Úlohy krajského kola kategorie A

1. Je možné vyplnit tabulku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby součet čísel v každém řádku byl dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci byl dělitelný sedmi?

2. V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= x + 2y + 3z, \\ y^2 + 2z^2 &= 2x + 3y + 4z, \\ z^2 + 2x^2 &= 3x + 4y + 5z. \end{aligned}$$

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod P uvnitř jeho výšky z vrcholu C. Přímka AP protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě $Q \neq A$. Rovnoběžka se základnou AB vedená bodem P protne rameno BC v bodě R. Dokažte, že polopřímka QR je osou úhlu AQB.

4. Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky

$$a_0 \geqq 1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\}$$

pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 11. ledna 2022

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 14.20.

1. *Je možné vyplnit tabulku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby součet čísel v každém řádku byl dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci byl dělitelný sedmi?*

(Josef Tkadlec)

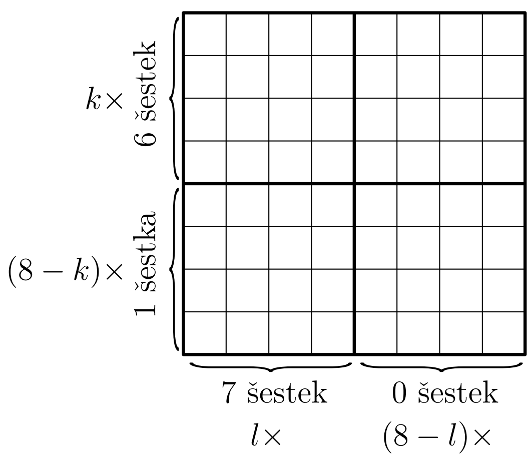
Řešení. Není to možné, důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme tedy, že tabulku 8×8 máme požadovaným způsobem vyplněnu. Postupně zjistíme, kolik řádků a sloupců obsahuje kolik šestek a sedmiček. Spor nakonec vyplyne z toho, že takové kombinace počtů nelze dosáhnout.

Zaměřme se nejprve na libovolný řádek vyplněné tabulky. Součet všech čísel v něm je alespoň $8 \cdot 6 = 48$ a nejvýše $8 \cdot 7 = 56$. Jelikož je to podle předpokladu násobek pěti, musí být roven jednomu z čísel 50 nebo 55. Zřejmě je v prvním případě v řádku 6 šestek a 2 sedmičky, ve druhém případě v něm je 1 šestka a 7 sedmiček.

Podobně součet všech čísel v libovolném sloupci je podle zadání násobek sedmi opět z intervalu $\langle 48; 56\rangle$, musí být proto roven jednomu z čísel 49 nebo 56. Zřejmě je v prvním případě ve sloupci 7 šestek a 1 sedmička, ve druhém případě v něm je 8 sedmiček (a není žádná šestka).*

Zkoumejme dále jen počty šestek (stejně úspěšně lze pracovat jen s počty sedmiček). S ohledem na jejich výše určené možné počty označíme $k \in \langle 0; 8\rangle$ počet řádků, které obsahují 6 šestek, a $l \in \langle 0; 8\rangle$ počet sloupců, které obsahují 7 šestek. Jak víme, zbylých $8-k$ řádků obsahuje 1 šestku a zbylých $8-l$ sloupců neobsahuje žádnou šestku. Přehledně to zachytíme následujícím obrázkem (pořadí řádků ani sloupců nejsou podstatná).



Nejdříve ukážeme, že nutně platí $k = l = 4$ (jak máme na obrázku). Z počítání po sloupcích plyne, že celkový počet šestek v tabulce je $7l$, tedy násobek sedmi, který je z počítání po řádcích roven číslu $k \cdot 6 + (8-k) \cdot 1 = 5k + 8$. Pro možná $k \in \langle 0; 8\rangle$ je však číslo $5k + 8$ dělitelné sedmi zřejmě pouze pro $k = 4$, kdy je rovno 28. To však už znamená, že také $l = 4$.

