70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či odkazy na řešení v našem archivu) najdete ve druhé části textu.

1. *Určete všechny dvojice* (m, n) *přirozených čísel, pro něž platí*

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ *značí ciferný součet přirozeného čísla* a. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna dvojmístná čísla, která jsou rovna trojnásobku svého ciferného součtu.

N2. Určete všechna dvojmístná čísla, která jsou rovna součtu své desítkové číslice a druhé mocniny jednotkové číslice.

N3. Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí $n + s(n) = 2019$, kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n.

N4. V roce 2000 Alena zjistila, že její věk je roven součtu číslic roku, v němž se narodila. Kolik má let v roce 2020?

D1. Určete všechna čtyřmístná čísla, která jsou čtyřikrát menší než číslo napsané stejnými stejnými číslicemi, avšak v opačném pořadí.

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

2. *Určete, pro která přirozená čísla* n *lze tabulku* $n \times n$ *vyplnit čísly* 2 *a* -1 *tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven* 0. (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný a) dvěma, b) třemi.

N2. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0.

N3. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a aby součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách byl stejný (dostaneme tzv. *magický čtverec*).

D1. Tabulka 3×3 je vyplněna navzájem různými přirozenými čísly tak, že v každém řádku i sloupci je součet krajních čísel roven číslu napsanému mezi nimi. Zjistěte, jaké nejmenší číslo může být napsáno uprostřed tabulky.

D2. Kolika způsoby lze do polí tabulky 2×3 vepsat čísla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, aby každé bylo použito právě jednou a aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný třemi?

3. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme po řadě I a U střed kružnice mu vepsané a dotykový bod této kružnice s odvěsnou BC. Určete, jaký je poměr $|AC| : |BC|$, jsou-li úhly CAU a CBI shodné.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť D, E, F jsou dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA, AB. Pomocí jejich délek a, b, c vyjádřete délky úseků, na které body D, E, F rozdělují jednotlivé strany.

N2. Délky stran trojúhelníku jsou vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li tento trojúhelník obvod 72 a jeho nejdelší strana je rozdělena bodem dotyku kružnice jemu vepsané na dva úseky v poměru délek $3 : 4$.

N3. Označme S střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že dotykové body kružnic vepsaných trojúhelníkům ACS, BCS dělí základnu AB na tři shodné úsečky. Určete poměr $|AB| : |CS|$.

N4. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž kružnice vepsaná má poloměr 2.

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Kolmým průmětem kružnice vepsané danému trojúhelníku na přeponu AB je úsečka MN. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je současně středem kružnice opsané trojúhelníku MNC.

4. *Určete, jakých hodnot může nabývat výraz*

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1. (Michal Rolínek, Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť a, b, c jsou nenulová reálná čísla, jejichž součet je roven 0. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

N2. Nechť a, b, c jsou nenulová reálná čísla, jejichž součet je roven 0. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

N3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí rovnost
$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

D1. Jestliže reálná čísla a, b, c splňují rovnici
$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$
pak platí $a+b+c=0$ nebo $a=b=c$. Dokažte.

D2. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)$, jsou-li a_1, a_2, a_3 kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1.

D3. Pro nezáporná reálná čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Najděte největší a nejmenší možnou hodnotu výrazu
$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

5. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.* (Tomáš Jurík)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF.

N2. Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC jsou dány body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B jsou po řadě středy úseček CF a CG. Přímka CD protíná přímku FB v bodě I a přímka CE protíná přímku AG v bodě J. Dokažte, že průsečík přímek AI a BJ leží na přímce FG.

N3. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme M střed jeho strany BC. Na polopřímce opačné k BA leží takový bod D, že $|AB| = |BD|$, a podobně na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE protínají stranu BC po řadě v bodech P, Q. Dokažte, že body P, M, Q dělí úsečku BC na čtyři stejně dlouhé části.

6. *Na tabuli je napsáno několik přirozených čísel od* 1 *do* 100*, přičemž žádné z nich není dělitelné dvoumístným prvočíslem a součin žádných dvou z nich není druhou mocninou přirozeného čísla.*

(a) Určete největší možný počet čísel na tabuli.

