Matematická olympiáda 2021/22 – 71. ročník

Návodné a doplňující úlohy domácího kola

71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Je možné vyplnit tabulku $n\times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte a) pro $n=9$, b) pro $n=12$.* (Tomáš Bárta)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Lze tabulku 5×5 vyplnit celými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku byl lichý a součet čísel v každém sloupci sudý?

N2. Pro která $n \leqq 8$ lze tabulku $n\times n$ vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze?

N3. Pro která $d \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček?

D1. Udejte příklad vyplnění tabulky 71×71, které vyhovuje zadání soutěžní úlohy.

D2. Dokažte, že tabulku $n\times n$ lze vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze pro každé $n \geqq 18$.

D3. Je možné obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě černě a bíle tak, aby v každém řádku bylo jen konečně mnoho políček černých a v každém sloupci jen konečně mnoho políček bílých?

2. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že tečny vedené z bodu A ke kružnici k se středem O jsou souměrně sdružené podle přímky OA.

N2. Dokažte, že v libovolném lichoběžníku je spojnice středů jeho ramen rovnoběžná s jeho základnami.

D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD se protínají v bodě P a přímky AD, BC v bodě Q. Dokažte, že středy základen AB, CD leží na přímce PQ.

D2. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označme P průsečík os vnějších úhlů u vrcholů A, D a podobně Q průsečík os vnějších úhlů u vrcholů B, C. Dokažte, že délka úsečky PQ je rovna polovině obvodu $ABCD$.

D3. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že trojúhelníky ABC, BCD, CDE, DEA mají všechny shodný obsah. Úsečky AC, AD protnou úsečku BE postupně v bodech M, N. Dokažte, že $|BM| = |NE|$.

D4. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek AD a BC, dále Q průsečík polopřímek BA a CD a konečně R kolmý průmět bodu D na přímku PQ. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ADQ a CDP jsou z bodu R vidět pod stejným úhlem.

3. *Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší kladné celé číslo n takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocnina celého čísla.

N2. Uvažme celé $k \geqq 2$. Dokažte, že pokud v rovnosti $a \cdot b = c$ jsou dvě ze tří zastoupených kladných celých čísel a, b, c rovna k-tým mocninám celých čísel, je takové i číslo třetí.

N3. Dokažte, že pro všechna dostatečně velká kladná celá čísla n platí:
a) $n^2 > 10n + 100$, b) $2^n > 10n^2$, c) $3^n > 10 \cdot 2^n$.

D1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n, k větší než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buďto celé, nebo iracionální.

D2. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla.

D3. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

D4. Pro které dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$?

4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

Návodné a doplňující úlohy:

Řešení soustavy rovnic často zahajujeme tak, že některé dvě její rovnice od sebe odečteme nebo několik jejích rovnic sečteme. Někdy se přitom vyplatí zmíněné rovnice předem vynásobit vhodnými čísly nebo i výrazy s neznámými, abychom získali jejich co nejjednodušší důsledek.

N1. Použijte popsanou metodu k vyřešení soustav: a) $3x + 2y = x^2 \wedge 2x + 3y = y^2$, b) $3xy - 10 = 2x^2 \wedge 2xy + 15 = 3y^2$ v oboru $\mathbb{R}$.

N2. Ukažte, že z prvních dvou rovnic soustavy ze soutěžní úlohy vyplývá, že obě čísla $z - x$ a $x + y + z$ jsou různá od nuly. Jaké jsou obdobné důsledky jiných dvou rovnic?

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

D3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1, \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

D4. Navzájem různá reálná čísla a, b, c splňují $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokažte, že $|abc| = 1$.

D5. Najděte všechna reálná čísla $x \geqq 3$, pro která platí

$$x + \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = 5.$$

D6. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

5. *V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka S_bS_c se protínají v jednom bodě.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte *tvrzení „o Švrčkově bodu“*: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A.

N2. Dokažte *tvrzení „o třech prstech“*: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

N3. Dokažte, že v soutěžní úloze je přímka S_bS_c osou úsečky AI.

N4. Dokažte *větu o úsekovém úhlu*: Uvažme trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, tečnu kružnice k vedenou bodem B a bod T na této tečně v polorovině opačné k polorovině BCA. Pak platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Úhel TBC je tzv. *úsekový úhel* příslušný tomu oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A.)

D1. V situaci ze soutěžní úlohy označme dále $S_a \neq A$ průsečík polopřímky AI s kružnicí k. Dokažte, že bod I je průsečíkem výšek trojúhelníku $S_aS_bS_c$.

D2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný.

D4. Označme I střed kružnice vepsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Jeho vnitřní bod P splňuje podmínku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

D5. Osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C ostroúhlého trojúhelníku ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L. Označme M průsečík přímky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na přímce CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokažte, že $|NK| = |NB|$.

6. *Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.*

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla t taková, že čísla t, $2t-1$ a $2t+1$ jsou všechna prvočísla.

N2. Jsou dána reálná čísla d a $q \notin \{0, 1\}$. Dokažte, že posloupnost čísel $x_0, x_1, \ldots$ splňuje pro každý index i rovnost $x_{i+1} = qx_i + d$, právě když je její obecný člen tvaru $x_i = Kq^i + c$, kde $c = d/(1-q)$ a K je libovolná konstanta (určená prvním členem x_0).

N3. Uvažme jakékoliv zobrazení $f\colon M \to M$ na konečné množině M a prvek $m \in M$. Dokažte, že posloupnost $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ je od jistého členu periodická. Dále dokažte, že pokud zobrazení f je prosté, pak tato posloupnost je periodická od svého prvního členu m.

N4. Dokažte, že pro každé liché číslo d se zbytky čísel $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ po dělení číslem d od prvního místa periodicky opakují.

N5. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Pro libovolné prvočíslo p a celé číslo a nesoudělné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

D1. Dokažte, že každé kladné celé číslo n má násobek, v jehož desítkovém zápisu se vyskytují jen nuly a jedničky.

D2. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n existuje n-místné číslo a_n, které je násobkem 5^n a jehož všechny číslice jsou liché.

D3. Dokažte, že každé kladné celé číslo d má násobek, který je Fibonacciho číslem. (Fibonacciho čísla jsou určena vztahy $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro každý index $n \geqq 1$.)

D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení čtyřmi zbytek 3.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Je možné vyplnit tabulku $n\times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte*
a) pro $n = 9$, b) pro $n = 12$. (Tomáš Bárta)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Lze tabulku 5×5 vyplnit celými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku byl lichý a součet čísel v každém sloupci sudý? [Nelze. Pro spor předpokládejme opak a označme S součet čísel v celé tabulce. Sčítáním přes řádky je S rovno součtu pěti lichých čísel, tedy je liché. Sčítáním přes sloupce je S rovno součtu sudých čísel, tedy je sudé.]

N2. Pro která $n \leqq 8$ lze tabulku $n \times n$ vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze? [Pouze pro $n = 5$ a $n = 7$. V případě $n \leqq 6$ je součet čísel v každém sloupci nejvýše 12, takže kvůli dělitelnosti 7 musí být roven 7. Součet čísel v celé tabulce proto musí být roven $7n$, podle součtů čísel v řádcích to však musí být násobek pěti, takže nutně $n = 5$. Příklad pro $n = 5$: tři řádky vyplníme jedničkami, dva řádky dvojkami. Příklad pro $n = 7$: čtyři sloupce vyplníme jedničkami, tři sloupce dvojkami. V případě $n = 8$ je součet čísel v každém sloupci v rozmezí 8–16, takže kvůli dělitelnosti sedmi musí být roven 14. Součet všech čísel v tabulce je pak $8 \cdot 14$, což není násobek pěti, takže takový není ani součet čísel v některém řádku.]

N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček? [Pro každé takové d: Pro dané d lze například obarvit políčka, která na obrázku obsahují čísla nejvýše rovna d.

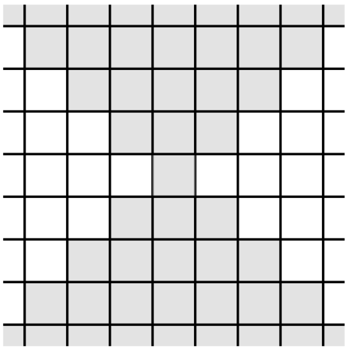
1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

]

D1. Udejte příklad vyplnění tabulky 71×71, které vyhovuje zadání soutěžní úlohy. [Protože číslo $140 = 69 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ je násobkem pěti i násobkem sedmi, vyhovuje každé vyplnění, kdy je v každém řádku i sloupci 69 dvojek a 2 jedničky. K tomu stačí tabulku vyplnit „cyklicky“: do prvního řádku napsat $(1, 1, 2, 2\ldots, 2)$, do druhého $(2, 1, 1, 2, 2, \ldots, 2)$ atd., až do posledního 71. řádku $(1, 2, 2, \ldots, 2, 1)$.]

D2. Dokažte, že tabulku $n \times n$ lze vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze pro každé $n \geqq 18$. [Podmínka $n \geqq 18$ zaručuje existenci celého čísla s, které je násobkem 35 a splňuje nerovnosti $n \leqq s \leqq 2n$. Součet čísel v každém řádku i sloupci tabulky $n \times n$ bude roven určenému číslu s, pokud v každém řádku i sloupci bude $2n - s$ jedniček a $s - n$ dvojek. Dosáhneme toho podobně jako v řešení úlohy D1, když řádky tabulky postupně vyplníme „cyklickými“ změnami požadované sestavy jedniček a dvojek.]

D3. Je možné obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě černě a bíle tak, aby v každém řádku bylo jen konečně mnoho políček černých a v každém sloupci jen konečně mnoho políček bílých? [Ano, například jako na obrázku:



]

2. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.*

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že tečny vedené z bodu A ke kružnici k se středem O jsou souměrně sdružené podle přímky OA. [Stačí dokázat, že souměrně sdružené jsou body dotyku T_1, T_2 uvažovaných tečen. Jsou to však průsečíky dané kružnice k s Thaletovou kružnicí nad průměrem OA a obě tyto kružnice jsou podle přímky OA souměrné. Jinak rovněž stačí ověřit shodnost trojúhelníků T_1OA a T_2OA podle věty Ssu.]

N2. Dokažte, že v libovolném lichoběžníku je spojnice středů jeho ramen rovnoběžná s jeho základnami. [Rozdělme daný lichoběžník jednou jeho úhlopříčkou na dva trojúhelníky a uvažme jejich střední příčky rovnoběžné se základnami lichoběžníku. Odtud užitím známých vlastností trojúhelníkových příček plyne, že spojnice středů ramen lichoběžníku je nejen rovnoběžná s jeho základnami, ale navíc má délku rovnou aritmetickému průměru jejich délek.]

D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD se protínají v bodě P a přímky AD, BC v bodě Q. Dokažte, že středy základen AB, CD leží na přímce PQ. [Bod P je vnitřním středem stejnolehlosti úseček AB a CD, bod Q je vnějším středem jejich stejnolehlosti. V obou stejnolehlostech si středy úseček AB, CD odpovídají, takže leží se středy stejnolehlostí P, Q na téže přímce.]