Situace $k = l = 4$ ovšem nastat nemůže (jak napovídá pohled na naší tabulku): Z rovnosti $l = 4$ plyne, že ve 4 sloupcích není žádná šestka, takže v žádném řádku nemohou být více než čtyři šestky. To je ve sporu s rovností $k = 4$, která znamená, že ve čtyřech řádcích je šestek dokonce 6.

* Okamžitě to plyne i z úvahy, že počet šestek v každém sloupci musí být dělitelný sedmi.

Poznámka. Poznatek, že nutně platí $k = l = 4$, lze odvodit i následující úvahou o součtu S všech čísel v tabulce.

Jelikož součet čísel v každém řádku je dělitelný pěti, je i číslo S dělitelné pěti. Stejnou úvahou pro sčítání po sloupcích zjistíme, že číslo S je rovněž dělitelné sedmi. Jelikož čísla 5 a 7 jsou nesoudělná, je součet S dělitelný i číslem $5 \cdot 7 = 35$. Navíc ze sčítání po řádcích (osm sčítanců, každý jak víme roven 50 nebo 55) zjišťujeme, že číslo S leží v intervalu $\langle 8 \cdot 50; 8 \cdot 55\rangle = \langle 400; 440\rangle$. V něm se však nachází jediný násobek čísla 35, totiž číslo $12 \cdot 35 = 420$. Proto platí nutně $S = 420$, takže počet šestek N v celé tabulce splňuje rovnici $N \cdot 6 + (64 - N) \cdot 7 = 420$, ze které vychází $N = 28$. V celé tabulce je tak 28 šestek (a 36 sedmiček), což už vede k rovnostem $k = l = 4$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních (včetně pokusů o důkaz sporem) oceňte částečné výsledky následovně.

A1. Správná (tj. negativní) odpověď (i bez zdůvodnění, avšak slovně zapsaná): 1 bod.
B1. Určení obou možností $(6, 2)$ a $(1, 7)$ pro počty šestek a sedmiček v každém řádku: 1 bod.
B2. Určení obou možností $(7, 1)$ a $(0, 8)$ pro počty šestek a sedmiček v každém sloupci: 1 bod.
B3. Důkaz rovností $k = l = 4$ (tj. právě čtyři řádky jsou typu $(6, 2)$ a právě čtyři sloupce jsou typu $(7, 1)$, viz B1, resp. B2): 2 body.
B4. Spor v případě $k = l = 4$: 1 bod.
C1. Spor v každém z případů, kdy neplatí $k = l = 4$: 5 bodů.

Celkově pak udělte max (A1, B1 + B2 + B3 + B4, C1) bodů.

Určování počtů šestek a sedmiček v jednom řádku nebo sloupci (či v celé tabulce) podle jejich zadaného součtu je natolik zřejmé, že je není nutné popisovat (jako jsme to udělali my až pro součet čísel v celé tabulce v poznámce za řešením).

2. *V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= x + 2y + 3z,\\ y^2 + 2z^2 &= 2x + 3y + 4z,\\ z^2 + 2x^2 &= 3x + 4y + 5z. \end{aligned}$$

(Patrik Bak)

Řešení. Dokážeme, že úloha má jediné řešení $(x; y; z) = (10/3; 5/3; 10/3)$.

Všimněme si, že pravá strana druhé rovnice je aritmetickým průměrem pravých stran zbylých dvou rovnic. Odečteme-li proto podobně jako ve čtvrté úloze domácího kola od součtu první a třetí rovnice dvojnásobek druhé rovnice, vyjde rovnice s nulovou pravou stranou

$$(x^2 + 2y^2) + (z^2 + 2x^2) - 2(y^2 + 2z^2) = 0 \quad \text{neboli} \quad 3x^2 - 3z^2 = 0.$$

Jelikož x a z jsou kladná čísla, plyne z toho $x = z$. Po dosazení x za z přejde původní soustava do tvaru

