70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či odkazy na řešení v našem archivu) najdete ve druhé části textu.

1. *Z číslic* 0 *až* 9 *vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB+CD+EF+GH+IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu* 07 *nepovažujeme za dvoumístná čísla.)* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ze dvou různých číslic A, B vytvoříme dvoumístná čísla AB a BA. Dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný 9.

N2. Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.
a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB+CD$.
b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB+CD$.

N3. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

D1. Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách?

D2. Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

2. *Jaká je největší možná hodnota výrazu $xy-x^3y-xy^3$, jsou-li x, y kladná reálná čísla? Pro která x, y se tato hodnota dosahuje?* (Mária Dományová, Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla u, v platí nerovnost $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u+v)$, přitom rovnost v ní nastane, právě když $u=v$.

N2. Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla.

D1. Pro reálná čísla a, b najděte největší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

D2. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b=2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$.

D4. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC je svými výškami rozdělen na šest nepřekrývajících se trojúhelníků. Zjistěte, zda některé z nich jsou podobné. Pokud ano, existují mezi nimi tři navzájem podobné trojúhelníky?

N2. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$.

a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$.

b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby byl úhel BAC co největší.

c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A'. Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$ byl co největší.

D1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme A', B', C' paty jeho výšek a H jeho ortocentrum (průsečík výšek AA', BB', CC'). Najděte všech 6 tětivových čtyřúhelníků s vrcholy v bodech A, B, C, A', B', C', H.

D2. V rovině jsou dány kružnice m a n, které se protínají v bodech K a L. Na kružnici m leží body A, D, K, L a na kružnici n leží body B, C, K, L v těchto pořadích, přičemž body A, L, B leží na přímce a body C, K, D leží na jiné přímce v těchto pořadích. Dokažte, že $AD \parallel BC$.

D3. Zvolme libovolné body A', B', C' uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ se protínají v jednom bodě.

4. *Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru k má soustava rovnic*

$$|x+6| + 2|y| = 24,$$
$$|x+y| + |x-y| = 2k$$

lichý počet řešení v oboru reálných čísel. (Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V kartézské soustavě souřadnic Oxy znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici a) $|x| + |y| = 7$, b) $|x - 3| + |y| = 7$, c) $|x| + 2|y| = 10$.

N2. Rozmyslete si, jak v kartézské soustavě souřadnic Oxy vypadá množina množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují
a) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$,
b) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$ a zároveň $|x + y| + |x - y| = 10$.

N3. Zdůvodněte, proč pro libovolnou hodnotu reálného parametru k má soustava rovnic

$$|x + 6| + 2|y| = 24,$$
$$|x + 6| + |y| = k$$

sudý počet řešení v oboru reálných čísel.

D1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete.

D2. Užitím grafické metody a dále pak výpočtem určete všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$|x| + |y - 1| = 1,$$
$$|x - 1| + |y| = p,$$

kde p je reálný parametr.

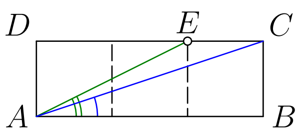
5. *Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB postupně v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.*
(Marián Poturnay)

Návodné a doplňující úlohy:

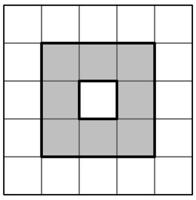
N1. Rozmyslete si, že pravidelný sedmiúhelník je osově souměrný a každá jeho úhlopříčka je rovnoběžná s některou z jeho stran.

D1. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC se standardně značenými úhly. Předpokládejme, že platí $|AB| < |AC|$. Na straně AC zvolme bod D tak, aby platilo $|\sphericalangle CBD| = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Dokažte, že $|AB| + |CD| = |AC|$.

D2. V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| = 3|BC|$ a na straně CD je zvolen bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAE| = 45°$.



6. *Na plánu o rozměrech 12×12 čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce 3×3 (na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?* (Jozef Rajník)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Soutěžní úlohu „zmenšíme“. Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6.

