z čísel $y$, $z$ je také rovno $-1$. Po dosazení například $x = y = -1$ do první z původních rovnic dopočítáme $z = 3/2$ a snadno se ujistíme, že pak jsou splněny i zbylé dvě rovnice. Díky symetrii tak nacházíme jediné tři trojice $(-1, -1, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, -1, -1)$, $(-1, \frac{3}{2}, -1)$, které zadané soustavě vyhovují.

**Jiné řešení.** Se soustavou rovnic zbavenou zlomků, kterou jsme zapsali úvodem druhého řešení, nyní naložíme jinak. Po přičtení výrazu $xy + 1$ k oběma stranám první rovnice obdržíme

$$2 + xy + xz + yz = xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1).$$

Povšimněme si, že výraz na levé straně je symetrický v proměnných $x$, $y$ a $z$. Stejnou levou stranu tudíž získáme i po obdobných úpravách druhé a třetí rovnice:

$$\begin{aligned} 2 + xy + xz + yz &= (y + 1)(z + 1),\\ 2 + xy + xz + yz &= (z + 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Porovnáním pravých stran tak dostaneme, že

$$(x + 1)(y + 1) = (y + 1)(z + 1) = (z + 1)(x + 1).$$

Je-li každé z čísel $x$, $y$, $z$ různé od $-1$, můžeme v každé z rovností krátit a vyjde, že $x = y = z$. Podobně jako v prvním řešení zjistíme, že tento případ žádná řešení neskýtá.

Pokud je ovšem například $x = -1$, pak musí platit i $(y + 1)(z + 1) = 0$, a tedy alespoň jedno z čísel $y$, $z$ je také rovno $-1$. Zbytek dokončíme stejně jako v druhém řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Neúplná řešení ohodnoťte obdobně, jako nyní popíšeme u tří výše podaných řešení:

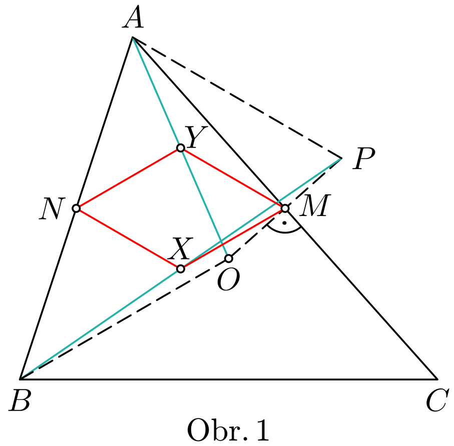
- Při postupu z prvního řešení udělte 4 body za vyloučení případu $x \neq y \neq z \neq x$, z toho 1 bod za úpravu rozdílů *původních* rovnic do součinových tvarů s činiteli $x - y$, $y - z$ a $z - x$, podobných jako má rovnice (1). Dále udělte 1 bod za vyloučení případu $x = y = z$ a 1 bod za rozřešení zbylého případu, kdy se právě dvě z čísel $x$, $y$, $z$ rovnají.

- ▷ Při postupu z druhého řešení udělte 4 body za odvození soustavy (2) a po jednom bodu za následné dořešení dvou popsaných případů (lze je rozlišit i podle toho, zda platí $x = y = z$ či nikoli.)
- ▷ Při postupu z třetího řešení udělte 4 body za důkaz, že součiny dvou ze tří činitelů $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$ mají stejnou hodnotu a po 1 bodu za následné dořešení dvou situací, kdy se buď žádný z těchto činitelů nerovná nule, nebo aspoň jeden se nule rovná.
- ▷ Pokud v jinak úplném řešení, při kterém se hledané trojice určí pomocí jiné (odvozené) soustavy, nežli je ta původní, chybí v závěru alespoň zmínka o snadné zkoušce dosazením do všech tří původních rovnic nebo zdůvodnění, proč případně zkouška nutná není, strhněte 1 bod, tj. udělte 5 bodů.
- ▷ Za pouhé nalezení všech tří řešení (bez vysvětlení, proč jiná neexistují) udělte 1 bod.

Zkouší-li řešitel více přístupů, částečné bodové zisky (jako ty uvedené výše) nesčítáme, ale bereme jejich maximum.

