71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy klauzurní části I. kola kategorie A

1. Najděte největší celé číslo d, pro něž lze tabulku 43×47 vyplnit jedničkami a dvojkami tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci byl dělitelný číslem d. (Dokažte také, že žádné větší číslo d zadání úlohy nevyhovuje.)

2. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímky BI, CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB, AC v bodech K, L. Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec).

3. Určete všechny dvojice kladných celých čísel a a b, pro něž platí $a^{a-b} = b^a$.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 7. prosince 2021

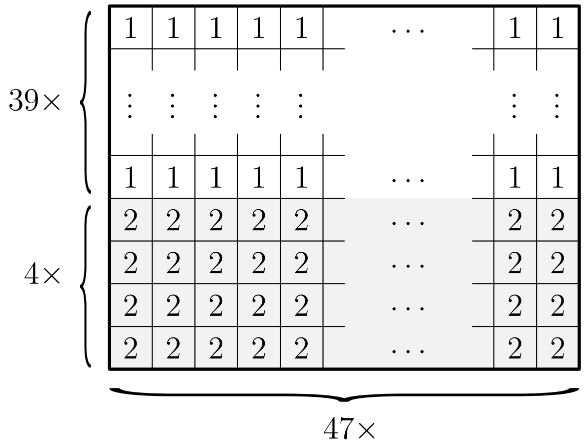
tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák klauzurní část distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 14.20.

1. *Najděte největší celé číslo d, pro něž lze tabulku 43×47 vyplnit jedničkami a dvojkami tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci byl dělitelný číslem d. (Dokažte také, že žádné větší číslo d zadání úlohy nevyhovuje.)* (Tomáš Bárta)

Řešení. Odpověď je $d = 47$.

V první části řešení dokážeme, že pro $d = 47$ požadované vyplnění tabulky skutečně existuje: Zapišme do každého řádku všech 47 čísel stejných, a to do 39 řádků jedničky a do zbylých 4 řádků dvojky (viz obrázek). Pak součet čísel v každém řádku je roven 47 nebo $2 \cdot 47$ a součet čísel v každém sloupci je roven $39 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 47$, což jsou vše násobky čísla 47, jak jsme chtěli.



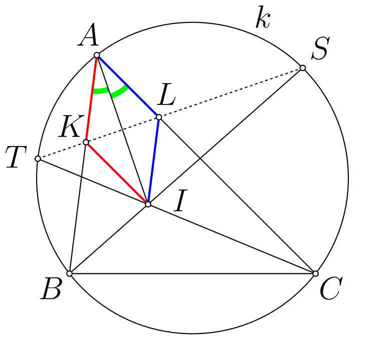
Ve druhé části řešení dokážeme sporem, že pro žádné $d > 47$ požadované vyplnění neexistuje. Připusťme naopak, že tabulku 43×47 máme vyplněnou jedničkami a dvojkami tak, že pro nějaké $d > 47$ je součet čísel v každém řádku i každém sloupci násobkem čísla d. Protože každý z těchto součtů je kladný a nejvýše roven $2 \cdot 47$, a tedy menší než $2d$, musí jít o násobek čísla d rovný přímo číslu d. Sčítáním všech čísel tabulky po řádcích tak dojdeme k hodnotě $43d$, zatímco při sčítání po sloupcích dostaneme hodnotu $47d$. Musí tedy platit $43d = 47d$, což je hledaný spor.

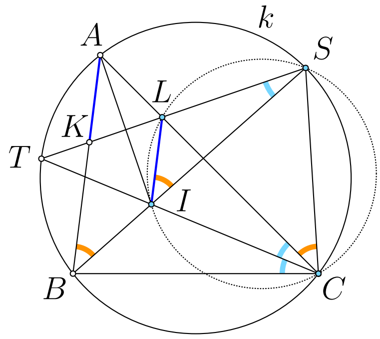
Poznámka. Podané řešení lze zřejmým způsobem zobecnit na důkaz výsledku, že pro každou tabulku $m \times n$, kde $m < n \leqq 2m$, je největší vyhovující d rovno číslu n.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz první části (konstrukce pro $d = 47$) a 4 body za důkaz druhé části (důkaz nemožnosti pro každé $d > 47$). Z první části lze získat 1 částečný bod za vyhovující konstrukci pro některé celé d, $1 < d < 47$. Z druhé části lze získat 1 částečný bod za důkaz nemožnosti pro každé $d \geqq 86$. Za uhodnutí odpovědi $d = 47$ udělte 1 bod, pokud není dosaženo žádného z výše uvedených zisků.

