III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Pro tři neznámá přirozená čísla platí, že

- největší společný dělitel prvního a druhého je 8,
- největší společný dělitel druhého a třetího je 2,
- největší společný dělitel prvního a třetího je 6,
- nejmenší společný násobek všech tří čísel je 1680,
- největší z čísel je větší než 100, ale není větší než 200,
- jedno z čísel je čtvrtou mocninou celého čísla.

O která čísla se jedná? Určete všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Z prvních tří podmínek vyplývá, že první číslo je násobkem 24 (aby bylo dělitelné 8 a 6), druhé číslo je násobkem 8 a třetí číslo je násobkem 6. Protože zmiňovaní dělitelé jsou největší možní, musí být neznámá čísla tvaru

$$24a, \quad 8b, \quad 6c, \tag{1}$$

kde a, b, c jsou po dvou nesoudělná čísla.

Nejmenší společný násobek takové trojice čísel je $24 \cdot a \cdot b \cdot c$, což má podle zadání být rovno $1680 = 24 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Aby jedno z čísel bylo čtvrtou mocninou celého čísla, musí to být druhé, a to v případě, že $b = 2$ (první i třetí číslo je dělitelné třemi, ale nejmenší společný násobek všech tří čísel není dělitelný $3^4 = 81$). Tedy neznámá čísla jsou tvaru

$$24a, \quad 16, \quad 6c, \tag{2}$$

kde čísla a, c jsou 5, 7, nebo 1, 35 (v libovolném pořadí).

Aby žádné z čísel nebylo větší než 200, nemůže být ani a, ani c rovno 35. Zbývají tak dvě možnosti: buď $a = 5$ a $c = 7$, nebo $a = 7$ a $c = 5$. Oba případy vyhovují poslední požadované podmínce, tj. aby největší z hledaných čísel bylo větší než 100. Neznámá trojice čísel je některá z následujících

$$\begin{array}{lll} 120, & 16, & 42, \\ 168, & 16, & 30. \end{array}$$

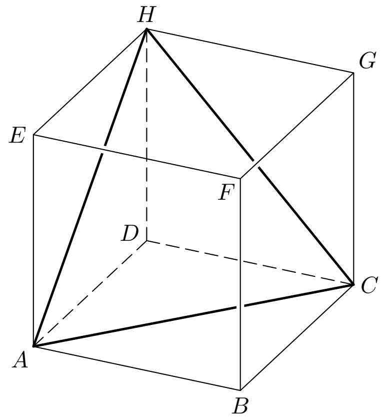
Hodnocení. 2 body za odvození (1); 2 body za rozklad čísla 1680 a odvození (2); 2 body za rozbor možností a výsledek.

Z9–III–2

Trojúhelník ACH je určen třemi vrcholy krychle, viz obrázek. Výška tohoto trojúhelníku na stranu CH má velikost 12 cm.

Vypočítejte obsah trojúhelníku ACH a velikost hrany příslušné krychle.

(*M. Krejčová*)



Možné řešení. Každá ze stran trojúhelníku ACH je úhlopříčkou některé stěny krychle. Stěny krychle jsou navzájem shodné čtverce, tedy trojúhelník ACH je rovnostranný.

Vztah mezi velikostmi výšky v a strany b rovnostranného trojúhelníku je $v = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Velikost strany trojúhelníku ACH je tedy

$$b = \frac{2 \cdot 12}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \doteq 13,9\,(\mathrm{cm}).$$

Obsah trojúhelníku se stranou velikosti b a odpovídající výškou v je $S = \frac{1}{2}b \cdot v$. Obsah trojúhelníku ACH je tedy

$$S = \frac{12 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3} \doteq 83,1\,(\mathrm{cm}^2).$$

Vztah mezi velikostmi strany a a úhlopříčky b čtverce je $b = a\sqrt{2}$. Velikost hrany krychle je tedy

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6} \doteq 9,8\,(\mathrm{cm}).$$

Hodnocení. Po 1 bod za rozpoznání rovnostrannosti trojúhelníku ACH, vyjádření b, S a a; 2 body podle kvality komentáře.

Poznámky. Vztahy $v = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ a $b = a\sqrt{2}$ lze nalézt v tabulkách nebo odvodit pomocí Pythagorovy věty.

Podle způsobu vyjádření výrazů s odmocninami se mohou drobně lišit výsledky po zaokrouhlování. Takové rozdíly nemají vliv na hodnocení úlohy.

Z9–III–3

Je dána posloupnost sedmi čísel a, b, c, d, e, f, g. Každé z čísel b, c, d, e, f je aritmetickým průměrem sousedních dvou čísel.

Ukažte, že číslo d je aritmetickým průměrem čísel a a g. *(K. Pazourek)*

Možné řešení. Pokud je číslo b aritmetickým průměrem a a c, potom rozdíly $b-a$ a $c-b$ jsou stejné:

$$\begin{aligned} b &= \frac{a+c}{2}, \\ b+b &= a+c, \\ b-a &= c-b. \end{aligned}$$

Všechny úpravy jsou ekvivalentní, tudíž platí i opačné tvrzení: pokud jsou rozdíly $b-a$ a $c-b$ stejné, potom je číslo b aritmetickým průměrem a a c.