**2.** V ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ označme $O$ střed kružnice opsané. Obraz bodu $O$ v osové souměrnosti podle přímky $AC$ označme $P$. Dokažte, že středy úseček $AO$ a $BP$ leží na téže kolmici k přímce $BC$. (*Patrik Bak*)

**Řešení.** Označme postupně $M$, $N$, $X$, $Y$ středy úseček $AC$, $AB$, $BP$, $AO$. (Bod $M$ je samozřejmě středem i úsečky $OP$.) Úsečky $NY$, $YM$, $MX$, $XN$ jsou pak postupně středními příčkami trojúhelníků $ABO$, $OPA$, $PBO$, $BPA$ (obr. 1).




Obr. 1

Platí tak

$$|NX| = \tfrac{1}{2}|AP| = |YM|$$

a zároveň

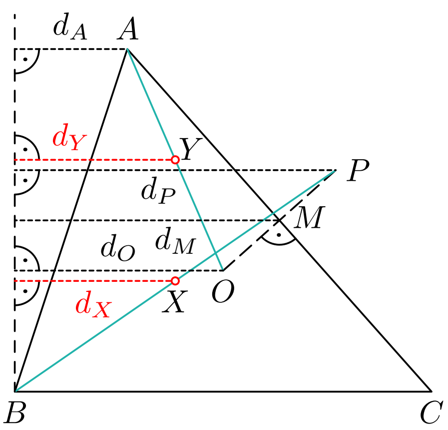
$$|NY| = \tfrac{1}{2}|BO| = |XM|.$$

Jelikož bod $O$ je středem kružnice opsané trojúhelníku $ABC$, platí $|BO| = |AO|$ a z osové souměrnosti navíc i $|AO| = |AP|$. To dohromady znamená, že

$$|NX| = |YM| = |NY| = |XM|.$$

Neplatí-li $X = Y$ (kdy je tvrzení úlohy zřejmé), poslední rovnosti vedou jak známo k závěru, že $NXYM$ je kosočtverec či čtverec, a jeho úhlopříčka $XY$ je tudíž kolmá na druhou úhlopříčku $MN$, což je zároveň střední příčka trojúhelníku $ABC$ rovnoběžná s jeho stranou $BC$.[1] Je tedy $XY$ kolmé na $BC$, jak jsme chtěli dokázat.

**Jiné řešení.** Budeme počítat vzdálenosti bodů od kolmice ke straně $BC$ vedené bodem $B$. Pro libovolný bod $Z$ označme tuto vzdálenost $d_Z$. Při stejném označení bodů $X$, $Y$, $M$ jako v prvním řešení nám stačí dokázat, že $d_Y = d_X$ (obr. 2).




Obr. 2

[1] Kolmost úseček $XY$ a $MN$ lze v dané situaci zdůvodnit i bez úvah o druhu čtyřúhelníku $NXMY$. Z rovností $|XM| = |XN|$ a $|YM| = |YN|$ totiž plyne, že oba body $X$ a $Y$ leží na ose úsečky $MN$.

Jelikož je $Y$ středem $AO$ a $O$ leží na ose strany $BC$, platí

$$d_Y = \tfrac{1}{2}(d_A + d_O) = \tfrac{1}{2}d_A + \tfrac{1}{4}d_C.$$

Podobně z určení bodu $X$ plyne rovnost $d_X = \frac{1}{2}d_P$, a tak stačí vyjádřit i vzdálenost $d_P$ pomocí $d_A$ a $d_C$. To je ovšem snadné, neboť bod $M$ je společným středem $AC$ a $OP$, a proto platí

$$d_M = \tfrac{1}{2}(d_O + d_P),$$

kde $d_M = \frac{1}{2}(d_A + d_C)$. Odtud již nacházíme

$$d_X = \tfrac{1}{2}d_P = d_M - \tfrac{1}{2}d_O = \tfrac{1}{2}(d_A + d_C) - \tfrac{1}{4}d_C = \tfrac{1}{2}d_A + \tfrac{1}{4}d_C.$$

Máme tak $d_Y = d_X$ a jsme hotovi.

Za úplné řešení udělte šest bodů. Neúplné postupy vedené jako v prvním vzorovém řešení hodnoťte následovně:

- ▷ Za dokreslení bodu $N$ udělte 1 bod. Pokud řešitel navíc ukáže, že $NXMY$ je rovnoběžník (resp. kosočtverec), udělte další dva (resp. čtyři) body. Čtyřmi body oceňte i důkaz kolmosti úseček $XY$ a $MN$ bez užití kosočtverce jako v poznámce 1 pod čarou.
- ▷ Opomenutí případu $X = Y$ (který pro ostroúhlý trojúhelník $ABC$, jak lze ukázat, nastat ani nemůže) nepenalizujte.