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 4x + 2y = 2(2x + y),\\ 2x^2 + y^2 &= 6x + 3y = 3(2x + y),\\ 3x^2 &= 8x + 4y = 4(2x + y). \end{aligned}$$

Porovnáním první a třetí rovnice dostáváme $2(x^2+2y^2) = 4(2x+y) = 3x^2$, tedy $x^2 = 4y^2$, z čehož s ohledem na $x, y > 0$ plyne $x = 2y$. Po dosazení $2y$ za x přejde upravená soustava do tvaru

$$\begin{aligned} 6y^2 &= 10y,\\ 9y^2 &= 15y,\\ 12y^2 &= 20y. \end{aligned}$$

Jelikož $y \neq 0$, je každá ze tří rovnic ekvivalentní s $y = 5/3$. S ohledem na odvozené vztahy $x = 2y$ a $z = x$ tak nutně platí $(x; y; z) = (10/3; 5/3; 10/3)$. Zkouška při tomto postupu není nutná.

Poznámka. Pokud si nevšimneme závislosti mezi pravými stranami zadaných rovnic, můžeme na danou soustavu pohlédnout jako na soustavu tří lineárních rovnic s neznámými x^2, y^2, z^2 a parametry x, y, z. Jejím řešením dostaneme vyjádření

$$x^2 = \frac{3x + 4y + 5z}{3}, \quad y^2 = \frac{y + 2z}{3}, \quad z^2 = \frac{3x + 4y + 5z}{3}.$$

Teď už je očividné, že platí $x^2 = z^2$ neboli $x = z$. Po dosazení x za z tak z odvozených vyjádření dostaneme

$$x^2 = \frac{8x + 4y}{3} = \frac{4(2x + y)}{3} \quad \text{a} \quad y^2 = \frac{2x + y}{3}.$$

Nyní vidíme, že $x^2 = 4y^2$ čili $x = 2y$. Nutně tedy platí rovnosti $x = 2y = z$. Dále už postupujeme stejně jako v původním řešení.

Doplňme tuto poznámku ještě zmínkou o jiných důsledcích zadané soustavy rovnic, kterými jsou kvadratické rovnice pro dvě ze tří neznámých x, y, z. Pokud například od dvojnásobku třetí rovnice odečteme druhou rovnici, dostaneme

$$4x^2 - y^2 = 2(3x + 4y + 5y) - (2x + 3y + 4z) = 4x + 5y + 6z.$$

Dosadíme-li sem za z (či rovnou za $3z$) z první rovnice, získáme pro neznámé x, y po snadné úpravě kvadratickou rovnici $4x^2 - 5y^2 = 2x + y$. Podobně po odečtení třetí rovnice od dvojnásobku první rovnice lze užitím druhé rovnice získat pro neznámé y, z rovnici $3y^2 = y + 2z$. Nejlepší výsledek ovšem dává odečtení první rovnice od dvojnásobku druhé rovnice, kdy s přihlédnutím ke třetí rovnici získáme pro neznámé x, z rovnici $x^2 - z^2 = 0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V žádném řešení absenci zkoušky nalezeného řešení nepenalizujte.

V neúplných řešeních ohodnoťte částečné výsledky následovně.

A1. Uvedení řešení $(x; y; z) = (10/3; 5/3; 10/3)$ (i bez zdůvodnění): 1 bod.

A2. Odvození alespoň jedné z kvadratických rovnic pro dvě neznámé, která není důsledkem vztahů $x = 2y = z$, jako např. $4x^2 - 5y^2 = 2x + y$ nebo $3y^2 = y + 2z$: 1 bod.

B1. Odvození vztahu $x = z$: 3 body.

B2. Odvození vztahu $x = 2y$ nebo $z = 2y$: 2 body.

Celkově pak udělte $\max(\text{A1} + \text{A2}, \text{B1} + \text{B2})$ bodů.