Ze zadání vyplývá, že rozdíly dvojic sousedních čísel jsou stejné:

$$b-a = c-b = d-c = e-d = f-e = g-f.$$

Rozdíly $d-a$ a $g-d$ jsou proto také stejné (a jsou rovny trojnásobku rozdílu sousedních čísel). Číslo d je tedy aritmetickým průměrem čísel a a g.

Hodnocení. 3 body za rozpoznání vztahu mezi aritmetickým průměrem a rozdíly sousedních čísel; 3 body za vlastní uplatnění a kvalitu komentáře.

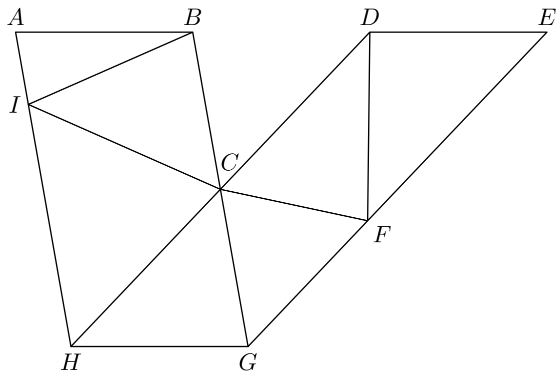
Poznámky. Úlohu lze řešit formálně manipulací se vztahy $b = \frac{a+c}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$ apod. nebo také názorně s číselnou osou. Taková řešení hodnoťte podle úplnosti a kvality provedení.

Posloupnosti s uvedenými vlastnostmi se nazývají aritmetické.

Z9–III–4

Jsou dány rovnoběžníky $ABGH$ a $DEGH$, jejichž vrcholy A, B, D a E leží na jedné přímce. Bod C je průsečíkem úseček BG a DH, bod I leží na úsečce AH a bod F leží na úsečce EG. Mnohoúhelník $ABCDEGH$ sestává ze sedmi trojúhelníků, přičemž mezi trojúhelníky ABI, BCI, CHI, DEF, CDF a CFG je jeden s obsahem $3\,\mathrm{cm}^2$, jeden s obsahem $5\,\mathrm{cm}^2$, dva s obsahem $7\,\mathrm{cm}^2$ a jeden s obsahem $10\,\mathrm{cm}^2$. Kromě trojúhelníků s obsahy $7\,\mathrm{cm}^2$ nemá žádná další dvojice z uvedených sedmi trojúhelníků stejný obsah.

Rozhodněte, zda lze s jistotou určit trojúhelníky s obsahy $7\,\mathrm{cm}^2$. Dále určete obsah mnohoúhelníku $ABCDEGH$; najděte všechny možnosti.



Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Rovnoběžníky $ABGH$ a $DEGH$ mají společnou stranu a stejnou výšku, mají tedy stejný obsah. To znamená, že pro obsahy příslušných trojúhelníků platí:

$$S_{ABI} + S_{BCI} + S_{CHI} + S_{CGH} = S_{DEF} + S_{CDF} + S_{CFG} + S_{CGH}. \qquad (1)$$

Nezávisle na poloze bodu I na úsečce AH je obsah trojúhelníku BCI stále stejný. Pokud by bod I splynul s bodem A, tvořil by tento trojúhelník společně s trojúhelníkem CGH polovinu rovnoběžníku $ABGH$. Z obdobného důvodu tvoří také trojúhelníky CDF a CGH polovinu obsahu rovnoběžníku $DEGH$. Celkem tedy pro obsahy trojúhelníků platí:

$$S_{BCI} + S_{CGH} = S_{ABI} + S_{CHI} = S_{DEF} + S_{CFG} = S_{CDF} + S_{CGH}. \qquad (2)$$

Zejména trojúhelníky BCI a CDF mají stejný obsah, a to právě $7\,\mathrm{cm}^2$.

Tři ze čtyř trojúhelníků ABI, CHI, DEF a CFG mají obsahy $3\,\mathrm{cm}^2$, $5\,\mathrm{cm}^2$ a $10\,\mathrm{cm}^2$. Probereme všechny možné součty (2), odtud určíme obsah zbylého trojúhelníku z uvedené čtveřice, obsah trojúhelníku CGH a obsah mnohoúhelníku $ABCDEGH$:

součet (2)	$3+5=8$	$3+10=13$	$5+10=15$
obsah zbylého	$8-10=-2$	$13-5=8$	$15-3=12$
obsah CGH	—	$13-7=6$	$15-7=8$
obsah celého	—	$14+26+6=46$	$14+30+8=52$

V obou případech je splněna podmínka, že kromě trojúhelníků s obsahy $7\,\mathrm{cm}^2$ nemá žádná další dvojice trojúhelníků stejný obsah. Mnohoúhelník $ABCDEGH$ má obsah buď $46\,\mathrm{cm}^2$, nebo $52\,\mathrm{cm}^2$.

Hodnocení. 1 bod za odvození vztahu (1); 2 body za vztahy (2) a rozpoznání trojúhelníků s obsahy $7\,\mathrm{cm}^2$; 3 body za rozbor možností, ověření podmínek a určení možných obsahů mnohoúhelníku $ABCDEGH$.