U řešení, která počítají se vzdálenostmi od kolmice vedené bodem $B$ (ať už přímo, anebo ve formě souřadnic kolmých průmětů bodů na přímku $BC$ v roli číselné osy), je bodovací schéma následující:

- ▷ Za uvedení, že stačí dokázat $d_X = d_Y$, udělte 1 bod.
- ▷ Za vhodné vyjádření jedné ze vzdáleností $d_X$, $d_Y$ udělte 2 body, za vyjádření druhé z nich týmž výrazem pak dejte 3 body. Pokud je ovšem druhá vzdálenost vyjádřena jiným výrazem, závěrečné 3 body udělte teprve za důkaz, že výrazy pro obě vzdálenosti mají stejnou hodnotu (kupř. ekvivalentními úpravami jejich rovnosti).

**3.** Pro libovolnou čtyřprvkovou podmnožinu $\mathsf{P}$ množiny $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ označme

$$\mathsf{Q} = \{3x : x \in \mathsf{P}\} \quad \text{a} \quad \mathsf{R} = \{4x : x \in \mathsf{P}\}.$$

Určete počet takových množin $\mathsf{P}$, pro něž čísla z $\mathsf{P}$, $\mathsf{Q}$, $\mathsf{R}$ dávají při dělení číslem 13 všechny možné nenulové zbytky. (*Jaromír Šimša*)

**Řešení.** Se všemi čísly budeme počítat modulo 13, tedy jako se zbytky při dělení 13. Dále je zřejmé, že nejen množina $\mathsf{P}$, ale i obě odvozené množiny $\mathsf{Q}$ a $\mathsf{R}$ jsou čtyřprvkové. Proto mají-li tři uvedené množiny obsáhnout všechny nenulové zbytky modulo 13, jichž je dvanáct, musejí být navzájem disjunktní.

Nechť $\mathsf{P}$ je libovolná množina splňující požadavky úlohy a nechť $x \in \mathsf{P}$. Pak z incidencí $3x \in \mathsf{Q}$ a $4x \in \mathsf{R}$ plyne, že číslo $12x = 3 \cdot 4x = 4 \cdot 3x$ nepatří do $\mathsf{Q}$ ani do $\mathsf{R}$, neboť $4x$ ani $3x$ nepatří do $\mathsf{P}$ a každá dvě různá čísla mají různé trojnásobky i různé čtyřnásobky. Je proto $12x \in \mathsf{P}$ a také

$$3 \cdot 12x = 10x \in \mathsf{Q} \quad \text{a} \quad 4 \cdot 12x = 9x \in \mathsf{R}.$$

Šestice čísel $(x, 4x, 3x, 12x, 9x, 10x)$ se zařazením $(\mathsf{P}, \mathsf{R}, \mathsf{Q}, \mathsf{P}, \mathsf{R}, \mathsf{Q})$ má navíc, jak se snadno ověří, tu vlastnost, že každý její následující člen je (modulo 13) čtyřnásobkem předchozího čísla, což platí i cyklicky, tedy rovněž pro poslední a první člen.

Všechna čísla od 1 do 12 vytvářejí dvě cyklické šestice popsaného druhu

$$(1, 4, 3, 12, 9, 10) \quad \text{a} \quad (2, 8, 6, 11, 5, 7)$$

a k určení vyhovující množiny $\mathsf{P}$ stačí jen zadat, kterou ze tří použitých barev čísla z $\mathsf{P}$ mají — v každé z obou šestic nezávisle. Hledaný počet je proto roven $3 \times 3 = 9$.

**Jiné řešení.** Počítejme opět s čísly jako s jejich zbytky modulo 13. Díky tomu, že $27x = x$ pro každý zbytek $x$, se množina všech 12 nenulových zbytků modulo 13 rozpadá na čtyři cyklické trojice $(x, 3x, 9x)$, konkrétně

$$A = (1, 3, 9),\ B = (2, 6, 5),\ C = (4, 12, 10),\ D = (7, 8, 11).$$

Z libovolných dvou zbytků v každé trojici je jeden trojnásobkem druhého, takže do $\mathsf{P}$ musí patřit po jednom prvku z každé z trojic $A$, $B$, $C$, $D$. Pro takový výběr jednoho prvku $a$ z trojice $A$ a jednoho prvku $b$ z trojice $B$ máme $3 \times 3 = 9$ možností. Ukažme, že každé dva takové prvky $a$, $b$ lze právě jedním způsobem doplnit některými prvky $c$ z trojice $C$ a $d$ z trojice $D$ do množiny $\mathsf{P} = \{a, b, c, d\}$, jež bude vyhovovat požadavkům úlohy.