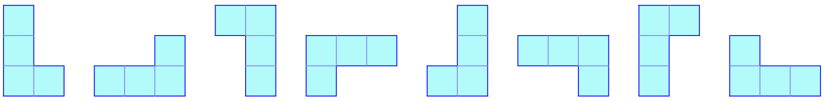
D1. Na plánu o rozměrech 6×6 čtverečků se nachází loď tvaru čtverce 2×2. Zdůvodněte, že je potřeba nejméně 9 výstřelů, abychom měli jistotu, že jsme loď zasáhli.

D2. Určete, kolik je všech dvojic políček daného čtverce 4×4, jejichž zásahem dosáhneme s jistotou i zásah lodi ze zadání soutěžní úlohy, která je v tomto čtverci jakkoli umístěna.

D3. Dokažte, že podmínku soutěžní úlohy *je nemožné* splnit tak, že celý plán 12×12 rozdělíme na 9 čtverců 4×4 a pak v každém z nich vystřelíme na dvě políčka, a to na stejných dvou místech ve všech 9 čtvercích.

D4. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

D5. Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů



Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.
a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.
b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o odkazy na náš archiv.

1. *Z číslic* 0 *až* 9 *vytvoříme dvoumístná čísla* AB, CD, EF, GH, IJ, *přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet* $AB + CD + EF + GH + IJ$ *a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu* 07 *nepovažujeme za dvoumístná čísla.)* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ze dvou různých číslic A, B vytvoříme dvoumístná čísla AB a BA. Dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný 9. [$AB - BA = (10 \cdot A + B) - (10 \cdot B + A) = 9(A - B)$.]

N2. Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.
a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB + CD$.
b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB+CD$.
[a) Minimum je 37, maximum je 73. Minimum, resp. maximum dostaneme, když umístíme nejmenší číslice 1 a 2 na pozice desítek, resp. na pozice jednotek. b) 9. Každé vytvořené číslo $AB + CD$ dává při dělení devíti stejný zbytek jako číslo $A + B + C + D$ rovné $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dává tedy zbytek 1. Proto je rozdíl každých dvou vytvořených čísel $AB + CD$ dělitelný devíti, tudíž hledané minimum je kladným násobkem čísla 9. Že to není více než 9, ukazuje příklad $(12 + 43) - (12 + 34) = 9$.]

N3. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15. [Najít nejmenší a největší hodnotu nestačí. Je potřeba popsat, jak zkonstruovat kterýkoliv přípustný součet, například 13. Popis může vypadat jako algoritmus, který projde všechny součty od 6 do 15. Když začneme s trojicí 1, 2, 3, můžeme číslo 3 opakovaně zvětšovat o jedna tak dlouho, až dostaneme trojici 1, 2, 6. Poté začneme zvětšovat číslo 2, až dostaneme 1, 5, 6. Nakonec budeme zvětšovat číslo 1, až dostaneme 4, 5, 6, čímž celkově projdeme všechna čísla od 6 do 15.]

D1. Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách? [61–C–II–2]

D2. Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší. [68–B–I–1]

2. *Jaká je největší možná hodnota výrazu* $xy - x^3y - xy^3$, *jsou-li* x, y *kladná reálná čísla? Pro která* x, y *se tato hodnota dosahuje?* (Mária Dományová, Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla u, v platí nerovnost $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u + v)$, přitom rovnost v ní nastane, právě když $u = v$. [Zřejmě platí $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geqq 0$. Po roznásobení levé strany tuto nerovnost přepíšeme do tvaru $u - 2\sqrt{uv} + v \geqq 0$, což konečně upravíme na požadované $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u + v)$. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $\sqrt{u} - \sqrt{v} = 0$, což je ekvivalentní $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, tedy i $u = v$. Poznámka. Jelikož výraz na levé straně nerovnosti je *geometrickým* průměrem dvou nezáporných reálných čísel u, v a výraz na pravé straně je jejich *aritmetickým* průměrem, nazývá se uvedená nerovnost *nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem* dvou nezáporných reálných čísel, zkráceně *AG-nerovnost*. Podobná stejně pojmenovaná nerovnost platí i pro n-tice nezáporných čísel.]

N2. Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla. [a) $\frac{1}{4}$. Pokud jsou obě čísla t a $1-t$ kladná, napište pro ně AG-nerovnost. Rozmyslete případy, kdy nejsou obě čísla kladná. Alternativní možností je úprava na čtverec: $t(1-t) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$. b) $\frac{1}{4}$. Substituce $t = uv$ vede na případ a). c) $\frac{1}{4}$. Substituce $t = u^2 + v^2$ vede na případ a).]