D2. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označme P průsečík os vnějších úhlů u vrcholů A, D a podobně Q průsečík os vnějších úhlů u vrcholů B, C. Dokažte, že délka úsečky PQ je rovna polovině obvodu $ABCD$. [Jelikož body P, Q leží na osách dvou úhlů, jsou to středy kružnic dotýkajících se přímek AB, CD a po řadě ramen AD, BC. Body P, Q proto leží na ose pásu mezi rovnoběžkami AB a CD, která prochází středy M, N ramen AD, BC. Snadno dopočítáme, že $|\sphericalangle APD| = 90° = |\sphericalangle BQC|$, takže body P, Q leží na kružnicích s průměry AD, BC. Při obvyklém označení délek stran $ABCD$ tak platí

$$|PQ| = |PM| + |MN| + |NQ| = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$ (Mexiko 1999)]

D3. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že trojúhelníky ABC, BCD, CDE, DEA mají všechny shodný obsah. Úsečky AC, AD protnou úsečku BE postupně v bodech M, N. Dokažte, že $|BM| = |NE|$. [Z rovnosti obsahů BCD a CDE plyne $BE \parallel CD$. Podobně dokážeme $BC \parallel AD$ a $DE \parallel AC$, takže trojúhelníky BCM a NDE jsou podobné (uu). Jelikož $BE \parallel CD$, výšky těchto dvou trojúhelníků z vrcholů C, D jsou shodné, takže jde o dva shodné trojúhelníky, a proto $|BM| = |NE|$. (Jižní Afrika 2003)]

D4. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek AD a BC, dále Q průsečík polopřímek BA a CD a konečně R kolmý průmět bodu D na přímku PQ. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ADQ a CDP jsou z bodu R vidět pod stejným úhlem. [Označme I, J středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ADQ, CDP a r_i, r_j jejich poloměry. Díky podobným trojúhelníkům stačí dokázat rovnost $|RI|/|RJ| = r_i/r_j$. Dále označme K střed a r poloměr kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCD$ a E průsečík přímek IJ a PQ. Body K, I leží na ose úhlu BQC tak, že $|QK|/|QI| = r/r_i$. Podobně body K, J leží na ose úhlu APB tak, že $|PK|/|PJ| = r/r_j$. Po dosazení za druhý a třetí zlomek v rovnosti

$$\frac{|EI|}{|EJ|} \cdot \frac{|PJ|}{|PK|} \cdot \frac{|QK|}{|QI|} = 1$$

(Menelaova věta pro trojúhelník IJK) vychází $|EI|/|EJ| = r_i/r_j$. Zároveň zřejmě platí i $|DI|/|DJ| = r_i/r_j$. Kružnice s průměrem DE je tedy Apolloniovou kružnicí pro body I, J a poměr r_i/r_j. Jelikož $|\sphericalangle DRE| = 90°$, bod R leží na této kružnici, a tak platí $|RI|/|RJ| = r_i/r_j$, jak jsme chtěli dokázat. (Rusko 2008)]

3. *Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.*
(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší kladné celé číslo n takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocnina celého čísla. [Celé číslo je třetí mocninou, právě když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem tří. Jelikož $75 = 3 \cdot 5^2$, hledané nejmenší n je rovno $3^2 \cdot 5 = 45$.]

N2. Uvažme celé $k \geqq 2$. Dokažte, že pokud v rovnosti $a \cdot b = c$ jsou dvě ze tří zastoupených kladných celých čísel a, b, c rovna k-tým mocninám celých čísel, je takové i číslo třetí. [Vyjdeme z poznatku, že celé číslo je k-tou mocninou, právě když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem čísla k. V naší situaci pro libovolné prvočíslo p označme α, β, γ (nezáporné) počty zastoupení tohoto p v rozkladech na prvočinitele po řadě čísel a, b, c. Pak rovnost $a \cdot b = c$ znamená $\alpha + \beta = \gamma$, takže dokazované tvrzení plyne ze zřejmé poučky: jsou-li dvě z takových čísel α, β, γ dělitelná daným číslem k, je takové i číslo třetí.]

N3. Dokažte, že pro všechna dostatečně velká kladná celá čísla n platí:
a) $n^2 > 10n + 100$, b) $2^n > 10n^2$, c) $3^n > 10 \cdot 2^n$. [(a) Je-li $n > 20$, zřejmě platí

$n^2 - 10n - 100 = n(n-10) - 100 > 20 \cdot 10 - 100 > 0$. b) Pro $n = 10$ platí $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$. Navíc pokud dokazovaná nerovnost platí pro nějaké $n \geqq 10$, pak platí i pro $n+1$: Skutečně, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10n^2 \geqq 10(n+1)^2$, kde poslední nerovnost platí, protože je ekvivalentní s nerovností $n(n-2) \geqq 1$, zřejmě platnou dokonce pro každé $n \geqq 3$. c) I když i zde je důkaz indukcí snadný, ukažme, jak se obejít bez ní: Nerovnost přepsaná ve tvaru $(\frac{3}{2})^n > 10$ je splněna (s ohledem na $\frac{3}{2} > 1$ a odtud plynoucí fakt, že funkce $y = (\frac{3}{2})^x$ je rostoucí), právě když platí $n > \log_{\frac{3}{2}}(10) \doteq 5{,}68$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n, k větší než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buďto celé, nebo iracionální. [Předpokládejme, že číslo $\sqrt[k]{n}$ je racionální, takže $\sqrt[k]{n} = u/v$, kde u a v jsou celá kladná čísla. Pak platí rovnost $n \cdot v^k = u^k$ a z výsledku úlohy N2 plyne, že rovněž číslo n je k-tou mocninou celého čísla, tj. číslo $\sqrt[k]{n}$ je celé.]

D2. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla. [Snadno ověříme, že pro $n > 11$ platí $n^2 < n^2 + n - 11 < (n+1)^2$. Stačí tedy probrat $n \leqq 11$. Vyhovují $n \in \{3, 4, 11\}$.]

D3. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$. [59–A–III–1]

D4. Pro které dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$? [Shortlist IMO 2006, Problem N1. (IMO 2006)]

4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$xy + 1 = z^2,$$
$$yz + 2 = x^2,$$
$$zx + 3 = y^2.$$

(Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Řešení soustavy rovnic často zahajujeme tak, že některé dvě její rovnice od sebe odečteme nebo několik jejích rovnic sečteme. Někdy se přitom vyplatí zmíněné rovnice předem vynásobit vhodnými čísly nebo i výrazy s neznámými, abychom získali jejich co nejjednodušší důsledek.

N1. Použijte popsanou metodu k vyřešení soustav: a) $3x + 2y = x^2 \wedge 2x + 3y = y^2$, b) $3xy - 10 = 2x^2 \wedge 2xy + 15 = 3y^2$ v oboru $\mathbb{R}$. [a) $(x, y) \in \{(0,0), (5,5)\}$ a $(x, y) \in \{(2,-1), (-1,2)\}$. Odečtením rovnic a úpravou výsledku dostaneme $(x-y)(x+y-1) = 0$, odkud $y = x$ nebo $y = 1 - x$. Po dosazení takových y vyjdou v prvním, resp. druhém případě vždy dvě výše uvedená řešení. b) $(x, y) \in \{(2,3), (-2,-3)\}$. Vynásobme dané rovnice po řadě výrazy y a x. Po jejich následném sečtení se ve výsledku kubické členy navzájem zruší a dostaneme tak rovnici $15x - 10y = 0$, podle které $x = 2t$ a $y = 3t$ pro vhodné reálné t. Po dosazení takových x a y vyjde rovnice $t^2 = 1$ s kořeny $t = \pm 1$, kterým odpovídají výše uvedená řešení.]

N2. Ukažte, že z prvních dvou rovnic soustavy ze soutěžní úlohy vyplývá, že obě čísla $z - x$ a $x + y + z$ jsou různá od nuly. Jaké jsou obdobné důsledky jiných dvou rovnic? [Posuzované dvě rovnice od sebe odečtěte a výsledek pak upravte.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

[57–A–III–1]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

[68–A–III–1]

D3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1, \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

[69–A–II–1]

D4. Navzájem různá reálná čísla a, b, c splňují $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokažte, že $|abc| = 1$. [První rovnost přepíšeme na $a - b = 1/c - 1/b = (b - c)/(bc)$. Podobně obdržíme $b - c = (c - a)/(ca)$ a $c - a = (a - b)/(ab)$. Po vynásobení tří odvozených rovností a následném vydělení nenulovým číslem $(a - b)(b - c)(c - a)$ už získáme požadované $(abc)^2 = 1$.]

D5. Najděte všechna reálná čísla $x \geqq 3$, pro která platí

$$x + \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = 5.$$

[Odečteme jedničku a upravíme na

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}) = 4.$$

Po podobném odečtení dvojky, resp. trojky získáme

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) = 3,$$
$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) = 2.$$

Odvozenou trojici vztahů teď snadno vyřešíme jako soustavu: Vydělíme-li vždy součin dvou rovnic tou třetí, dostaneme (s ohledem na nezápornost součtu dvou odmocnin)

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4 \cdot 3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{24},$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = \sqrt{4 \cdot 2/3} = \frac{1}{3}\sqrt{24},$$
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3 \cdot 2/4} = \frac{1}{4}\sqrt{24},$$

z čehož už snadno (jako ze soustavy tří lineárních rovnic pro neznámé hodnoty tří zastoupených odmocnin) určíme

$$\sqrt{x-1} = \frac{7}{24}\sqrt{24}, \quad \sqrt{x-2} = \frac{5}{24}\sqrt{24}, \quad \sqrt{x-3} = \frac{1}{24}\sqrt{24}.$$

Těmto třem vztahům vyhovuje jediné číslo $x = 73/24$. Zkouška dosazením do původní rovnice je snadná.]

D6. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. [Jakékoliv $n \geqq 3$ dělitelné třemi. Vynásobíme-li i-tou rovnici číslem a_{i+2} a všechny je pak sečteme, vznikne na levé straně součet členů $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ a součet členů a_{i+2}. Téhož výsledku na levé straně lze dosáhnout, pokud před sečtením vynásobíme i-tou rovnici číslem a_{i-1} (položíme přitom $a_0 = a_n$). Rovnost obou vzniklých pravých stran $\sum_{i=1}^n a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i-1} a_{i+2}$ lze přepsat do tvaru $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{i-1} - a_{i+2})^2 = 0$, takže musí platit $a_{i-1} = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odtud v případě $3 \nmid n$ vidíme, že dokonce všechna čísla a_i musí být stejná, což nelze, neboť rovnice $x^2 + 1 = x$ nemá reálné řešení. Naopak v případě $3 \mid n$ podmínkám ze zadání úlohy zřejmě vyhovíme n-ticí $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (2, -1, -1, \ldots, 2, -1, -1)$. (IMO 2018)]

5. *V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka $S_b S_c$ se protínají v jednom bodě.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte *tvrzení „o Švrčkově bodu“*: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. [Označme $S \neq A$ druhý průsečík osy úhlu BAC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Kratším obloukům SB, SC kružnice opsané příslušejí stejně velké obvodové úhly, takže tyto oblouky jsou shodné.]