Všimněme si, že čtyřnásobek každého prvku z trojice $A$, resp. $C$ je prvek patřící naopak do trojice $C$, resp. $A$. Tuto vlastnost má nejen pár trojic $A$ a $C$, ale rovněž pár trojic $B$ a $D$. Má-li proto daný prvek $a$ z trojice $A$ (složené z $a$, $3a$, $9a$) patřit do $\mathsf{P}$, nesmí tam z trojice $C$ (složené ze zbytků $4a$, $4 \cdot 3a$, $4 \cdot 9a$) patřit ani její prvek $4a$ (ten musí ležet v $\mathsf{R}$), ani její prvek $4 \cdot 9a$ rovný $10a$ (neboť jeho čtyřnásobek $40a = a$ by pak ležel v $\mathsf{P}$ i $\mathsf{R}$), takže do $\mathsf{P}$ nutně patří zbylý prvek z $C$, totiž $c = 4 \cdot 3a = 12a$. Podobně s daným prvkem $b$ z trojice $B$ musí do $\mathsf{P}$ patřit i prvek $12b$ z trojice $D$.

Zbývá ukázat, že každá takto sestavená množina $\mathsf{P} = \{a, b, 12a, 12b\}$ má požadovanou vlastnost. Plyne to z naší konstrukce vyjádřené tabulkou

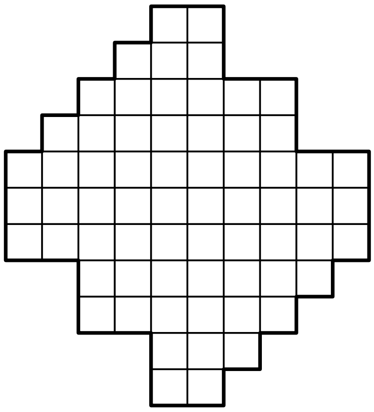
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathsf{P}$ | $a$ | $b$ | $12a$ | $12b$ |
| $\mathsf{Q}$ | $3a$ | $3b$ | $10a$ | $10b$ |
| $\mathsf{R}$ | $9a$ | $9b$ | $4a$ | $4b$ |

Hledaný počet vyhovujících množin $\mathsf{P}$ je roven 9.

Za úplné řešení je 6 bodů. Postupy, které se namísto uplatnění kombinatorického pravidla součinu zabývají konstrukcí konkrétních příkladů vyhovujících množin $\mathsf{P}$, hodnoťte podle tohoto schématu:

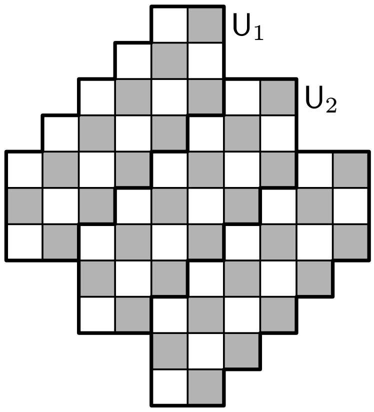
- Za sestrojení alespoň jedné množiny $\mathsf{P}$ udělte 1 bod.
- Za konstrukci všech devíti množin $\mathsf{P}$ udělte 3 body.
- Zbylé tři body udělte za zdůvodnění, že jiné množiny $\mathsf{P}$ nevyhovují. Přitom ziskem 1 bodu oceňte například odvození dílčího poznatku, že $12x \in \mathsf{P}$ pro každé $x \in \mathsf{P}$ (nebo i více podobných, s ním ekvivalentních poznatků) bez dalšího podstatného pokroku.