Pokud řešitel eliminuje jednu z neznámých, například z, a to tak, že vyjádření z z první rovnice dosadí do zbylých dvou rovnic, žádný bod neudělujte, není-li při pokusu o řešení získané soustavy dvou rovnic čtvrtého stupně o dvou neznámých dosaženo významného pokroku, jakými jsou vztahy z A2, B1 nebo B2.

3. *Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod P uvnitř jeho výšky z vrcholu C. Přímka AP protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě $Q \neq A$. Rovnoběžka se základnou AB vedená bodem P protne rameno BC v bodě R. Dokažte, že polopřímka QR je osou úhlu AQB.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Z rovnoběžnosti $PR \parallel AB$ a ze shodnosti obvodových úhlů BAQ a BCQ v kružnici k opsané trojúhelníku ABC plyne shodnost úhlů RPQ a RCQ. Skutečně,

$$|\sphericalangle RPQ| = |\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle RCQ|.$$

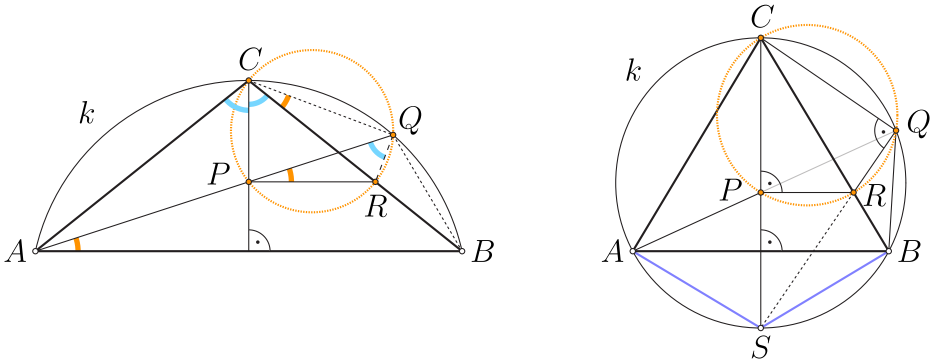
Body P, R, Q a C tudíž leží v tomto pořadí na jedné kružnici (tj. čtyřúhelník $PRQC$ je tětivový). Uvedeme dva způsoby, jak řešení dokončit.

První způsob. V kružnici opsané čtyřúhelníku $PRQC$ jsou shodné obvodové úhly PQR a PCR (viz obrázek 1 vlevo). Úhel PCR je však také shodný s úhlem PCA, neboť v rovnoramenném trojúhelníku leží výška z hlavního vrcholu na ose vnitřního úhlu. Konečně s přihlédnutím ke shodným obvodovým úhlům ACB a AQB v kružnici k dohromady dostáváme

$$|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle PCR| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AQB|,$$

a proto polopřímka QR je osou úhlu AQB, jak jsme měli dokázat.

Druhý způsob. Označme S takový bod, že úsečka CS je průměrem kružnice k (viz obrázek 1 vpravo). Jelikož čtyřúhelník $PRQC$ je tětivový, je pravý nejen úhel CPR, ale i úhel CQR, navíc je pravý i úhel CQS v kružnici k. Shodnost úhlů CQR a CQS znamená, že polopřímky QR a QS splývají. Díky rovnosti $|AC| = |BC|$ platí i rovnost $|AS| = |BS|$, tudíž bod S je středem toho oblouku AB kružnice k, který neobsahuje bod Q. Polopřímka QS neboli QR je tak skutečně osou úhlu AQB, neboť shodným obloukům AS a BS kružnice k příslušejí shodné obvodové úhly AQS a BQS.