(b) Určete největší možný součet čísel na tabuli. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jaký je největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby součin žádných tří z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti? Uveďte příklad vyhovující podmnožiny a zdůvodněte, proč nemůže mít menší počet prvků.

N2. Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o odkazy na náš archiv.

1. *Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí*

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna dvojmístná čísla, která jsou rovna trojnásobku svého ciferného součtu. [Označme $n = \overline{ab}$, pak $n = 10a + b = 3(a + b)$, tj. $7a = 2b$. Protože čísla 2 a 7 jsou nesoudělná, je $b = 7$ a $a = 2$ $(a \neq 0)$, a tedy $n = 27$.]

N2. Určete všechna dvojmístná čísla, která jsou rovna součtu své desítkové číslice a druhé mocniny jednotkové číslice. [Pro hledané číslo $n = \overline{ab}$ platí $n = 10a + b = a + b^2$, tj. $9a = b(b - 1)$. Vzhledem k tomu, že čísla b a $b - 1$ jsou nesoudělná, je buď $9 \mid b$, nebo $9 \mid (b - 1)$. Zadání úlohy vyhovuje pouze $n = 89$.]

N3. Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí $n + s(n) = 2019$, kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n. [69–C–S–1]

N4. V roce 2000 Alena zjistila, že její věk je roven součtu číslic roku, v němž se narodila. Kolik má let v roce 2020? [Součet číslic roku jejího narození je roven nejvýše 28 $(= 1 + 9 + 9 + 9)$. Rok jejího narození je tedy čtyřmístné číslo tvaru $\overline{19xy}$, pro které platí $2000 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$. Odtud po úpravě máme $90 = 11x + 2y$, odkud zřejmě $x = 8$ a $y = 1$. Věk Aleny v roce 2020 je tedy 39 let.]

D1. Určete všechna čtyřmístná čísla, která jsou čtyřikrát menší než číslo napsané stejnými stejnými číslicemi, avšak v opačném pořadí. [Označme $\overline{abcd}$ hledané číslo. Pak platí $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Číslice a musí být sudá a současně $a \leqq 2$. Tedy $a = 2$, a tudíž $d = 8$. Jediným řešením je pak číslo 2178.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69–C–I–1]

2. *Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný a) dvěma, b) třemi. [a) Nelze — pokud by součet čísel už jen v každém řádku tabulky byl dělitelný dvěma, byl by i součet všech čísel v tabulce dělitelný dvěma. Jejich součet je však roven 45. b) Ano — snadno lze najít konkrétní příklad.]

N2. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0. [Pro každé sudé číslo n lze tabulku $n \times n$ požadovaně vyplnit po vzoru černobílé šachovnice. Pro lichá n to nelze, neboť v žádném řádku (sloupci) nemůže být stejný počet čísel -1 a 1.]

N3. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a aby součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách byl stejný (dostaneme tzv. *magický čtverec*). [Protože součet daných devíti čísel je roven 45, musí být součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci roven $45 : 3 = 15$, což je liché číslo. Lichých čísel je v tabulce o jedno víc než sudých. Navíc $1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 10$. Je-li tedy v prostředním poli tabulky číslo 5, snadno najdeme konkrétní příklad možného vyplnění této tabulky.]

D1. Tabulka 3×3 je vyplněna navzájem různými přirozenými čísly tak, že v každém řádku i sloupci je součet krajních čísel roven číslu napsanému mezi nimi. Zjistěte, jaké nejmenší číslo může být napsáno uprostřed tabulky. [69–C–S–2]

D2. Kolika způsoby lze do polí tabulky 2×3 vepsat čísla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, aby každé bylo použito právě jednou a aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný třemi? [Matematický klokan 2018, kat. Junior, úloha 21 (48 možností).]

3. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme po řadě I a U střed kružnice mu vepsané a dotykový bod této kružnice s odvěsnou BC. Určete, jaký je poměr $|AC| : |BC|$, jsou-li úhly CAU a CBI shodné.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť D, E, F jsou dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA, AB. Pomocí jejich délek a, b, c vyjádřete délky úseků, na které body D, E, F rozdělují jednotlivé strany. [Platí $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s - c$, kde $2s = a + b + c$.]

N2. Délky stran trojúhelníku jsou vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li tento trojúhelník obvod 72 a jeho nejdelší strana je rozdělena bodem dotyku kružnice jemu vepsané na dva úseky v poměru délek $3 : 4$. [61–C–I–2]

N3. Označme S střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že dotykové body kružnic vepsaných trojúhelníkům ACS, BCS dělí základnu AB na tři shodné úsečky. Určete poměr $|AB| : |CS|$. [61–C–S–2]

N4. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž kružnice vepsaná má poloměr 2.[69–C–S–3]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Kolmým průmětem kružnice vepsané danému trojúhelníku na přeponu AB je úsečka MN. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je současně středem kružnice opsané trojúhelníku MNC. [Označme I střed kružnice vepsané a U, V, W postupně jeho kolmé průměty na strany BC, CA, AB. Trojúhelníky IMW, INW a IVC jsou zřejmě shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky (s odvěsnami velikosti ϱ poloměru vepsané kružnice, neboť $|MN| = 2\varrho$). Je proto $|IM| = |IN| = |IC|$.]

4. *Určete, jakých hodnot může nabývat výraz*

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1. (Michal Rolínek, Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť a, b, c jsou nenulová reálná čísla, jejichž součet je roven 0. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

[Využijte identitu $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$. Hodnota daného výrazu je rovna -2.]

N2. Nechť a, b, c jsou nenulová reálná čísla, jejichž součet je roven 0. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

[Jmenovatele zlomků na levé straně nahraďte čísly $-c$, $-a$, $-b$ a po sečtení takto upravených zlomků uplatněte stejnou identitu jako při řešení N1.]

N3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

[První zlomek rozšiřte z, druhý xz a třikrát využijte podmínku $xyz=1$.]

D1. Jestliže reálná čísla a, b, c splňují rovnici

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

pak platí $a+b+c=0$ nebo $a=b=c$. Dokažte. [18–B–I–1]

D2. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)$, jsou-li a_1, a_2, a_3 kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. [Dokažte a pak mezi sebou vynásobte nerovnosti $1+a_i \geqq 2\sqrt{a_i}$ pro $i=1,2,3$.]

D3. Pro nezáporná reálná čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Najděte největší a nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

[69–C–II–4]

5. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.* (Tomáš Jurík)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF. [68–C–S–3]

N2. Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC jsou dány body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B jsou po řadě středy úseček CF a CG. Přímka CD protíná přímku FB v bodě I a přímka CE protíná přímku AG v bodě J. Dokažte, že průsečík přímek AI a BJ leží na přímce FG. [68–C–I–2]

N3. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme M střed jeho strany BC. Na polopřímce opačné k BA leží takový bod D, že $|AB| = |BD|$, a podobně na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE protínají stranu BC po řadě v bodech P, Q. Dokažte, že body P, M, Q dělí úsečku BC na čtyři stejně dlouhé části. [8. CPS MO juniorů (2019). K důkazu, že P je střed BM, uvažte střední příčku BS v trojúhelníku ADT. Úsečka TP je střední příčkou v trojúhelníku BMS.]

6. *Na tabuli je napsáno několik přirozených čísel od* 1 *do* 100*, přičemž žádné z nich není dělitelné dvoumístným prvočíslem a součin žádných dvou z nich není druhou mocninou přirozeného čísla.*

(a) Určete největší možný počet čísel na tabuli.

(b) Určete největší možný součet čísel na tabuli. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jaký je největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby součin žádných tří z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti? Uveďte příklad vyhovující podmnožiny a zdůvodněte, proč nemůže mít menší počet prvků. [68–C–S–1]

N2. Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem. [68–C–II–2]