**4.** Určete, kolika způsoby lze útvar



vydláždit dominovými kostkami. (*Josef Tkadlec*)

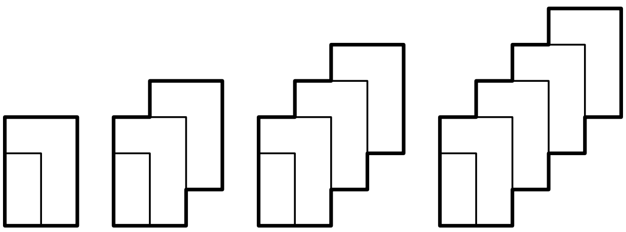
**Řešení.** Pole daného útvaru obarvíme šachovnicově a útvar rozdělíme na tři shodné útvary $\mathsf{U}_1$, $\mathsf{U}_2$, $\mathsf{U}_3$, jak je naznačeno na obr. 3.




Obr. 3

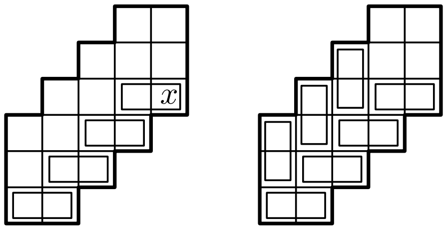
Nyní si všimneme, že útvar $\mathsf{U}_1$ sestává ze stejného počtu černých a bílých polí a navíc sousedí pouze s poli jedné barvy. Přitom libovolná dominová kostka, jež by mohla z vnějšku přesáhnout do $\mathsf{U}_1$, pokrývá jedno z bílých polí diagonály $\mathsf{U}_2$ sousedící s $\mathsf{U}_1$, kde tedy může zakrýt jedině jedno ze sousedních černých polí útvaru $\mathsf{U}_1$. Každý takový přesah by tudíž narušil zjištěnou rovnováhu černých a bílých polí útvaru $\mathsf{U}_1$ v neprospěch (volných) černých polí, proto útvar $\mathsf{U}_1$ je vydlážděn beze zbytku a bez přesahu. Analogickou úvahu lze učinit pro útvar $\mathsf{U}_3$, a tím pádem i útvar $\mathsf{U}_2$ je nutně vydlážděn beze zbytku. Označíme-li $k$ počet možností, jak vydláždit dominovými kostkami útvar $\mathsf{U}_1$, je hledaný počet způsobů roven $k^3$.

Hodnotu $k$ určíme tak, že pomocí matematické indukce vyřešíme obecnější úlohu. Budeme dokazovat, že útvar $\mathsf{L}_n$ vzniklý „přilepením“ $n$ kusů tvaru obráceného $\mathsf{L}$ k obdélníčku $1 \times 2$ (obr. 4) lze vydláždit právě $2n + 1$ způsoby.




Obr. 4

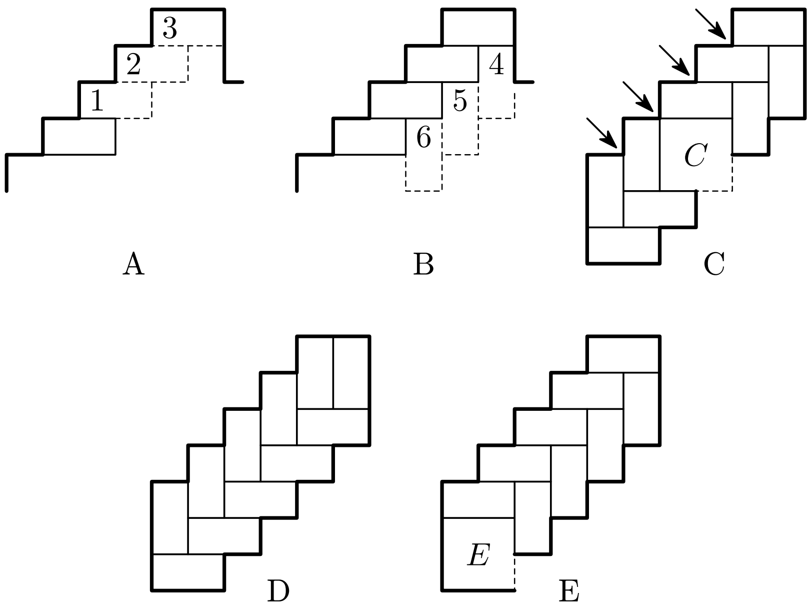
Útvar $\mathsf{L}_1$ lze skutečně vydláždit třemi způsoby. K provedení indukčního kroku od $m$ k $m + 1$ uvažme útvar $\mathsf{L}_{m+1}$ a rozlišme dva případy. Je-li pravé horní obrácené $\mathsf{L}$ vydlážděno beze zbytku, zbývá vydláždit útvar $\mathsf{L}_m$, což lze $2m + 1$ způsoby. V opačném případě je spodní pole $x$ zmíněného $\mathsf{L}$ pokryto vodorovnou kostkou, což postupně vynutí položení dalších vodorovných kostek (jako na obr. 5 vlevo) a následně i svislých kostek (jako na obr. 5 vpravo), až zbyde vydláždit čtverec $2 \times 2$ vpravo nahoře, což lze dvěma způsoby. Celkem tak máme $(2m+1)+2 = 2(m+1)+1$ způsoby vydláždění $\mathsf{L}_{m+1}$, čímž jsme indukční krok dokončili.