Obr. 1

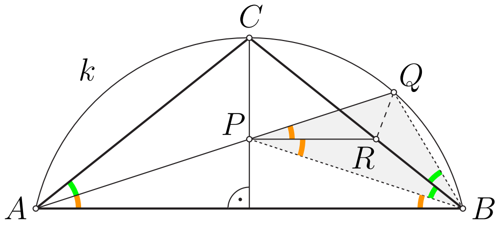
Jiné řešení. Úlohu vyřešíme, když dokážeme, že bod R je středem kružnice vepsané trojúhelníku PBQ. K tomu stačí ověřit, že polopřímky PR a BC jsou osami vnitřních úhlů BPQ, resp. PBQ (viz obrázek 2). Provedeme to odděleně ve dvou odstavcích.

- *K ose úhlu BPQ*: Potřebnou shodnost úhlů BPR a QPR odvodíme z toho, že $PR \parallel AB$ a že AB je základna rovnoramenného trojúhelníku ABP. Odtud už máme

$$|\sphericalangle BPR| = |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QPR|.$$

- *K ose úhlu PBQ*: Potřebnou shodnost úhlů PBC a QBC odvodíme z toho, že úhel PBC je podle osy CP souměrně sdružený s úhlem PAC a že QAC a QBC jsou shodné obvodové úhly v kružnici k. Odtud už máme

$$|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle QBC|.$$



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte částečné výsledky následovně.

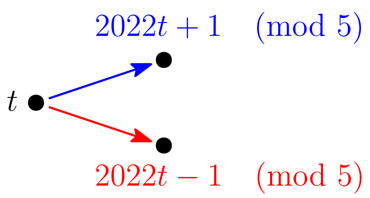
A1. Čtyřúhelník $PRQC$ je tětivový: 3 body s důkazem, 0 bodů bez důkazu.
A2. Dokončení důkazu za předpokladu A1 (i nedokázaného): 2 body.
B1. Polopřímka PR je osou úhlu BPQ: 2 body s důkazem, 0 bodů bez důkazu.
B2. Polopřímka BC je osou úhlu PBQ: 2 body s důkazem, 0 bodů bez důkazu.
B3. Dokončení důkazu za předpokladů B1 a B2 (i nedokázaných): 1 bod.

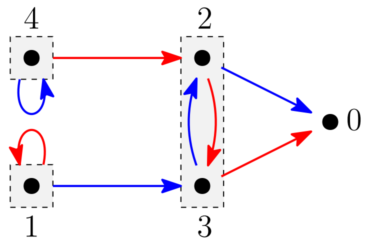
Celkově pak udělte max(A1 + A2, B1 + B2 + B3) bodů.

4. *Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 1$ a $a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.* (Martin Melicher)

Řešení. Tvrzení dokážeme sporem. Připusťme proto, že posloupnost obsahuje jen konečně mnoho složených čísel, tedy že od určitého členu a_m včetně obsahuje posloupnost už jen prvočísla. Jelikož posloupnost je rostoucí (neboť pro každé $t \geqq 1$ platí $2022t + 1 > > 2022t - 1 > t$), můžeme zmíněný index m vybrat tak, aby navíc platilo $a_m > 5$, a tedy i $a_i > 5$ pro všechny indexy $i \geqq m$.

Zkoumejme zbytky členů $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ po dělení pěti. Schéma na obrázku vpravo znázorňuje, které zbytky po dělení pěti dávají čísla $2022t + 1$ (modré šipky) a $2022t - 1$ (červené šipky) v závislosti na tom, který zbytek dává číslo t. Protože námi zkoumané členy a_i ($i \geqq m$) nejsou násobky pěti (díky výběru indexu m to jsou totiž prvočísla větší než 5), nezakreslili jsme do našeho grafu šipky vycházející z uzlu $t = 0$.





Jelikož nekonečná posloupnost prvočísel $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ neobsahuje žádné číslo dělitelné pěti, je ze schématu patrné, že nastane právě jeden ze tří případů:

a) Všechny její členy dávají zbytek 4.
b) Všechny její členy dávají zbytek 1.
c) Od jistého jejího členu dávají členy střídavě zbytky 2 a 3.

Každý z těchto tří případů dovedeme ke sporu podobným způsobem. Za tím účelem vždy využijeme pomocné tvrzení, které v obecné podobě nejprve zformulujeme a dokážeme.