N2. Dokažte *tvrzení „o třech prstech“*: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$. [S ohledem na symetrii stačí dokázat jen rovnost $|SB| = |SI|$. Při standardním značení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Protože SIB je vnější úhel trojúhelníku ABI, platí rovněž

$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

Trojúhelník SIB tak skutečně má shodná ramena SB a SI.]

N3. Dokažte, že v soutěžní úloze je přímka $S_b S_c$ osou úsečky AI. [Podle výsledku úlohy N2 platí $|S_b A| = |S_b I|$ a $|S_c A| = |S_c I|$, takže S_A, S_B jsou dva různé body osy úsečky AI.]

N4. Dokažte *větu o úsekovém úhlu*: Uvažme trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, tečnu kružnice k vedenou bodem B a bod T na této tečně v polorovině opačné k polorovině BCA. Pak platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Úhel TBC je tzv. *úsekový úhel* příslušný tomu oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A.) [Označme Y libovolný vnitřní bod toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Pak YBC je obvodový úhel shodný s obvodovým úhlem YAC. Limitním přechodem $Y \to B$ dostaneme, že úsekový úhel TBC má stejnou velikost jako obvodový úhel BAC. (Tečna TB je totiž limitní polohou sečny YB.)]

D1. V situaci ze soutěžní úlohy označme dále $S_a \neq A$ průsečík polopřímky AI s kružnicí k. Dokažte, že bod I je průsečíkem výšek trojúhelníku $S_aS_bS_c$. [Přímka S_bS_c je jakožto osa úsečky AI (viz N3) kolmá na S_aI. Podobně přímka S_bI je kolmá na S_aS_c.]

D2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN. [70–A–III–2]

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D4. Označme I střed kružnice vepsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Jeho vnitřní bod P splňuje podmínku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$. [Nechť $|\sphericalangle PBA| = \frac{1}{2}\beta + \delta$, pak $|\sphericalangle PBC| = \frac{1}{2}\beta - \delta$ a ze zadané úhlové podmínky snadno plyne $|\sphericalangle PCA| = \frac{1}{2}\gamma - \delta$ a $|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\gamma + \delta$. Odtud $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, takže úhel BPC má velikost $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, což je jak známo i velikost úhlu BIC. Proto bod P z poloroviny BCA leží na oblouku BIC kružnice opsané trojúhelníku BIC. Ta má střed ve středu kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, což je bod na polopřímce AI, takže I je tím bodem oblouku BIC, který je k bodu A nejblíže. (IMO 2006)]

D5. Osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C ostroúhlého trojúhelníku ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L. Označme M průsečík přímky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na přímce CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokažte, že $|NK| = |NB|$. [Bod M jakožto průsečík osy ostrého úhlu CBL a osy úsečky CL je středem kratšího oblouku CL kružnice opsané trojúhelníku BCL. Odtud a ze zadané rovnoběžnosti plyne $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle KNC|$, takže čtyřúhelník $BCKN$ je tětivový. Proto bod N leží na kratším oblouku BK kružnice opsané trojúhelníku BCK, který má totiž ostrý úhel u vrcholu C, na jehož ose bod N rovněž leží. Je tak středem zmíněného oblouku BK, odkud již plyne $|NK| = |NB|$. (Junior Balkan 2010)]

6. *Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.*

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla t taková, že čísla t, $2t - 1$ a $2t + 1$ jsou všechna prvočísla. [$t = 2$ a $t = 3$, kdy jde o trojice prvočísel $(2, 3, 5)$, resp. $(3, 5, 7)$. Protože

$t = 1$ není prvočíslo, zbývá vyloučit případ $t \geqq 4$. Tehdy prvočíslo t dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2. Pokud $t = 3k + 1$, kde $k \geqq 1$, je číslo $2t + 1 = 6k + 3 \geqq 9$ dělitelné třemi. Pokud $t = 3k + 2$, kde $k \geqq 1$, je číslo $2t - 1 = 6k + 3 \geqq 9$ dělitelné třemi.]

N2. Jsou dána reálná čísla d a $q \notin \{0, 1\}$. Dokažte, že posloupnost čísel $x_0, x_1, \ldots$ splňuje pro každý index i rovnost $x_{i+1} = qx_i + d$, právě když je její obecný člen tvaru $x_i = Kq^i + c$, kde $c = d/(1 - q)$ a K je libovolná konstanta (určená prvním členem x_0). [Číslo c je zadáno tak, že rovnosti $x_{i+1} = qx_i + d$ lze přepsat do tvaru $x_{i+1} - c = q(x_i - c)$. Tyto upravené rovnosti znamenají právě to, že čísla $y_i = x_i - c$ tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem q, tj. že $y_i = Kq^i$ pro každé i.]

N3. Uvažme jakékoliv zobrazení $f\colon M \to M$ na konečné množině M a prvek $m \in M$. Dokažte, že posloupnost $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ je od jistého členu periodická. Dále dokažte, že pokud zobrazení f je prosté, pak tato posloupnost je periodická od svého prvního členu m. [Podle Dirichletova principu se mezi prvními $|M| + 1$ členy posloupnosti alespoň jeden prvek musí opakovat. Od jeho prvního výskytu tak posloupnost bude periodická, neboť každý další člen zadané posloupnosti je jednoznačně určen předchozím členem. Kdyby posloupnost nebyla periodická od prvního členu, našly by se v ní dva výskyty téhož prvku, kterému předchází dva různé členy, což nenastane, je-li zobrazení f prosté.]

N4. Dokažte, že pro každé liché číslo d se zbytky čísel $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ po dělení číslem d od prvního místa periodicky opakují. [Užijte obecný výsledek úlohy N3 pro zobrazení $f\colon z \mapsto 2z \pmod p$ na množině $\{1, 2, \ldots, d - 1\}$.]

N5. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Pro libovolné prvočíslo p a celé číslo a nesoudělné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. [Ukažte, že zobrazení $f_a\colon t \mapsto a \cdot t \pmod p$ je prosté na množině $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$, takže je to bijekce. Porovnáním součinu všech $p - 1$ vzorů a součinu všech $p - 1$ obrazů dostaneme

$$(p - 1)! \equiv (a \cdot 1)(a \cdot 2) \ldots (a \cdot (p - 1)) \equiv a^{p-1}(p - 1)! \pmod p.$$

Po vydělení kongruence číslem $(p - 1)!$ (nesoudělným s jejím modulem p) už vychází potřebné.]

D1. Dokažte, že každé kladné celé číslo n má násobek, v jehož desítkovém zápisu se vyskytují jen nuly a jedničky. [Z Dirichletova principu mezi čísly $1, 11, 111, \ldots$ existují dvě, která dávají stejný zbytek po dělení n. Jejich rozdíl má požadovanou vlastnost.]

D2. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n existuje n-místné číslo a_n, které je násobkem 5^n a jehož všechny číslice jsou liché. [Důkaz provedeme matematickou indukcí: Pro $n = 1$ vyhovuje $a_1 = 5$. Mějme vyhovující a_n pro některé $n \geqq 1$. Čísla $a_n + i \cdot 10^n$ pro $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ jsou všechna násobky 5^n a přitom dávají navzájem různé zbytky po dělení 5^{n+1}, takže jedno z nich je násobkem 5^{n+1}. Toto číslo lze vzít za a_{n+1}, neboť je zřejmě $(n + 1)$-místné a všechny jeho číslice jsou liché. (USA 2003)]

D3. Dokažte, že každé kladné celé číslo d má násobek, který je Fibonacciho číslem. (Fibonacciho čísla jsou určena vztahy $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro každý index $n \geqq 1$.) [Všude dále pod „zbytky“ rozumíme „zbytky po dělení daným číslem d“. Předřaďme posloupnosti Fibbonaciho čísel $\left(F_i\right)_{i=1}^{\infty}$ jako její nultý člen číslo $F_0 = F_2 - F_1 = 0$ (pak vztah ze zadání bude platit i pro $n = 0$) a sledujme zbytky jejích dvojic po sobě následujících členů. Těchto dvojic zbytků je nejvýše $d \cdot d$ různých, tedy mezi prvními $d^2 + 1$ dvojicemi se některá dvojice musí zopakovat. Jelikož navíc zbytek následujícího členu je jednoznačně určen zbytky dvou předchozích členů, je posloupnost všech zbytků od jistého místa periodická. Protože navíc ze zbytků dvou sousedních členů lze jednoznačně určit i zbytky všech předchozích členů, je posloupnost zbytků periodická od svého nultého členu, kterým je ovšem zbytek 0 (neboť $F_0 = 0$ je násobkem d, ať je dané d jakékoli). Zbytek 0 tak má dokonce nekonečně mnoho Fibonacciho čísel.]

D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení čtyřmi zbytek 3. [Důkaz sporem: Připusťme, že je takových prvočísel jen konečně mnoho, a označme je všechna $p_1, \ldots, p_k$. Všimněme si, že pokud několik čísel dává po dělení čtyřmi stejný zbytek 1, má tuto vlastnost i jejich součin. Liché číslo

$$N = 4 \cdot p_1 p_2 \ldots p_k - 1$$

však dává po dělení čtyřmi zbytek 3, takže takový musí rovněž být aspoň jeden z jeho prvočinitelů (může jím být i samo číslo N). Žádné z prvočísel $p_1, \ldots, p_k$ ale není dělitelem N, spor. (Dodejme pro zajímavost proslulou *Dirichletovu větu*: Pro každá dvě nesoudělná čísla d a z (kde $1 \leqq z < d$) existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení číslem d zbytek z. Elementární důkaz Dirichletovy věty není znám.)]

71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod* 11 990. *Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro dané prvočíslo p najděte všechny dvojice celých čísel c a d, pro něž platí $c > d$ a $cd = p^2$.

N2. Najděte všechna řešení (p, q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslech taková, že p je prvočíslo.

D1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$.

D2. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

D3. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a + b)(b + c)(c + a)$ je roven mocnině některého prvočísla.

D4. Najděte všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

2. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známé tvrzení: Pokud v konvexním čtyřúhelníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, pak je $PQRS$ buď rovnoběžník, nebo rovnoramenný lichoběžník.

N2. Uvažme situaci ze soutěžní úlohy. Najděte dva rovnoramenné lichoběžníky s vrcholy v bodech A, B, C, D, E, F.

N3. Dokažte známé tvrzení o shodnosti úhlopříček každého rovnoramenného lichoběžníku.

D1. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.

D2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme

$E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.

D4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý.

D5. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

3. *Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice* $0-9$ *vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na* 1. *až* 3. *místě, na* 3. *až* 5. *místě, na* 5. *až* 7. *místě a na* 7. *až* 9. *místě všechny rovnají témuž číslu* 10. *Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel.* (Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Součet devíti navzájem různých číslic je 42. Které jsou to číslice?

N2. Navzájem různé číslice a, b, c, d splňují rovnost $a + b + c + 6 = d$. Které jsou to číslice?