D1. Pro reálná čísla a, b najděte největší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

[Maximum je $\frac{1}{2}$ (pro $a = b$). Jistě se stačí omezit na případ, kdy $a > 0$ a $b > 0$. Použijte AG-nerovnost pro dvojici čísel a^2 a b^2. Jinak je možno vyjít z nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$, upravené do tvaru $2ab \leqq a^2 + b^2$.]

D2. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

[68–B–II–1]

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$. [Sečtením tří nerovností $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, $c^2 + a^2 \geqq 2ca$ získáme nerovnost, kterou pak stačí vydělit dvěma.]

D4. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

[68–B–I–4]

3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC je svými výškami rozdělen na šest nepřekrývajících se trojúhelníků. Zjistěte, zda některé z nich jsou podobné. Pokud ano, existují mezi nimi tři navzájem podobné trojúhelníky? [Každý trojúhelník je podobný s právě jedním z ostatních pěti trojúhelníků. Využijte toho, že jde o pravoúhlé trojúhelníky, jejichž ostré vnitřní úhly při stranách trojúhelníku ABC doplňují jeho vnitřní úhly do 90°.]

N2. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$.

a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$.

b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby byl úhel BAC co největší.

c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A'. Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$ byl co největší. [V rovnoramenných trojúhelnících BOC, COA a AOB spočtěte úhly, nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ. V a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, stejně jako v b) nezávisle na volbě δ. V c) vyjde součet $180°$ nezávisle na poloze bodu A nebo A'. Tvrzení c) má známé zobecnění: Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet velikostí jeho protilehlých úhlů je $180°$.]

D1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme A', B', C' paty jeho výšek a H jeho ortocentrum (průsečík výšek AA', BB', CC'). Najděte všech 6 tětivových čtyřúhelníků s vrcholy v bodech A, B, C, A', B', C', H. [Hledejte pravé úhly a Thaletovy kružnice: Body A', B' leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, takže čtyřúhelník $ABA'B'$ je tětivový a podobně $BCB'C'$ a $CAC'A'$. Body B', C' leží na Thaletově kružnici nad průměrem AH, takže čtyřúhelník $AB'HC'$ je tětivový a podobně $BC'HA'$ a $CA'HB'$.]

D2. V rovině jsou dány kružnice m a n, které se protínají v bodech K a L. Na kružnici m leží body A, D, K, L a na kružnici n leží body B, C, K, L v těchto pořadích, přičemž body A, L, B leží na přímce a body C, K, D leží na jiné přímce v těchto pořadích. Dokažte, že $AD \parallel BC$. [Označme $|\sphericalangle LBC| = \beta$. Pak $|\sphericalangle LKC| = 180° - \beta$, $|\sphericalangle LKD| = \beta$ a $|\sphericalangle LAD| = 180° - \beta$. Z rovnosti $|\sphericalangle LBC| + |\sphericalangle LAD| = 180°$ plyne $AD \parallel BC$.]

D3. Zvolme libovolné body A', B', C' uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ se protínají v jednom bodě. [O průsečíku dvou kružnic ukážeme, že leží na třetí kružnici. Označme M například průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům $AB'C'$ a $BC'A'$. Z tětivového čtyřúhelníku $AC'MB'$ plyne rovnost $|\sphericalangle CB'M| = |\sphericalangle AC'M|$. Z tětivového čtyřúhelníku $BA'MC'$ plyne rovnost $|\sphericalangle AC'M| = |\sphericalangle BA'M|$. Dohromady dostáváme rovnost $|\sphericalangle CB'M| = |\sphericalangle BA'M|$, takže čtyřúhelník $CB'MA'$ je tětivový. Bod M se v literatuře označuje termínem *Miquelův bod*.]