Tvrzení. *Uvažujme nekonečnou rostoucí posloupnost čísel $x_0, x_1, x_2, \ldots$, která pro každý index $i \geqq 0$ splňuje rovnost $x_{i+1} = q \cdot x_i + d$, kde $x_0 \geqq 2$, $q \geqq 1$ a d jsou celá čísla. Pak některý její člen x_i je složené číslo.*

Důkaz tvrzení provedeme sporem podobně jako ve druhém řešení šesté úlohy domácího kola. Předpokládejme tedy dále, že všechny členy x_0, x_1 $x_2, \ldots$ z našeho tvrzení jsou prvočísla.

Jelikož je daná posloupnost rostoucí, vybereme index $i \geqq 0$ takový, že člen x_i je roven takovému prvočíslu p, které je s číslem q nesoudělné. Dokážeme, že se pak některý násobek tohoto prvočísla $p = x_i$ rovná jednomu z větších prvočísel $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots$ Důkaz sporem tak bude hotov.

Uvažme zobrazení $f\colon z \mapsto qz + d$ na množině $M_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ všech zbytků po dělení p. Ukažme, že zobrazení f je prosté. Skutečně, ze vztahu

$$p \mid f(z) - f(z') = (qz + d) - (qz' + d) = q(z - z')$$

díky nesoudělnosti p a q plyne $p \mid z - z'$, takže pro různé zbytky $z, z' \in M_p$ platí $f(z) \not\equiv f(z') \pmod{p}$. Podle návodné úlohy N3 k šesté úloze domácího kola se proto zbytky čísel $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots$ opakují periodicky od prvního místa (tj. bez předperiody). Protože zbytek prvního členu $x_i = p$ je roven 0, má stejný zbytek 0 po dělení prvočíslem p dokonce nekonečně členů x_j s indexy $j > i$. Tím je důkaz tvrzení hotov.

Nyní užitím dokázaného tvrzení rozebereme výše určené případy a)–c).

a) Pro každé $i \geqq m$ platí $a_{i+1} = 2022a_i + 1$, takže sporný závěr plyne okamžitě z našeho tvrzení pro posloupnost $a_m, a_{m+1}, \ldots$ a hodnoty $q = 2022$, $d = 1$.

b) Pro každé $i \geqq m$ platí $a_{i+1} = 2022a_i - 1$, takže sporný závěr plyne okamžitě z našeho tvrzení pro posloupnost $a_m, a_{m+1}, \ldots$ a hodnoty $q = 2022$, $d = -1$.

c) Označme $n \geqq m$ některý index, pro který platí $a_n \equiv 2 \pmod{5}$. Pak posloupnost $a_n, a_{n+2}, a_{n+4}, \ldots$ pro každé $k \geqq 0$ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} a_{n+2k+2} &= 2022a_{n+2k+1} + 1 = 2022 \cdot (2022a_{n+2k} - 1) + 1 = \\ &= 2022^2 \cdot a_{n+2k} - 2021, \end{aligned}$$

takže sporný závěr plyne z našeho tvrzení pro posloupnost $a_n, a_{n+2}, a_{n+4}, \ldots$ a hodnoty $q = 2022^2$, $d = -2021$.

Tím je celé řešení úlohy hotovo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Poznatky z řešení šesté úlohy domácího kola (včetně návodných a doplňujících úloh) lze prohlásit za známé. V neúplných řešeních podle vzorového postupu ohodnoťte částečné výsledky následovně.

A1. Rozhodnutí uvažovat zbytky členů a_i po dělení číslem 5: 0 bodů.
A2. Důkaz, že nastane jeden ze tří případů a), b), c): 3 body.
A3. Vyřešení alespoň jednoho z případů a), b): 1 bod.
A4. Vyřešení případu c): 1 bod.

Za neúplná řešení pak udělte A2 + A3 + A4 bodů.