2. *V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímky BI, CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB, AC v bodech K, L. Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec).* (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Z návodné úlohy N3 k 5. úloze domácího kola víme, že přímka ST je osou úsečky AI.* Platí proto $|KA| = |KI|$ a $|LA| = |LI|$, jak je vyznačeno na obrázku vlevo. Čtyřúhelník $AKIL$ je tudíž souměrný podle své úhlopříčky KL, jedná se proto buď o deltoid**, nebo o kosočtverec (či čtverec). Jelikož však jeho druhá úhlopříčka AI půlí úhel KAL, musí to být kosočtverec (či čtverec).***





JINÉ ŘEŠENÍ. Dokážeme, že konvexní čtyřúhelník $AKIL$ má protější strany rovnoběžné. Že je to nejen rovnoběžník, ale dokonce kosočtverec (či čtverec), pak jako v prvním řešení zřejmě vyplyne z toho, že jeho úhlopříčka AI leží na ose jeho vnitřního úhlu u vrcholu A.†

Ze dvou rovnoběžností $AK \parallel LI$ a $AL \parallel KI$ dokážeme jen tu první v podobě $AB \parallel LI$; druhá rovnoběžnost $AL \parallel KI$ se dokáže zcela analogicky. Postup založíme na vlastnostech obvodových úhlů. V kružnici k (při obvyklém označení $\gamma = |\sphericalangle ACB|$) tak stejnou velikost $\frac{1}{2}\gamma$ mají nejen úhly ACT a TCB, ale i úhel TSB (viz obrázek vpravo). První a třetí z nich jsou ale úhly LCI a LSI, takže díky jejich shodnosti je čtyřúhelník $LICS$ tětivový – jemu opsaná kružnice je na obrázku vykreslena. V ní je obvodový úhel LIS shodný s úhlem LCS, což je vlastně obvodový úhel ACS v kružnici k, který je shodný s úhlem ABS. Zjistili jsme tak, že úsečky LI a AB svírají s přímkou BS shodné souhlasné úhly‡, a jsou proto rovnoběžné, jak jsme potřebovali dokázat. Řešení je hotovo.

* Tento známý poznatek nemusí řešitelé dokazovat. Připomeňme jen, že plyne ze shodnosti trojúhelníků ATS a ITS podle věty *usu*: Mají totiž společnou stranu ST a úhly ATS, ITS jsou shodné stejně jako úhly AST, IST – jde totiž o obvodové úhly v kružnici k příslušné shodným obloukům AS, CS, resp. shodným obloukům AT, BT.

** Zdůrazněme, že *deltoidem* se obvykle rozumí konvexní čtyřúhelník, který má právě dvě dvojice shodných sousedních stran. Kosočtverec pak není zvláštním případem deltoidu. Někdy se také čtverec nepovažuje za kosočtverec, proto v našem textu dopisujeme dodatky o čtverci v závorkách.

*** Tento zřejmý závěr nemusí řešitelé dokazovat, přesto jeho důkaz uvedeme: Rovnoramenné trojúhelníky AIK a AIL jsou shodné, neboť mají při společné základně AI shodné vnitřní úhly KAI a LAI. Odtud plyne, že čtyřúhelník $AKIL$ má shodné všechny čtyři strany.

† Ze shodnosti úhlů KAI a LAI pak totiž dostaneme, že jsou s nimi shodné i střídavé úhly LIA, resp. KIA, takže oba trojúhelníky AIK a AIL jsou skutečně rovnoramenné se společnou základnou AI. Ani toto zřejmé vysvětlení nemusí řešitelé zapisovat.

‡ Místo přímky BS jsme mohli uvážit i přímku AC: $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle ISC| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BAC|$.

Poznámka. Závěrečným krokem obou řešení byly úvahy o druhé úhlopříčce AI čtyřúhelníku $AKIL$. Ty lze nahradit důkazem rovnosti $|KA| = |LA|$, který nyní uvedeme: Stačí ukázat, že jsou shodné úhly AKL a ALK, na které pohlédneme jako na vnější úhly trojúhelníků AKT, resp. ALS. Pro jejich vnitřní úhly ovšem platí $|\sphericalangle ATK| = |\sphericalangle ATS| = |\sphericalangle ABS| = \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle TAK| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TCB| = \frac{1}{2}\gamma$ a analogicky $|\sphericalangle ASL| = \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle SAL| = \frac{1}{2}\beta$. Úhly AKL, ALK tak mají tutéž velikost $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních udělte částečné body za následující poznatky (*dokázané*, nevztahuje-li se na ně poslední odstavec pokynů):

a) Úhlopříčka AI leží na ose úhlu KAL – 0 bodů.
b) Rovnost $|KA| = |LA|$ (ze závěrečné poznámky) – 2 body.
c) Rovnosti $|KA| = |KI|$ a $|LA| = |LI|$ – za jedinou 3 body, za obě 4 body (také při konstatování, že čtyřúhelník $AKIL$ je souměrný podle své úhlopříčky KL).
d) Rovnoběžnosti $AK \parallel LI$ a $AL \parallel KI$ – za jedinou 3 body, za obě 4 body.
e) Čtyřúhelník $LICS$ (případně $LIBT$, případně oba) je tětivový – 2 body.