4. *Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru k má soustava rovnic*

$$|x + 6| + 2|y| = 24,$$
$$|x + y| + |x - y| = 2k$$

lichý počet řešení v oboru reálných čísel. (Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V kartézské soustavě souřadnic Oxy znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici a) $|x| + |y| = 7$, b) $|x - 3| + |y| = 7$, c) $|x| + 2|y| = 10$. [a) V každém ze čtyř kvadrantů dostaneme rovnici přímky, celkovou množinou je hranice čtverce s vrcholy v bodech $[7, 0]$, $[0, 7]$, $[-7, 0]$, $[0, -7]$. b) Hranice čtverce posunutá o vektor $(3, 0)$ oproti čtverci z úlohy a). c) Hranice kosočtverce s vrcholy v bodech $[10, 0]$, $[0, 5]$, $[-10, 0]$, $[0, -5]$.]

N2. Rozmyslete si, jak v kartézské soustavě souřadnic Oxy vypadá množina množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují
a) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$,
b) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$ a zároveň $|x + y| + |x - y| = 10$.
[a) Jedná se o průnik dvou polorovin s hraničními přímkami $x = y$, resp. $x = -y$. Výsledná množina je pravý úhel s vrcholem v počátku a vnitřním bodem $[0, 1]$. b) Po odstranění absolutních hodnot dostanete rovnici přímky. Průnikem této přímky s úhlem z úlohy a) je úsečka s krajními body $[-5, 5]$ a $[5, 5]$.]

N3. Zdůvodněte, proč pro libovolnou hodnotu reálného parametru k má soustava rovnic
$$|x + 6| + 2|y| = 24,$$
$$|x + 6| + |y| = k$$
sudý počet řešení v oboru reálných čísel. [Obě odpovídající množiny bodů (hranice kosočtverce a čtverce) jsou souměrné podle osy x. Tudíž pro každé řešení (x, y) této soustavy rovnic, je i dvojice $(x, -y)$ jejím řešením. Pokud tedy pro každé řešení (x, y) platí $y \neq 0$, má soustava sudý počet řešení (hranice čtverce a kosočtverce nemohou mít nekonečně mnoho společných bodů). Pokud naopak má soustava řešení tvaru $(x, 0)$, je nutně $k = 24$. Pak existují právě dvě řešení $(-30, 0)$ a $(18, 0)$.]

D1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic
$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$
právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete. [66–B–I–2]

D2. Užitím grafické metody a dále pak výpočtem určete všechna reálná řešení soustavy rovnic
$$|x| + |y - 1| = 1,$$
$$|x - 1| + |y| = p,$$
kde p je reálný parametr. [13–A–II–3]

5. *Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB postupně v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.*
(Marián Poturnay)

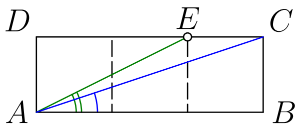
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozmyslete si, že pravidelný sedmiúhelník je osově souměrný a každá jeho úhlopříčka je rovnoběžná s některou z jeho stran. [Osa kterékoliv strany sedmiúhelníku je jeho osou souměrnosti. Rovnoběžnost vybrané úhlopříčky s vhodnou stranou dokažte z osové souměrnosti.]

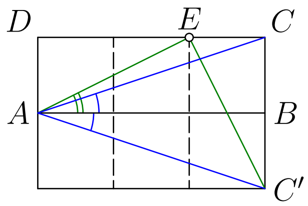
D1. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC se standardně značenými úhly. Předpokládejme, že platí $|AB| < |AC|$. Na straně AC zvolme bod D tak, aby platilo

$|\sphericalangle CBD| = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Dokažte, že $|AB| + |CD| = |AC|$. [Ukažte, že $|AB| = |AD|$. K tomu stačí ověřit rovnost $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ADB|$.]

D2. V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| = 3|BC|$ a na straně CD je zvolen bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAE| = 45°$.

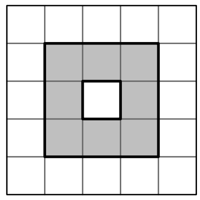


[Obdélník $ABCD$ s úhlopříčkou AC zobrazte v osové souměrnosti podle AB. Bod C se zobrazí na C'. Dokažte, že trojúhelník $AC'E$ je rovnoramenný a pravoúhlý.



]

6. *Na plánu o rozměrech* 12×12 *čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce* 3×3 *(na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?* (Jozef Rajník)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Soutěžní úlohu „zmenšíme". Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6. [V úlohách a) i b) stačí dva výstřely, v c) čtyři výstřely. Plán 6×6 rozdělte na nepřekrývající se čtverce 3×3.]