N3. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 1, 3, 5, 7, 9 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Kolik je takových čísel?

N4. Pokud bychom v zadání soutěžní úlohy požadovali, aby se uvažované součty číslic rovnaly 9 namísto 10, pak by takové číslo neexistovalo. Dokažte.

D1. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 0, 1, 3, 5, 8 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Určete číslici na místě stovek takového čísla.

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

4. *Určete počet reálných kořenů rovnice* $x|x + 6A| = 36$ *v závislosti na reálném parametru* A. (Vojtěch Bálint)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte minimum funkce $f(x) = x(x + 6)$.

N2. Určete počet řešení rovnice $x(x + 6) = K$ v závislosti na reálném parametru K.

N3. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = x|x + 6|$ a $g(x) = x|x - 6|$.

D1. V oboru reálných čísel x řešte rovnici $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálný parametr.

D2. Najděte všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete.

D3. V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x právě tři různá reálná řešení.

D4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost $|x^2 + ax + b| \leqq m$ platila pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$.

5. *Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2...A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geqq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4?* (Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Připomeňte si *větu o středovém a obvodovém úhlu* a její důkaz.

N2. V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2...A_n$ se středem S vyjádřete v závislosti na čísle $n \geqq 7$ velikosti úhlů A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$.

N3. Uvažme pravidelný n-úhelník $A_1A_2...A_n$. Dokažte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osové souměrnosti podle přímky A_iA_k leží na přímce A_iA_{k+l}, kdykoli i, k, l jsou přirozená čísla splňující $l < k < k + l < i \leqq n$.

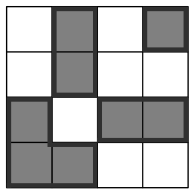
N4. V situaci ze soutěžní úlohy dokažte, že pro každé $n \geqq 5$ leží bod A_3' uvnitř úsečky A_1A_4.

D1. Určete, pro která celá čísla $n \geqq 3$ platí: V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ se středem S půlí úhlopříčka A_1A_3 úsečku A_2S.

D2. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Přímky AB a CE se protínají v bodě P. Určete velikost úhlu PDG.

D3. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.

D4. Uvažujme pravidelný 18úhelník $A_1A_2...A_{18}$. Ukažte, že obrazec ohraničený úhlopříčkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdélník (nikoli čtverec).



6. *Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé.* Tahem *rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice.* Skvrnou *rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. Například na obrázku je šachovnice 4×4 s právě čtyřmi skvrnami. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů.* (David Hruška)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 1×7.

N2. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 2×2.

N3. V soutěžní úloze pro šachovnici 3×3 ukažte, že její prostřední políčko bude po libovolném počtu tahů tvořit jednoprvkovou skvrnu.

N4. V soutěžní úloze pro obecnou šachovnici $m \times n$ najděte všechny dvojice černých políček, která lze konečným počtem tahů přesunout tak, aby spolu sousedila stranou.

D1. V řadě 2021 černých a bílých políček je první černé a každé další má jinou barvu než to předešlé. Jedním krokem rozumíme vzájemnou výměnu jednoho bílého a jednoho černého políčka, která spolu nemusí sousedit. Jaký nejmenší počet kroků potřebujeme, aby černá políčka vytvořila jednu skvrnu?

D2. Uvažujme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom kroku můžeme „převrátit“ barvy všech políček jednoho řádku, jednoho sloupce nebo jednoho čtverečku 2×2. Můžeme po konečném počtu kroků dojít k šachovnici s jediným černým políčkem?

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod* 11 990. *Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro dané prvočíslo p najděte všechny dvojice celých čísel c a d, pro něž platí $c > d$ a $cd = p^2$. [$(c, d) = (p^2, 1)$ a $(c, d) = (-1, -p^2)$. Protože ± 1, $\pm p$ a $\pm p^2$ jsou jediní dělitelé čísla p^2, rozložit p^2 na součin dvou *různých* celých čísel lze dvěma způsoby: $p^2 = 1 \cdot p^2 = (-1) \cdot (-p^2)$. Úloze tak vyhovují jen dvě výše uvedené dvojice.]

N2. Najděte všechna řešení (p, q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslech taková, že p je prvočíslo. [$(p, q) = (5, 27)$ a $(p, q) = (5, 1)$. Po rozkladu pravé strany rovnice na součin máme $p^2 = (q-2)(q-26)$. Protože pro čísla $c = q-2$ a $d = q-26$ platí $c > d$, jsme v situaci z úlohy N1. Možnosti $q - 2 = p^2 \wedge q - 26 = 1$, resp. $q - 2 = -1 \wedge q - 26 = -p^2$ vedou k výše uvedeným řešením.]

D1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

D2. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p+q^2 = q+145p^2$. [55–C–II–4]

D3. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je roven mocnině některého prvočísla. [Návodná úloha N2 k 69–A–I–6]

D4. Najděte všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$. [60–A–III–2]

2. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známé tvrzení: Pokud v konvexním čtyřúhelníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, pak je $PQRS$ buď rovnoběžník, nebo rovnoramenný lichoběžník. [Rozlišme, zda kromě obou podmínek ze zadání platí ještě $|PQ| = |RS|$ či nikoliv. Pokud ano, jsou trojúhelníky PQR a RSP shodné podle věty *sss*, a tak jsou shodné střídavé úhly PRQ a RPS; platí tudíž $QR \parallel PS$, čili $PQRS$ je rovnoběžník. V případě, kdy $|PQ| \neq |RS|$, můžeme s ohledem na symetrii předpokládat, že $|PQ| > |RS|$. Tehdy uvnitř strany PQ zvolíme bod T tak, aby platilo $|PT| = |RS|$. Spolu s $PT \parallel RS$ to pak znamená, že konvexní čtyřúhelník $PTRS$ je rovnoběžník. Z něho a z trojúhelníku TQR vidíme, že $PS \parallel TR \nparallel QR$, takže $PQRS$ je rovnoramenný lichoběžník.]

N2. Uvažme situaci ze soutěžní úlohy. Najděte dva rovnoramenné lichoběžníky s vrcholy v bodech A, B, C, D, E, F. [$BFCD$ a $BFCE$. Plyne to z tvrzení uvedeného v úloze N1.]

N3. Dokažte známé tvrzení o shodnosti úhlopříček každého rovnoramenného lichoběžníku. [Mějme rovnoramenný lichoběžník $PQRS$ s delší základnou PQ a pokračujme v úvahách z řešení úlohy N1: Protože v trojúhelníku TQR máme $|TR| = |QR|$, je úhel RQT shodný s úhlem RTQ, který je rovněž shodný se souhlasným úhlem SPQ. Lichoběžník $PQRS$ tak má shodné oba vnitřní úhly při základně PQ, a proto kýžená rovnost $|PR| = |QS|$ plyne z trojúhelníků PQR a QPS, shodných podle věty *sus*.]

D1. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. [63–B–I–3]

D2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$. [70–B–I–3]

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý. [67–A–I–5]

D5. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec. [55–A–I–3]

3. *Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice* $0-9$ *vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na* 1. *až* 3. *místě, na* 3. *až* 5. *místě, na* 5. *až* 7. *místě a na* 7. *až* 9. *místě všechny rovnají témuž číslu* 10. *Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Součet devíti navzájem různých číslic je 42. Které jsou to číslice? [Všechny kromě trojky. Protože $0+1+2+\ldots+9 = 45$, musí chybět číslice rovná $45-42 = 3$.]

N2. Navzájem různé číslice a, b, c, d splňují rovnost $a+b+c+6 = d$. Které jsou to číslice? [$\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$ a $d = 9$. Plyne to z nerovností $a+b+c \geqq 0+1+2 = 3$ a $d \leqq 9$.]

N3. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 1, 3, 5, 7, 9 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Kolik je takových čísel? [24. Číslo se zápisem $\overline{abcde}$, kde $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, je vyhovující, právě když platí $a+b+c = c+d+e$ neboli $a+b = d+e$. Z poslední rovnosti dvou sudých čísel plyne, že součet čísel ve čtyřprvkové množině $\{a, b, d, e\}$ je dělitelný čtyřmi, takže z pěti podmnožin přicházejí v úvahu pouze tři: $\{3, 5, 7, 9\}$, $\{1, 3, 7, 9\}$ a $\{1, 3, 5, 7\}$. Odpovídá jim vždy jediné rozdělení na dvě dvojice se stejným součtem: $3+9 = 5+7$, resp. $1+9 = 3+7$, resp. $1+7 = 3+5$. Každou vyhovující čtveřici (a, b, d, e) tedy určíme tak, že nejprve vybereme jednu z těchto rovností (3 možnosti), pak jednu její stranu přiřadíme množině $\{a, b\}$ a druhou stranu množině $\{d, e\}$ (2 možnosti) a nakonec rozhodneme, který ze dvou přiřazených sčítanců je a a který ze dvou přiřazených sčítanců je d ($2\cdot 2 = 4$ možnosti). Hledaný počet vyhovujících čísel je tedy $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.]

N4. Pokud bychom v zadání soutěžní úlohy požadovali, aby se uvažované součty číslic rovnaly 9 namísto 10, pak by takové číslo neexistovalo. Dokažte. [Připusťme existenci vyhovujícího čísla se zápisem $\overline{abcdefghi}$, a nezastoupenou číslici označme j. Pak platí

$$\begin{aligned}36 = 4 \cdot 9 &= (a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g)+(g+h+i) = \\ &= (a+b+c+d+e+f+g+h+i+j) - j + (c+e+g) = \\ &= 45 - j + (c+e+g) \geqq 45 - 9 + (0+1+2) = 39,\end{aligned}$$

a to je spor.]

D1. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 0, 1, 3, 5, 8 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Určete číslici na místě stovek takového čísla. [Číslice 1. Pro takové číslo $\overline{abcde}$ se stejně jako v úloze N3 odvodí podmínka $a + b = d + e$. Ukážeme, že to při zadaných číslicích to musí být rovnost typu $0 + 8 = 3 + 5$ („typu“ znamená „až na pořadí sčítanců i obou součtů“). Nejdříve rozhodneme, zda číslice a, b (a tedy číslice d, e) mají stejnou či různou paritu. Protože máme k dispozici dvě sudé číslice 0, 8 a tři liché číslice 1, 3, 5, v případě různých parit číslic v obou dvojicích (a, b) a (d, e) by rovnost $a + b = d + e$ byla typu $0 + x = 8 + y$ s vhodnými číslicemi $x, y \in \{1, 3, 5\}$, což je zřejmě spor. V obou dvojicích (a, b) a (d, e) jsou tedy číslice téže parity, takže zřejmě to jsou jednou dvě sudé a jednou dvě liché číslice. Rovnost $a + b = d + e$ je tak nutně typu $0 + 8 = x + y$, kde zřejmě $x = 3$ a $y = 5$. Odtud plyne $\{a, b, d, e\} = \{0, 3, 5, 8\}$. Číslice c na místě stovek tedy nutně musí být „zbylá“ číslice 1. Dodejme, že zkoumané pětimístné číslo skutečně existuje, např. to je 80 135.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69–C–I–1]

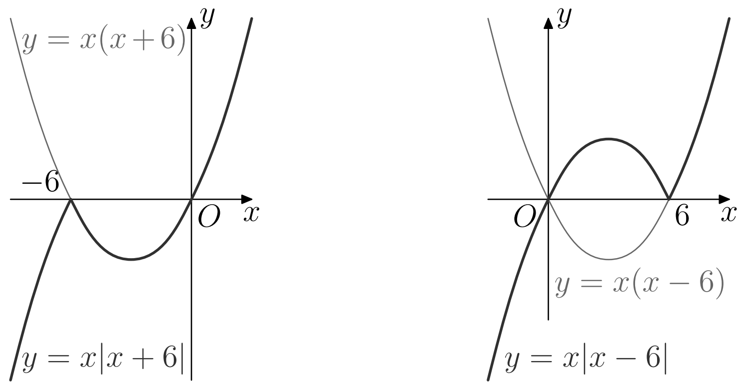
4. *Určete počet reálných kořenů rovnice* $x|x + 6A| = 36$ *v závislosti na reálném parametru* A. (Vojtěch Bálint)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte minimum funkce $f(x) = x(x + 6)$. [$f(-3) = -9$. Kvadratická funkce s kladným koeficientem u x^2, která má dva reálné kořeny, nabývá svého minima přesně uprostřed mezi těmito kořeny, v daném případě mezi body $x = 0$ a $x = -6$. Lze také využít identitu $x(x + 6) = (x + 3)^2 - 9$.]