Obr. 5

Protože $\mathsf{L}_5 = \mathsf{U}_1$, je hledané $k$ rovno 11 a celkový počet možností, jak vydláždit původní útvar, je tak $k^3 = 11^3 = 1331$.

**Jiné řešení.** Zaměřme se na pět polí, která tvoří levý horní okraj pokrývaného obrazce. Každé z těchto polí je pokryto vodorovnou nebo svislou kostkou. Je vidět, že pokud je některé z těchto polí pokryto vodorovnou kostkou, pak i všechna pole šikmo vzhůru doprava od něj jsou pokryta vodorovnými kostkami (postupně pole 1, 2, 3 na obr. 6A), což dále implikuje pokrytí dalších polí svislými kostkami (postupně pole 4, 5, 6 na obr. 6B). Podobně, je-li některé z oněch pěti polí pokryto svislou kostkou, jsou i všechna pole šikmo dolů doleva od něj pokryta svislými kostkami, což implikuje pokrytí dalších polí vodorovnými kostkami jako v dolní části obr. 6C.




Obr. 6

Nyní rozlišme tři případy.

1. Všech pět polí je pokryto svislými kostkami. Pak vynucená část dláždění vypadá jako na obr. 6D.

2. Všech pět polí je pokryto vodorovnými kostkami. Pak vynucená část dláždění vypadá jako na obr. 6E, přičemž čtverec $E$ může být vydlážděn dvěma různými způsoby (a musí být vydlážděn beze zbytku).

3. V jednom ze čtyř míst označených na obr. 6C šipkami dochází k tomu, že pole napravo vzhůru od tohoto místa jsou pokryta vodorovnými kostkami a pole nalevo dolů od tohoto místa jsou pokryta svislými kostkami. Pak vynucená část dláždění vypadá

jako na obr. 6C, přičemž čtverec $C$ může být vydlážděn dvěma různými způsoby (a musí být vydlážděn beze zbytku).

Ukázali jsme, že útvar $\mathsf{U}_1$ z obr. 3 prvního řešení musí být vydlážděn beze zbytku, a to jedenácti možnými způsoby ($1+2+4\cdot 2 = 11$). Ze symetrie plyne, že také útvar $\mathsf{U}_3$ musí být vydlážděn beze zbytku, a to jedenácti možnými způsoby. Zbývá část $\mathsf{U}_2$, která je stejná jako $\mathsf{U}_1$ a $\mathsf{U}_3$, lze ji tedy vydláždit jedenácti možnými způsoby. Celkem lze obrazec vydláždit $11^3 = 1331$ způsoby.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

- ▷ Za zdůvodnění, že hledaný počet možností je $k^3$, kde $k$ je počet možností jak vydláždit menší útvar, udělte 3 body.
- ▷ Za úspěšné určení $k = 11$ udělte 3 body, a to i v případě, že je řešitel nalezne rozborem všech možností.

  Při postupu bližším druhému řešení udělte
- ▷ 1 bod za úvahy z obr. 6A a obr. 6B o vynucených tazích,
- ▷ 1 bod za symetrickou úvahu odpovídající vynuceným tahům v dolní části obrázku 6C,
- ▷ 1 bod za zdůvodnění, že útvar $\mathsf{U}_1$ musí být vydlážděn beze zbytku (pomocí vynucených tahů jako na obr. 6C).
- ▷ Pokud ovšem chybějí případy D, E z obr. 6, či je chybně určen počet možných vydláždění útvaru $\mathsf{U}_1$, dejte celkem jen 4 body.