D1. Na plánu o rozměrech 6×6 čtverečků se nachází loď tvaru čtverce 2×2. Zdůvodněte, že je potřeba nejméně 9 výstřelů, abychom měli jistotu, že jsme loď zasáhli. [Plán 6×6 rozdělte 9 nepřekrývajících se čtverců 2×2.]

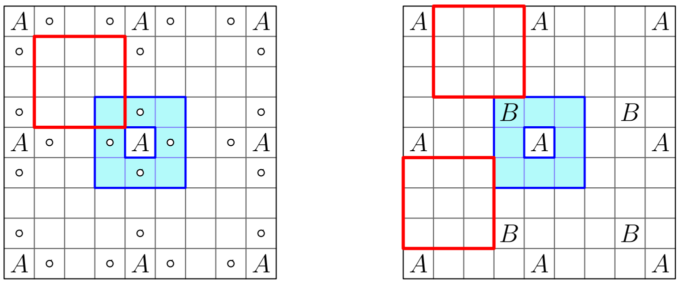
D2. Určete, kolik je všech dvojic políček daného čtverce 4×4, jejichž zásahem dosáhneme s jistotou i zásah lodi ze zadání soutěžní úlohy, která je v tomto čtverci jakkoli umístěna. [Je jich 34. Všechny vyhovující dvojice polí rozdělte do tří skupin podle toho, kolik je v nich políček vnitřního čtverce 2×2 (políčka A, B, C, D na obrázku vlevo). Pak dokažte: V jedné skupině jsou všechny dvojice políček z kvarteta $\mathcal{K} = \{A, B, C, D\}$. Ve druhé skupině jsou všechny dvojice tvořené vždy jedním políčkem $X \in \mathcal{K}$ a jedním z pěti políček $Y \notin \mathcal{K}$, které mají s X aspoň jeden společný vrchol – pro políčko $X = A$ jsou na obrázku vlevo vyznačena tečkou. Ve třetí skupině jsou právě takové dvojice políček, která jsou na obrázku vpravo označena různými čísly téže parity.

◦	◦	◦	
◦	A	B	
◦	C	D	

	1	1	
4			2
4			2
	3	3	

Hledaný počet je tak roven $6 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 34$.]

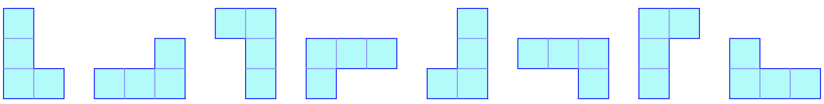
D3. Dokažte, že podmínku soutěžní úlohy *je nemožné* splnit tak, že celý plán 12×12 rozdělíme na 9 čtverců 4×4 a pak v každém z nich vystřelíme na dvě políčka, a to na stejných dvou místech ve všech 9 čtvercích. [Označíme stejným z písmen A, B ta zasažená políčka, která jsou na stejném místě ve všech devíti čtvercích. Políčka A tak jsou rozmístěna v jistém čtverci 9×9, jak vidíme na obrázku vlevo. Pro políčka B je tomu obdobně.



Uvažme loď v poloze, při které obklopuje políčko A ve středu čtverce 9×9. Aby tato loď byla zasažena, musí v některém z osmi jejích políček stát B. Jde-li o jedno ze čtyř modrých políček označených tečkou, pak označení tečkou mají na obrázku vlevo všechna políčka B z našeho čtverce 9×9, ve kterém tudíž můžeme najít čtverce 3×3 bez zásahu, dokonce i bez teček – jeden ze čtyř takových je na stejném obrázku vlevo vyznačen. Je-li uvažovaná loď zasažena v jednom ze čtyř polí v jejích rozích, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že jde o levý horní roh (jinak stačí čtverec na obrázku vlevo pootočit). V uvažovaném čtverci 9×9 se pak nacházejí právě 4 políčka B – viz obrázek vpravo, ve kterém jsou navíc vyznačeny dva z osmi čtverců 3×3 bez zásahu.]

D4. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. [58–B–I–4]

D5. Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů



Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.

a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.

b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává. [58–B–II–2]