N2. Určete počet řešení rovnice $x(x + 6) = K$ v závislosti na reálném parametru K. [Grafem kvadratické funkce na levé straně rovnice je parabola. Dle N1 nabývá tato funkce minimální hodnoty -9. Odtud plyne, že rovnice má pro $K = -9$ jedno řešení, pro $K > -9$ dvě řešení a pro $K < -9$ nemá žádné řešení.]

N3. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = x|x+6|$ a $g(x) = x|x-6|$. [



]

D1. V oboru reálných čísel x řešte rovnici $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálný parametr. [Jak algebraické, tak geometrické řešení najdete na str. 45–50 brožury O rovnicích s parametry ze Školy mladých matematiků.]

D2. Najděte všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete. [66–B–I–2]

D3. V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x právě tři různá reálná řešení. [52–B–I–6]

D4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost $|x^2 + ax + b| \leqq m$ platila pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$. [65–A–I–2]

5. *Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2...A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geqq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4?* (Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Připomeňte si *větu o středovém a obvodovém úhlu* a její důkaz. [Viz str. 3–4 brožury Kružnice ze Školy mladých matematiků, nebo také komentovaný výklad na `https://www.youtube.com/watch?v=REi-iU55oog`.]

N2. V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2...A_n$ se středem S vyjádřete v závislosti na čísle $n \geqq 7$ velikosti úhlů A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$. [$|\sphericalangle A_1SA_2| = \frac{360°}{n}$, $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = \frac{180°}{n}$ (z věty o středovém a obvodovém úhlu), $|\sphericalangle A_1A_7A_5| = |\sphericalangle A_1A_7A_2| + |\sphericalangle A_2A_7A_3| + |\sphericalangle A_3A_7A_4| + |\sphericalangle A_4A_7A_5| = \frac{720°}{n}$.]

N3. Uvažme pravidelný n-úhelník $A_1A_2...A_n$. Dokažte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osové souměrnosti podle přímky A_iA_k leží na přímce A_iA_{k+l}, kdykoli i, k, l jsou přirozená čísla splňující $l < k < k+l < i \leqq n$. [Podobně jako v N2 ukážeme, že $|\sphericalangle A_{k-l}A_iA_k| = \frac{l\cdot 180°}{n} = |\sphericalangle A_kA_iA_{k+l}|$, a jsme hotovi.]

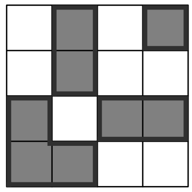
N4. V situaci ze soutěžní úlohy dokažte, že pro každé $n \geqq 5$ leží bod A_3' uvnitř úsečky A_1A_4. [Využijte toho, že polopřímka A_4A_2 je osa úhlu $A_3A_4A_1$ a že $|A_3A_4| < |A_1A_4|$, neboť v trojúhelníku $A_1A_3A_4$ je $|\sphericalangle A_4A_1A_3| < |\sphericalangle A_1A_3A_4|$.]

D1. Určete, pro která celá čísla $n \geqq 3$ platí: V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ se středem S půlí úhlopříčka A_1A_3 úsečku A_2S. [Jediné $n = 6$. $A_1A_2A_3S$ je deltoid, v němž se úhlopříčky navzájem půlí. Je to tedy kosočtverec. Proto $|SA_2| = |SA_1| = |A_1A_2|$, takže SA_1A_2 je rovnostranný trojúhelník, tudíž nutně $n = 6$. Toto n naopak zřejmě vyhovuje, neboť $A_1A_2A_3S$ je tehdy kosočtverec.]

D2. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Přímky AB a CE se protínají v bodě P. Určete velikost úhlu PDG. [90 stupňů. Označme Q průsečík úhlopříček DG a CE. Ze souměrností pravidelného sedmiúhelníku plyne $AB \parallel CG$, $AC \parallel$ $\parallel DG$ a $AG \parallel CE$. Proto $APCG$ a $ACQG$ jsou rovnoběžníky, a tudíž shodné úsečky AG, CD jsou rovněž shodné s úsečkami CP a CQ. Bod C je tak středem úsečky PQ a podle Thaletovy věty je úhel PDQ neboli PDG pravý. (CPSJ, 2021)]

D3. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$. [70–B–I–5]

D4. Uvažujme pravidelný 18úhelník $A_1A_2...A_{18}$. Ukažte, že obrazec ohraničený úhlopříčkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdélník (nikoli čtverec). [$A_2A_7 \parallel$ $\parallel A_{10}A_{17}$ plyne z toho, že $|\sphericalangle A_7A_2A_{10}| = \frac{3}{18} \cdot 180° = |\sphericalangle A_2A_{10}A_{17}|$. Podobně $A_3A_{15} \parallel A_6A_{12}$. Označme X průsečík A_2A_7 s A_6A_{12}. Protože $|\sphericalangle A_2A_7A_6| = \frac{4}{18} \cdot$ $\cdot 180°$ a $|\sphericalangle A_7A_6A_{12}| = \frac{5}{18} \cdot 180°$, plyne z trojúhelníku XA_7A_6, že $|\sphericalangle A_6XA_7| = \frac{9}{18} \cdot$ $\cdot 180° = 90°$, tj. $A_6A_{12} \perp A_2A_7$. Zatímco vzdálenost stran A_6A_{12}, A_3A_{15} je rovna $|A_{12}A_{15}|$ (neboť úsečka $A_{12}A_{15}$ je na obě strany kolmá, protože je rovnoběžná s A_2A_7), tak vzdálenost zbývajících dvou stran je menší než $|A_{12}A_{15}| = |A_7A_{10}|$, protože úsečka A_7A_{10} na ně kolmá není. (Polsko OMJ/OMG, 2010)]



6. *Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé.* Tahem *rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice.* Skvrnou *rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. Například na obrázku je šachovnice 4×4 s právě čtyřmi skvrnami. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů.* (David Hruška)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 1×7. [Všechna černá pole lze snadno spojit do jedné skvrny.]

N2. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 2×2. [Dvě černá pole budou vždy v protilehlých rozích, vždy tedy budou tvořit dvě skvrny.]

N3. V soutěžní úloze pro šachovnici 3×3 ukažte, že její prostřední políčko bude po libovolném počtu tahů tvořit jednoprvkovou skvrnu. [Prostřední políčko bude vždy ve svém řádku i ve svém sloupci jediným černým políčkem, takže nikdy nebude s žádným jiným černým políčkem stranově sousedit.]

N4. V soutěžní úloze pro obecnou šachovnici $m \times n$ najděte všechny dvojice černých políček, která lze konečným počtem tahů přesunout tak, aby spolu sousedila stranou. [Jde o právě ty dvojice černých políček, která leží v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Skutečně, leží-li ve stejném řádku (sloupci), vystačíme s jednou vzájemnou výměnou dvou sloupců (řádků). Leží-li naopak ve dvou různých řádcích i dvou různých sloupcích, tak tento fakt se nezmění po žádném tahu.]

D1. V řadě 2021 černých a bílých políček je první černé a každé další má jinou barvu než to předešlé. Jedním krokem rozumíme vzájemnou výměnu jednoho bílého a jednoho černého políčka, která spolu nemusí sousedit. Jaký nejmenší počet kroků potřebujeme, aby černá políčka vytvořila jednu skvrnu? [505 kroků stačí, černá políčka na lichých pozicích 1013 až 2021 přesuneme na sudé pozice 2 až 1010. Méně nestačí, protože původně je skvrn 1011 a každým krokem se počet skvrn zmenší nejvýš o 2 (nejvýš dvě skvrny se spojí do jedné a nejvýš jedna skvrna zanikne, případné změny ostatních skvrn jejich počet nesnižují).]

D2. Uvažujme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom kroku můžeme „převrátit“ barvy všech políček jednoho řádku, jednoho sloupce nebo jednoho čtverečku 2×2. Můžeme po konečném počtu kroků dojít k šachovnici s jediným černým políčkem? [Ne. Uvědomte si, že počet černých políček se v každém kroku změní o sudý počet, tedy zůstane sudý po libovolném počtu kroků.]

71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

N2. Pro celá čísla n, a, b, kde a, b jsou nesoudělná, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $ab \mid n$.

N3. Máme vyjít několik schodů. Kdybychom je brali po dvou, jeden zůstane. Kdybychom je brali po třech, také zůstane jeden. Dokažte, že rovněž tak to dopadne, když schody budeme brát po šesti.

Nechť v dalším textu nsn(...) značí nejmenší společný násobek skupiny čísel zapsaných mezi závorkami.

D1. Pro celá čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $\mathrm{nsn}(a, b) \mid n$.

D2. Pro celá čísla n, $a_1, \ldots, a_k$ platí $a_i \mid n$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, Dokažte, že pak také platí $\mathrm{nsn}(a_1, \ldots, a_k) \mid n$.

D3. Je dáno přirozené číslo $m \geqq 5$ takové, že číslo $m + 1$ je dělitelné aspoň dvěma prvočísly. Dokažte, že závěr soutěžní úlohy platí všeobecněji: Postupně pro $i = 3, 4, \ldots, m$ žáky rozdělujeme do i-tic, vždy jeden žák zbude a toho z další hry vyloučíme. Pak i při následném rozdělování na $(m+1)$-tice jeden žák zbude. (Původní úlohu dostaneme volbou $m = 5$).

D4. Dokažte, že pokud bychom v úloze D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bylo dělitelné jen jedním prvočíslem, tak závěr obecně neplatí: Existuje takové n, že prvních m rozdělení proběhne se zadaným výsledkem, avšak při následném rozdělování žáků do $(m + 1)$-tic se nestane, že by zbyl jeden žák.