Dílčí zisky za položky a)–e) *nelze* sčítat, tj. počítá se největší z nich.

V poznámkách pod čarou jsme uvedli, které poznatky lze prohlásit za známé nebo zřejmé. Platí to i pro další poznatky z řešení, návodných a doplňujících úloh k domácímu kolu, pokud se řešitel na text k tomuto kolu odvolá.

3. *Určete všechny dvojice kladných celých čísel a a b, pro něž platí $a^{a-b}=b^a$.*

(Jaromír Šimša)

Řešení. Po vynásobení zadané rovnosti číslem a^b/b^a dostaneme

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a = a^b.$$

Mocnina na levé straně je celočíselná, právě když je její základ $k=a/b$ celé (v našem případě kladné) číslo.* Po dosazení $a=kb$ přejde přepsaná rovnost do tvaru $k^{kb}=(kb)^b$, odkud po vydělení exponentů číslem b dostaneme $k^k=kb$ neboli $b=k^{k-1}$, tudíž $a=kb=k^k$. Všechny hledané dvojice jsou proto tvaru $(a,b)=\left(k^k,k^{k-1}\right)$, kde $k\geqq 1$ je libovolné celé číslo. Zkouška vzhledem k ekvivalentním úpravám není nutná.

Poznámka. Ukažme, jak klíčový poznatek o tom, že číslo a je násobkem čísla b, lze získat i bez přepisu zadané rovnosti do tvaru se zlomkem a/b. Využijeme k tomu předpoklad, že čísla a a b jsou základy sobě rovných mocnin a^{a-b} a b^a, pro jejichž exponenty platí $a-b<a$.** K postupu uvážíme libovolné prvočíslo p a počty jeho výskytů v rozkladech čísel a, b na prvočinitele. Máme vlastně ukázat, že pro tyto počty, které označíme a_p a b_p, platí nerovnost $b_p\leqq a_p$. Porovnáním výskytů prvočísla p v obou stranách rovnosti $a^{a-b}=b^a$ získáme vztah $(a-b)\cdot a_p=a\cdot b_p$. Odtud v případě $a_p=0$ máme i $b_p=0$; v případě $a_p>0$ pak dostáváme $b_p/a_p=1-b/a<1$. Tím je kýžená nerovnost $b_p\leqq a_p$ dokázána.

Jiné řešení. Označme d největší společný dělitel čísel a a b. Pak $a=pd$ a $b=qd$, kde $p,q\geqq 1$ jsou nesoudělná celá čísla. Dosazením do zadané rovnosti a následnými ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned}(pd)^{(p-q)d} &= (qd)^{pd},\\ (pd)^{p-q} &= (qd)^p,\\ p^{p-q} &= q^p\cdot d^q.\end{aligned}$$

Jelikož $p\geqq 1$, je činitel z pravé strany poslední rovnosti násobkem q, takže násobkem q je i celočíselná mocnina p^{p-q} z levé strany. Ta je však současně s číslem q nesoudělná, neboť takový je její základ p. Proto musí být nutně $q=1$. Dosazením tohoto q do upravené rovnosti dostaneme $p^{p-1}=d$, takže všechna řešení jsou tvaru $a=pd=p^p$ a $b=qd=p^{p-1}$, kde p je libovolné celé kladné číslo. Docházíme tak ke stejnému závěru jako v prvním řešení. Zkouška opět není nutná.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho:

a) 1 bod za správný popis *všech* řešení (i bez důkazu, uhodnutím či experimentováním),
b) 1 bod za poznatek (i bez důkazu), že a je násobkem b (resp. že $q=1$ při značení z druhého řešení), další 2 body za jeho důkaz,
c) 2 body za postup vedoucí od poznatku z bodu b) k popisu z bodu a)

Body za a)–c) lze sčítat. Za chybějící zkoušku body nestrhávejte.

* Toto zřejmé tvrzení nemusí řešitelé dokazovat. Plyne z toho, že má-li zlomek a/b po zkrácení základní tvar u/v, je každá jeho mocnina $(a/b)^n$ zlomkem se základním tvarem u^n/v^n.

** Zatímco nerovnost $b\leqq a$ je za takového předpokladu zřejmá („větší exponent – menší základ“), méně zřejmou dělitelnost $b\mid a$ je třeba v řešení dokázat.