D5. Najděte největší přirozené číslo d, které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ dělitelná číslem d.

2. *Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:*

(i) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 2, *je* 80.

(ii) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 3, *je* 90.

(iii) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 5, *je* 60.

(Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na tabuli jsou napsána tři dvojmístná (ne nutně různá) čísla taková, že součet těch s číslicí 1 je 36 a součet těch s číslicí 5 je 40. Určete tato tři čísla.

N2. Na tabuli jsou napsána navzájem různá dvojmístná čísla taková, že každé z nich obsahuje číslici 5 a součet všech je 75. Určete tato čísla (najděte všechny možnosti).

D1. Na tabuli je napsáno 18 navzájem různých dvojmístných čísel. Součet těch, které obsahují číslici 1, je 593. Určete všechny možné hodnoty součtu těch čísel, které obsahují číslici 2.

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

D3. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi.

D4. Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou.

3. *Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF. Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji.*

(Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známou větu *o střední příčce trojúhelníku*: V trojúhelníku ABC označme M, N po řadě středy stran AB, AC. Pak úsečka MN je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku.

N2. Dokažte známou větu *o střední příčce lichoběžníku*: V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$, označme M, N po řadě středy ramen BC, AD. Pak úsečka MN je rovnoběžná se základnami AB, CD a její délka je rovna aritmetickému průměru obou jejich délek.

N3. Je dán lichoběžník $ABCD$, pro jehož základny AB a CD platí $|AB| = 2\,|CD|$. Dokažte, že jeho střední příčka je jeho úhlopříčkami rozdělená na tři stejně dlouhé úseky.

N4. V trojúhelníku ABC leží bod K na straně AB a bod L na straně AC tak, že $2\,|AK| = |BK|$ a $2\,|AL| = |CL|$. Označme P průsečík úseček BL a CK.

Vyjádřete vzdálenost bodu P od přímky BC pomocí vzdálenosti v bodu A od téže přímky BC.

D1. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Nechť E, F, G, H jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD, DA. Přímky BH a AC se protínají v bodě I, přímky BD a EC v bodě J, přímky AC a DF v bodě K, přímky AG a BD v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelník $IJKL$ je rovnoběžník.

D2. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.

D3. Je dán trojúhelník ABC, v němž D, E jsou po řadě středy stran BC, AB. Nechť F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC, pro nějž platí $|AG| = 3\,|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC, která prochází bodem A.

D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť body D a E jsou paty kolmic po řadě z bodů B a C na osu vnějšího úhlu BAC. Označme F průsečík úseček BE a CD. Dokažte, že přímka AF je kolmá na přímku DE.

4. *Tabulka* 10×10 *je vyplněna čísly* 1 *a* -1 *tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Do jednoho řádku je zapsáno 71 čísel. Každé z nich je 1 nebo -1 a přitom součet každých deseti sousedních čísel je roven 0. Dokažte, že první číslo se rovná poslednímu číslu, a určete největší možný součet všech čísel.

N2. Tabulka 5×4 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém čtverci 2×2 je roven 0. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce.

N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček?

D1. Je možné vyplnit čtvercovou tabulku čísly 1 a -1 tak, aby součet čísel v nějakém sloupci byl sudý a jiném sloupci byl lichý?

D2. Je možné vyplnit tabulku 10×10 čísly 1 a -1 tak, aby v každém řádku byl součet čísel stejný a v každém sloupci byl jiný?

D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že v aspoň 9 řádcích je součet čísel kladný. a) Dokažte, že v aspoň jednom sloupci je součet čísel kladný. b) Platí stejný závěr i za slabšího předpokladu, že součet čísel je kladný v aspoň 8 řádcích?

D4. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0.

D5. Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí: (i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0; (ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích.

D6. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1, 2 a -3 tak, aby součet čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0.

5. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D. Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$.*

(Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V situaci ze soutěžní úlohy najděte dvě dvojice shodných úhlů velikostí menších než 60°.

N2. V situaci ze soutěžní úlohy najděte příklad dvou trojúhelníků, označme je KLM a $K'L'M'$, které splňují tyto podmínky: $|LM| = |L'M'|$, $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle K'M'L'|$ a $|\sphericalangle LKM| + |\sphericalangle L'K'M'| = 180°$. Poté dokažte, že z těchto tří obecně zapsaných podmínek plyne rovnost $|KL| = |K'L'|$.

D1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC, N střed těžnice AM a P průsečík polopřímky BN se stranou AC. Určete poměr $|AP| : |PC|$.

D2. V trojúhelníku ABC je bod M středem strany BC. Bod K leží na těžnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je průsečík polopřímky CK se stranou AB. Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný.

D3. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF.

D4. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou BC o středu D označme M střed těžnice AD a P patu kolmice z bodu D na přímku BM. Dokažte, že $AP \perp PC$.

D5. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, v němž M je pata kolmice z vrcholu D ke straně AB. Průsečík osy úsečky DM s přímkou AC označme K. Dokažte, že úhel AKD je pravý.

6. *Určete všechny možné hodnoty součtu $a+b+c+d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost*

$$\left(a^2 - b^2\right)\left(c^2 - d^2\right) + \left(b^2 - d^2\right)\left(c^2 - a^2\right) = 2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu.

N2. Pro přirozená čísla a, b, c platí $a(a + b + c) + bc = 143$. Určete všechny možné hodnoty $|b - c|$.

D1. V každém políčku tabulky 2×2 je napsáno přirozené číslo. Sečteme-li součin čísel v prvním sloupci, součin čísel ve druhém sloupci, součin čísel ve prvním řádku a součin čísel ve druhém řádku, dostaneme výsledek 2021. a) Určete všechny možné hodnoty součtu všech čtyř čísel v tabulce. b) Najděte počet tabulek splňujících zadání, které obsahují čtyři navzájem různá čísla.

D2. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému jejímu vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách.

D3. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.

D4. Na tabuli je napsáno pět (ne nutně různých) prvočísel, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete tato prvočísla.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$). [Podmínky $n \mid a$ a $n \mid b$ znamenají existenci celých čísel a', b' takových, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ak + bl = a'nk + b'nl = n(a'k + b'l)$, což znamená, že $n \mid ka + lb$.]

N2. Pro celá čísla n, a, b, kde a, b jsou nesoudělná, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $ab \mid n$. [Pro libovolné prvočíslo p označme a_p, b_p, n_p exponenty mocnin prvočísla p v rozkladech čísel a, b, n na prvočinitele. Naším cílem je dokázat nerovnost $a_p + b_p \leqq n_p$. To je snadné: díky nesoudělnosti a, b je v součtu $a_p + b_p$ aspoň jeden sčítanec roven nule a přitom podle zadání platí $a_p \leqq n_p$ i $b_p \leqq n_p$.]

N3. Máme vyjít několik schodů. Kdybychom je brali po dvou, jeden zůstane. Kdybychom je brali po třech, také zůstane jeden. Dokažte, že rovněž tak to dopadne, když schody budeme brát po šesti. [Nechť n je počet schodů. Podle první podmínky platí $2 \mid n - 1$, podle druhé $3 \mid n - 1$. Jelikož 2 a 3 jsou nesoudělná čísla, podle výsledku úlohy N2 platí rovněž $6 \mid n - 1$, a to je dokazované tvrzení.]

Nechť v dalším textu nsn(…) značí nejmenší společný násobek skupiny čísel zapsaných mezi závorkami.

D1. Pro celá čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $\mathrm{nsn}(a, b) \mid n$. [Postupujeme podobně jako v úloze N2: Jsou-li a_p, b_p, n_p příslušné exponenty, pak z nerovností $a_p \leqq n_p$ a $b_p \leqq n_p$ máme $\max(a_p, b_p) \leqq n_p$, kde ovšem $\max(a_p, b_p)$ je zřejmě exponent prvočísla p v rozkladu čísla $\mathrm{nsn}(a, b)$.]

D2. Pro celá čísla $n, a_1, \ldots, a_k$ platí $a_i \mid n$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, Dokažte, že pak také platí $\mathrm{nsn}(a_1, \ldots, a_k) \mid n$. [Postupujte analogicky jako při řešení úlohy D1.]

D3. Je dáno přirozené číslo $m \geqq 5$ takové, že číslo $m + 1$ je dělitelné aspoň dvěma prvočísly. Dokažte, že závěr soutěžní úlohy platí všeobecněji: Postupně pro $i = 3, 4, \ldots, m$ žáky rozdělujeme do i-tic, vždy jeden žák zbude a toho z další hry vyloučíme. Pak i při následném rozdělování na $(m + 1)$-tice jeden žák zbude. (Původní úlohu dostaneme volbou $m = 5$). [Nechť n je počet žáků. Podmínku, co se stane v i-tém kroku, zapíšeme jako $i \mid n - i + 2$, což je ekvivalentní s $i \mid n + 2$. Podle výsledku úlohy D2 to znamená, že $\mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m) \mid n + 2$. Jelikož je číslo $m + 1$ dělitelné aspoň dvěma prvočísly, lze ho zapsat ve tvaru $m + 1 = a \cdot b$ s dvěma nesoudělnými čísly $a \leqq m$ a $b \leqq m$. Každé z čísel a, b určitě dělí číslo $\mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m)$ (i když je $a = 2$ nebo $b = 2$), tedy i číslo $n+2$. To (podle výsledku N2) znamená, že také platí $m + 1 = ab \mid n + 2$.]

D4. Dokažte, že pokud bychom v úloze D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bylo dělitelné jen jedním prvočíslem, tak závěr obecně neplatí: Existuje takové n, že prvních m rozdělení proběhne se zadaným výsledkem, avšak při následném rozdělování žáků do $(m+1)$-tic se nestane, že by zbyl jeden žák. [Využijeme poznatků z řešení úlohy D3. Vyberme $n = \mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m) - 2$. Protože zřejmě $n > m - 2$, takže

$n+2-m > 0$, a zároveň pro každé $i = 3, 4, \ldots, m$ platí $i \mid \mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m) = n+2$, postupná rozdělení do i-tic pro taková i požadovaným způsobem proběhne a rozdělování do $(m + 1)$-tic se poté bude ještě účastnit $n + 2 - m$ žáků. Je-li ovšem $m + 1 = p^k$, kde p je prvočíslo a $k \geqq 1$ je celé číslo, pak číslo $n + 2 = \mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m)$ už nebude dělitelné číslem $m + 1$, protože v rozkladu takového čísla $n + 2$ se prvočíslo p vyskytuje pouze v mocnině p^{k-1}. Takže rozdělení do $(m + 1)$-tic ve výsledku s jedním zbylým žákem neproběhne.]

D5. Najděte největší přirozené číslo d, které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ dělitelná číslem d. [66–C–I–2]

2. *Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:*

(i) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 2, *je* 80.
(ii) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 3, *je* 90.
(iii) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 5, *je* 60.

(Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Na tabuli jsou napsána tři dvojmístná (ne nutně různá) čísla taková, že součet těch s číslicí 1 je 36 a součet těch s číslicí 5 je 40. Určete tato tři čísla. [15, 21, 25. Zaměřme se na zadaný součet 40. Protože toto číslo nemá číslici 5, nemůže to být ani „součet“ jednoho, ani všech tří čísel napsaných čísel, která by musela končit číslicí 5, neboť jsou menší než 50; musí jít tedy o součet dvou čísel končících číslicí 5, tedy nutně čísel 15 a 25. Zbylé třetí číslo musí s číslem 15 dávat zadaný součet 36, takže jde o číslo 21 (které skutečně obsahuje číslici 1).]

N2. Na tabuli jsou napsána navzájem různá dvojmístná čísla taková, že každé z nich obsahuje číslici 5 a součet všech je 75. Určete tato čísla (najděte všechny možnosti). [Buď jedno číslo 75, nebo dvě čísla 50 a 25, nebo tři čísla 15, 25 a 35. Je-li napsané číslo jedno, tak je to samo číslo 75. Jsou-li napsána čísla dvě, tak číslicí 5 může jen jedno číslo začínat a jen jedno končit, máme tedy $75 = 5\star + \star5$, což je jedině $50 + 25$. Jsou-li napsána aspoň tři čísla, tak součet všech je aspoň $15 + 25 + 35 = 75$; jsou to proto právě tři čísla, a to 15, 25 a 35.]

D1. Na tabuli je napsáno 18 navzájem různých dvojmístných čísel. Součet těch, které obsahují číslici 1, je 593. Určete všechny možné hodnoty součtu těch čísel, které obsahují číslici 2. [Jediná hodnota je 33. Počet všech dvojmístných čísel s číslicí 1 je roven číslu 18 ze zadání úlohy, jsou to totiž čísla $10, 11, \ldots, 19, 21, 31, \ldots, 91$ a jejich součet je roven právě číslu 593 ze zadání úlohy. Na tabuli jsou tedy všechna tato čísla a žádná jiná. Ta s číslicí 2 jsou právě 12 a 21.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69–C–I–1]

D3. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi. [67–C–I–1]

D4. Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. [70–B–I–1]

3. *Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF. Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známou větu *o střední příčce trojúhelníku*: V trojúhelníku ABC označme M, N po řadě středy stran AB, AC. Pak úsečka MN je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku. [Trojúhelníky ABC a AMN jsou podobné s koeficientem $1/2$ (věta *sus*), takže platí $|MN| = |AB|/2$ a úhly ABC, AMN jsou shodné, odkud plyne $MN \parallel BC$.]

N2. Dokažte známou větu *o střední příčce lichoběžníku*: V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$, označme M, N po řadě středy ramen BC, AD. Pak úsečka MN je rovnoběžná se základnami AB, CD a její délka je rovna aritmetickému průměru obou jejich délek. [Uvažme střed K střed úhlopříčky AC. Pak MK a NK jsou střední příčky po řadě trojúhelníků ABC a ACD, takže (podle N1) jednak platí $MK \parallel AB \parallel CD \parallel NK$, tudíž bod K leží na úsečce MN rovnoběžné se základnami, jednak platí $|MK| = |AB|/2$ a $|NK| = |CD|/2$, odkud $|MN| = |MK| + |NK| = (|AB| + |CD|)/2$.]

N3. Je dán lichoběžník $ABCD$, pro jehož základny AB a CD platí $|AB| = 2\,|CD|$. Dokažte, že jeho střední příčka je jeho úhlopříčkami rozdělená na tři stejně dlouhé úseky. [Zachovejme označení z řešení úlohy N2. Tam jsme ukázali, že střed K úhlopříčky AC je jejím průsečíkem se střední příčkou MN a přitom platí $|MK| : |NK| = (|AB|/2) : (|CD|/2) = |AB| : |CD|$. Analogicky musí platit, že střed L úhlopříčky BD je jejím průsečíkem se střední příčkou NM a přitom $|ML| : |NL| = |CD| : |AB|$. Z podmínky $|AB| = 2\,|CD|$ tak plyne, že body K, L dělí úsečku MN na tři shodné úseky.]

N4. V trojúhelníku ABC leží bod K na straně AB a bod L na straně AC tak, že $2\,|AK| = |BK|$ a $2\,|AL| = |CL|$. Označme P průsečík úseček BL a CK. Vyjádřete vzdálenost bodu P od přímky BC pomocí vzdálenosti v bodu A od téže přímky BC. [$v/2$. Trojúhelníky ABC a AKL jsou podobné podle věty *sus* s koeficientem $1/3$, takže $|KL| = |BC|/3$, $KL \parallel BC$ a vzdálenost bodu A od přímky KL je $v/3$. Odtud pro neznámé vzdálenosti v_1, v_2 bodu P po řadě od přímek BC a KL plyne $v_1+v_2 = v-v/3 = 2v/3$. Z podobnosti trojúhelníků BCP a KLP (věta *uu*) získáme pro v_1, v_2 druhou rovnici $v_2/v_1 = |KL|/|BC| = 1/3$. Nyní už snadno vypočítáme $v_1 = v/2$ (a $v_2 = v/6$).]

D1. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Nechť E, F, G, H jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD, DA. Přímky BH a AC se protínají v bodě I, přímky BD a EC v bodě J, přímky AC a DF v bodě K, přímky AG a BD v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelník $IJKL$ je rovnoběžník. [Nechť S je střed rovnoběžníku $ABCD$. Všimněme si, že bod I je těžištěm $\triangle ABD$ a bod K je těžištěm $\triangle BCD$. Proto $|IS| = |SA|/3 = |SC|/3 = |KS|$. Analogicky $|SJ| = |SL|$. Úhlopříčky čtyřúhelníku $IJKL$ se navzájem půlí, takže jde o rovnoběžník. Jiné řešení: Uvažme středovou souměrnost podle středu rovnoběžníku $ABCD$. V ní se H

zobrazí na F a E na G. Průsečík I úseček BH a AC se proto zobrazí na průsečík úseček DF a AC, tedy na K. Analogicky dokážeme, že také J se zobrazí na L. Tím pádem obrazem úsečky IJ je úsečka KL, takže $IJKL$ je skutečně rovnoběžník.]

D2. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části. [70–C–I–5]

D3. Je dán trojúhelník ABC, v němž D, E jsou po řadě středy stran BC, AB. Nechť F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC, pro nějž platí $|AG| = 3\,|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC, která prochází bodem A. [Návod. Uvažte dva průsečíky dotyčné rovnoběžky: jednak s přímkou DF, jednak s přímkou GE. Tyto dva průsečíky splynou, pokud budou mít stejnou vzdálenost od bodu A. Řešení: 70–C–II–3.]

D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť body D a E jsou paty kolmic po řadě z bodů B a C na osu vnějšího úhlu BAC. Označme F průsečík úseček BE a CD. Dokažte, že přímka AF je kolmá na přímku DE. [Cílem je dokázat $BD \parallel AF$. K tomu stačí ověřit, že pro příčku AF v $\triangle EDB$ platí $|AE| : |AD| = |FE| : |FB|$. Na to použijeme podobnost $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ a poté podobnost $\triangle FEC \sim \sim \triangle FBD$, podle kterých postupně dostaneme $|AE| : |AD| = |CE| : |DB| = = |FE| : |FB|$, a tudíž jsme hotovi. (CPSJ 2021)]

4. *Tabulka* 10×10 *je vyplněna čísly* 1 *a* -1 *tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Do jednoho řádku je zapsáno 71 čísel. Každé z nich je 1 nebo -1 a přitom součet každých deseti sousedních čísel je roven 0. Dokažte, že první číslo se rovná poslednímu číslu, a určete největší možný součet všech čísel. [Prvních 70 čísel rozdělíme na 7 desetic se součtem nula. Součet všech čísel je tedy roven poslednímu číslu. Podobně zjistíme, že součet všech čísel je roven prvnímu číslu, když uvážíme rozdělení na 7 desetic posledních 70 čísel. První i poslední číslo se tedy rovnají, a to součtu všech čísel, který je tak nejvýše 1. Příklad 71 čísel $1, -1, 1, \ldots, -1, 1$ splňuje podmínku úlohy a jejich celkový součet je roven 1, což je tedy hledaný největší možný součet.]

N2. Tabulka 5×4 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém čtverci 2×2 je roven 0. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce. [Největší možný součet je 4. Danou tabulku 5×4 (o pěti řádcích a čtyřech sloupcích) rozdělme na horní řádek 1×4 a čtyři čtverce 2×2 s nulovými součty vepsaných čísel. Součet všech čísel v tabulce je tedy roven součtu čísel v prvním řádku, takže je nejvýše 4. Součtu rovného 4 dosáhneme, pokud tabulku vyplníme tak, že do prvního, třetího a pátého řádku dáme samé 1, zatímco do druhého a čtvrtého řádku dáme samé -1.]

N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček?

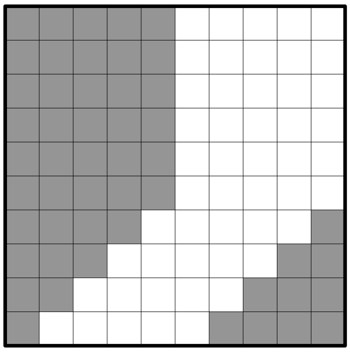
[Pro každé takové d: Pro dané d lze například obarvit políčka, která na obrázku obsahují čísla nejvýše rovna d.

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

]

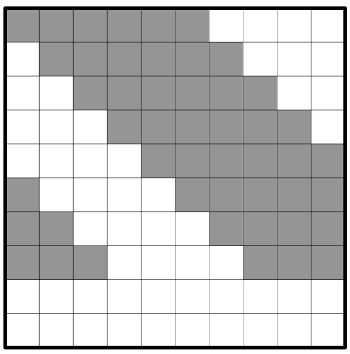
D1. Je možné vyplnit čtvercovou tabulku čísly 1 a -1 tak, aby součet čísel v nějakém sloupci byl sudý a jiném sloupci byl lichý? [Ne. Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je v každém sloupci n čísel. Je-li a z nich rovno 1, je ostatních $n-a$ rovno -1, takže součet čísel v tomto sloupci je roven $a - (n - a) = 2a - n$. Toto číslo je sudé, resp. liché, právě když je takové číslo n. Tedy všechny součty čísel v jednotlivých sloupcích mají stejnou paritu. Jiné vysvětlení: Parita součtu čísel v daném sloupci se nezmění, když v něm každé číslo -1 zaměníme číslem 1.]

D2. Je možné vyplnit tabulku 10×10 čísly 1 a -1 tak, aby v každém řádku byl součet čísel stejný a v každém sloupci byl jiný? [Ano, viz obrázek, ve kterém jsou obarvena políčka s číslem 1.



]

D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že v aspoň 9 řádcích je součet čísel kladný. a) Dokažte, že v aspoň jednom sloupci je součet čísel kladný. b) Platí stejný závěr i za slabšího předpokladu, že součet čísel je kladný v aspoň 8 řádcích? [a) Nejmenší možný kladný součet v řádku je 2. Součet všech čísel v tabulce je tedy aspoň $9 \times 2 - 10$, což je kladné číslo. Proto je vyloučeno, aby byl součet čísel v každém sloupci nekladný. b) Závěr neplatí obecně, viz příklad na obrázku, kde jsou obarvena právě políčka s číslem 1.



]

D4. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0. [70–C–I–2]

D5. Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí: (i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0; (ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích. [70–C–II–2]

D6. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1, 2 a -3 tak, aby součet čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0. [Právě pro všechna $n \geqq 3$. Vyplňme vyhovujícím způsobem nejdříve první řádek tabulky $n \times n$. To zřejmě není možné pro $n \in \{1, 2\}$; pro $n \in \{3, 4, 5\}$ to je snadné: $(1, 2, -3)$ pro $n = 3$, $(1, 1, 1, -3)$ pro $n = 4$ a $(2, 2, 2, -3, -3)$ pro $n = 5$. Dále z vyhovujícího řádku pro dané n získáme vyhovující řádek pro $n + 3$ připojením trojice čísel $(1, 2, -3)$. První vyhovující řádek tabulky $n \times n$ tak máme sestrojen pro každé $n \geqq 3$. Z tohoto prvního řádku při daném n nyní snadno sestrojíme celou vyhovující tabulku $n \times n$, a to tak, že do každého dalšího řádku sestavu čísel z předchozího řádku „cyklicky posuneme" o 1 místo, podobně jako jsme to udělali v tabulce z řešení úlohy N3. (CPSJ 2019)]

5. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D. Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$.*

(Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V situaci ze soutěžní úlohy najděte dvě dvojice shodných úhlů velikostí menších než 60°. [Jednu takovou dvojici máme v rovnoramenném trojúhelníku DCE: $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DEC|$. Protože však tyto shodné úhly mají vyjádření $|\sphericalangle DCE| = 60° - |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DEB| = 60° - |\sphericalangle BDE|$ (neboť $|\sphericalangle DBE| = 120°$), je druhou dvojicí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BDE|$.]

N2. V situaci ze soutěžní úlohy najděte příklad dvou trojúhelníků, označme je KLM a $K'L'M'$, které splňují tyto podmínky: $|LM| = |L'M'|$, $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle K'M'L'|$ a $|\sphericalangle LKM| + |\sphericalangle L'K'M'| = 180°$. Poté dokažte, že z těchto tří obecně zapsaných podmínek plyne rovnost $|KL| = |K'L'|$. [Příklad ze soutěžní úlohy: $KLM = ADC$ a $K'L'M' = BED$ (plyne z řešení úlohy N1). Důkaz rovnosti $|KL| = |K'L'|$ je triviální v případě, kdy $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle L'K'M'| = 90°$. Dále proto předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $|\sphericalangle L'K'M'| > 90°$. Pak na polopřímce opačné k polopřímce $K'M'$ existuje takový bod K'', že $|K''L'| = |K'L'|$. Zřejmě platí $|\sphericalangle L'K''M'| = 180° - |\sphericalangle L'K'M'| = |\sphericalangle LKM|$, a tak se trojúhelníky $K''L'M'$ a KLM shodují ve dvou vnitřních úhlech a jedné straně, jsou tedy shodné, odkud už plyne $|KL| = |K''L'|$ neboli $|KL| = |K'L'|$, což jsme měli dokázat. Pro znalce sinové věty dodejme, že tvrzení úlohy je okamžitým důsledkem této věty užité pro trojúhelníky KLM a $K'L'M'$ s přihlédnutím ke vzorci $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.]

D1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC, N střed těžnice AM a P průsečík polopřímky BN se stranou AC. Určete poměr $|AP| : |PC|$. [1 : 2. Uvažme střed S úsečky PC. Potom MS je střední příčka v $\triangle BCP$, a proto $MS \parallel BP$, tudíž NP je střední příčka v $\triangle AMS$. Proto platí $|AP| = |PS| = |SP|$, odkud už $|AP| : |PC| = 1 : 2$. Jiné řešení: Doplňme trojúhelník ABM na rovnoběžník $ABMB'$ se středem N. Pak P je průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCB'$, takže trojúhelníky BCP a $B'AP$ jsou podle věty *uu* podobné, odkud plyne $|AP| : |CP| = |B'A| : |BC| = |BM| : |BC| = 1 : 2$. Jiné řešení: Označme B' obraz bodu B v souměrnosti se středem A a K průsečík polopřímky BN s úsečkou $B'C$. Pak AM je střední příčka v $\triangle B'BC$, takže platí $AM \parallel B'C$. Odtud plyne, že shodné úsečky AN a NM jsou středními příčkami v $\triangle B'BK$, resp. $\triangle KBC$, a proto jsou shodné i odpovídající strany $B'K$ a KC, neboli K je střed BC. Bod P tak je průsečík dvou těžnic CA, BK trojúhelníku $B'BC$, je to tedy jeho těžiště, a proto $|AP| : |PC| = 1 : 2$.]

D2. V trojúhelníku ABC je bod M středem strany BC. Bod K leží na těžnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je průsečík polopřímky CK se stranou AB. Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný. [Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABA'C$. Pak platí $|CA'| = |AB| = |CK|$, takže CKA' je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C, tudíž úhly CKA' a CAK' jsou shodné. Odtud užitím vět o vrcholových a střídavých úhlech už plyne shodnost úhlů LKA a LAK, takže trojúhelník AKL je skutečně rovnoramenný (s hlavním vrcholem L).]

D3. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF. [68–C–S–3]

D4. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou BC o středu D označme M střed těžnice AD a P patu kolmice z bodu D na přímku BM. Dokažte, že $AP \perp PC$. [Doplňme trojúhelník ABD na rovnoběžník $ABDB'$ se středem M. S ohledem na $|AB'| = |BD| = |DC|$ je $ADCB'$ pravoúhelník, na jehož kružnici opsané díky pravému úhlu DPB' leží bod P. Proto je pravý také úhel APC, jak jsme měli dokázat.]

D5. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, v němž M je pata kolmice z vrcholu D ke straně AB. Průsečík osy úsečky DM s přímkou AC označme K. Dokažte, že úhel AKD je pravý. [Uvažme bod A' souměrně sdružený s bodem A vzhledem k průsečíku K. Protože body A a A' mají od osy úsečky DM stejnou vzdálenost, leží bod A' na rovnoběžce s přímkou AB, která prochází vrcholem D. Díky tomu je bod C vnitřním bodem úsečky AA', takže úhly $A'AB$ a $A'AD$ jsou vlastně úhly CAB, resp. CAD, které oba mají velikost 36° (po snadném výpočtu). Z dokázané shodnosti úhlů $A'AB$, $A'AD$ a ze shodnosti střídavých úhlů $A'AB$, $AA'D$ plyne shodnost úhlů $A'AD$ a $AA'D$, takže $AA'D$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AA', jejíž střed je právě bod K. Úhel AKD je tudíž skutečně pravý.]

6. *Určete všechny možné hodnoty součtu $a+b+c+d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost*

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu. [Jediná hodnota 18. Platí $ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d)$. Protože $77 = 7 \cdot 11$, $a + c > 1$, $b + d > 1$, tak nutně $\{a + c, b + d\} = \{7, 11\}$, tudíž $a + b + c + d = 18$, přitom čtveřice $(a, b, c, d) = (1, 1, 6, 10)$ vyhovuje zadání.]

N2. Pro přirozená čísla a, b, c platí $a(a + b + c) + bc = 143$. Určete všechny možné hodnoty $|b - c|$. [Jediná hodnota 2. Roznásobením levé strany rovnice dostaneme $a^2 + ab + ac + bc$, což můžeme postupným vytýkáním upravit takto: $a(a+b)+c(a+b) = (a+b)(a+c)$. Platí $143 = 11 \cdot 13$, $a+b > 1$ a $a+c > 1$, tak nutně $\{a+b, a+c\} = \{11, 13\}$, odkud $|b-c| = |(a+b)-(a+c)| = |11-13| = 2$, přitom trojice $(a, b, c) = (1, 10, 12)$ vyhovuje zadání.]

D1. V každém políčku tabulky 2×2 je napsáno přirozené číslo. Sečteme-li součin čísel v prvním sloupci, součin čísel ve druhém sloupci, součin čísel ve prvním řádku a součin čísel ve druhém řádku, dostaneme výsledek 2021. a) Určete všechny možné hodnoty součtu všech čtyř čísel v tabulce. b) Najděte počet tabulek splňujících zadání, které obsahují čtyři navzájem různá čísla. [a) Jediná hodnota 90, b) 3 528. a) Čísla v tabulce lze označit a, b, c, d tak, že $ab + cd + ac + bd = (a+d)(b+c) = 2021 = 43 \cdot 74$. Odtud plyne $\{a+d, b+c\} = \{43, 47\}$, takže nutně $a + b + c + d = 43 + 47 = 90$. b) Podle řešení a) rozlišíme dva případy: $a + d = 43$ a $b + c = 47$, resp. $a + d = 47$ a $b + c = 43$. V prvním případě lze dvojici (a, d) zvolit právě 42 způsoby a dvojici (b, c) právě 46 způsoby, ve druhém případě jsou tyto počty naopak. Dohromady tak existuje $2 \cdot 42 \cdot 46$ různých vyhovující tabulek, ovšem včetně těch, ve kterých se některá dvě čísla rovnají. Jejich počet potřebujeme zjistit, abychom ho pak mohli od celkového počtu odečíst. Protože 43 a 47 jsou lichá čísla, tak v každé vyhovující tabulce platí $a \neq d$ a $b \neq c$. V každé tabulce se stejnými čísly proto musí platit aspoň jedna z rovností $a = b$, $a = c$, $d = b$, $d = c$, přitom díky $a + d \neq b + c$ to bude právě jedna z nich (vylučte dvě rovnosti rozborem všech možností jejich výběru). Jednotlivé z těchto čtyř rovností vždy splňuje 42 vyhovujících tabulek v každém ze dvou rozlišených případů, takže jejich celkový počet je $2 \cdot 4 \cdot 42 = 8 \cdot 42$. Hledaný počet je proto $2 \cdot 42 \cdot 46 - 8 \cdot 42 = 3\,528$. (CPSJ 2021)]

D2. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému jejímu vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách. [31. Je-li (a, b) dvojice čísel na přední a zadní stěně, (c, d) dvojice čísel na horní a dolní stěně, konečně (e, f) dvojice čísel na levé a pravé stěně, pak roznásobením součinu $(a + b)(c + d)(e + f)$ dostaneme osm sčítanců, kterými jsou právě čísla připsaná vrcholům krychle (v každém vrcholu se stýkají tři stěny, po jedné z popsaných tří dvojic stěn). Platí tedy $(a+b)(c+d)(e+f) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, odkud nutně $\{a+b, c+d, e+f\} = \{7, 11, 13\}$, takže $a+b+c+d+e+f = 7+11+13 = 31$.]

D3. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$. [Návod. Přičtěte k oběma stranám rovnice číslo 1, abyste pak levou stranu mohli rozložit na součin dvou činitelů. Řešení: 67–B–I–4.]

D4. Na tabuli je napsáno pět (ne nutně různých) prvočísel, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete tato prvočísla. [Část a) úlohy 70–A–I–1.]