71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy klauzurní části I. kola kategorie C

1. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem.

2. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD. Dokažte, že $AL \perp BL$.

3. Najděte všechny čtveřice $a > b > c > d$ celých čísel se součtem 71, která splňují rovnici

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = 26.$$

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 25. ledna 2022

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák klauzurní část distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 14.20.

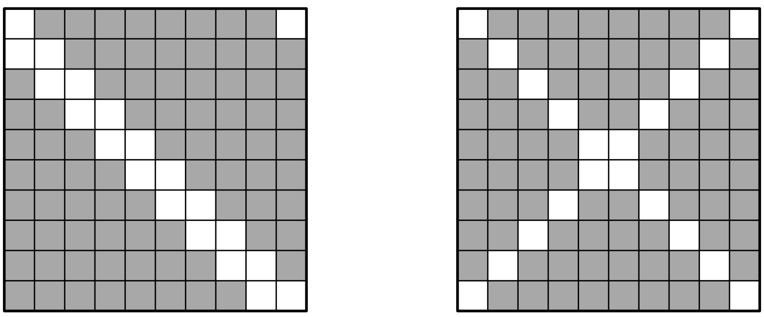
1. *Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem.*

(Michal Rolínek)

Řešení. Uvažme jakoukoli tabulku 10×10 vyplněnou podle zadání a odhadněme součty jejích čísel v jednotlivých řádcích, když víme, že to jsou násobky čísla 3. Totéž bude zřejmě platit i pro součty čísel ve sloupcích.

V jednom řádku je deset čísel ± 1, takže pro jejich součet připadají v úvahu hodnoty, které určíme sestupně podle podle počtu zastoupených plus jedniček: 10 (deset jedniček), 8 (devět jedniček), 6 (osm jedniček), atd. Vidíme, že dělitelná třemi je až třetí největší hodnota 6. Součet čísel v libovolném řádku je proto nejvýše 6. Odtud plyne, že součet všech čísel v tabulce (která má 10 řádků) nepřevyšuje hodnotu $10 \cdot 6 = 60$. Pokud uvedeme příklad správně vyplněné tabulky se součtem čísel rovným 60, bude to skutečně jeho největší možná hodnota a úloha bude vyřešena.

Najít požadovaný příklad nám pomůže poznatek z předchozího odstavce, podle kterého tabulku máme vlastně vyplnit tak, aby v každém řádku i sloupci bylo právě osm jedniček. Můžeme to provést mnoha způsoby. Dva z nich (vykazující jistou pravidelnost) jsou uvedeny na obrázku, ve kterém jsme všechna políčka s čísly 1 vybarvili (takže bílá zůstala políčka s čísly -1).



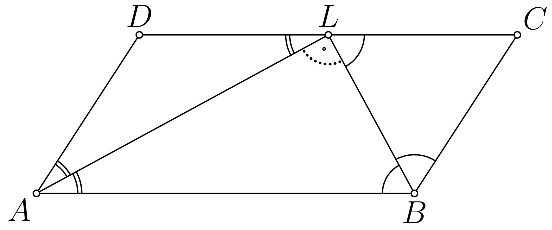
Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Pozorování, že v jednom řádku (nebo sloupci) je součet čísel nejvýše 6 (nebo ekvivalentně, je v něm nejvýše 8 jedniček): 2 body.
A2. Důkaz toho, že součet čísel v tabulce je nejvýše 60: 3 body.
B1. Zformulování úkolu najít tabulku, která má v každém řádku i sloupci 8 jedniček: 1 bod.
B2. Uvedení tabulky se součtem čísel 60 (nebo její kompletní popis): 3 body.
C1. Uhodnutí odpovědi: 0 bodů.

Celkově pak udělte max(A1, A2) + max(B1, B2) bodů.

2. *V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD. Dokažte, že $AL \perp BL$.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Podle zadání leží bod L na ose úhlu ABC, takže $|\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Podle věty o střídavých úhlech platí rovněž $|\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CLB|$. Dohromady dostáváme $|\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CLB|$, takže trojúhelník CLB je rovnoramenný se základnou LB, tj. $|BC| = |LC|$.



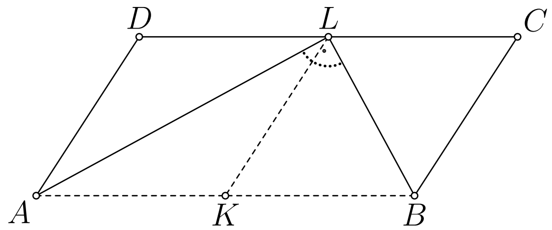
Jelikož v rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AD| = |BC|$ a bod L je střed strany CD, lze dokázanou rovnost $|BC| = |LC|$ přepsat na $|AD| = |LD|$. Trojúhelník ALD je tedy rovnoramenný se základnou AL, a proto $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DLA|$. Úhel DLA je však shodný se střídavým úhlem BAL, tudíž $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle BAL|$. To znamená, že bod L leží nejen na ose úhlu ABC, ale také na ose úhlu BAD. Tím pádem platí

$$|\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle LBA| = \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAD| + \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle ABC| = \tfrac{1}{2}\left(|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC|\right) = 90^\circ,$$

kde jsme využili toho, že díky $BC \parallel AD$ platí $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$.

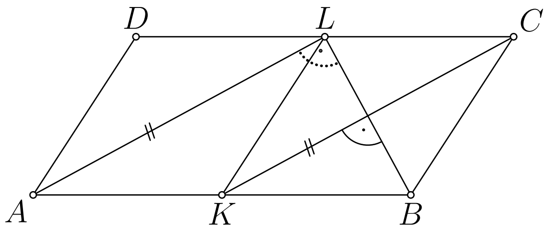
Došli jsme k závěru, že v trojúhelníku ABL je součet vnitřních úhlů u vrcholů A a B roven 90°, takže u třetího vrcholu L je úhel pravý, jak jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Označme K střed strany AB. Protože čtyřúhelník $KBCL$ je rovnoběžník*, platí v něm $|KL| = |BC|$. Pokud proto stejně jako v prvním řešení dokážeme rovnosti $|BC| = |CL| = \frac{1}{2}|CD| = |KA| = |KB|$, budeme dohromady mít $|KL| = |KA| = |KB|$. Odtud díky Thaletově větě už dostáváme, že ABL je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB.



Poznámka. Z rovností uvedených v druhém řešení plyne, že rovnoběžník $KBCL$ je kosočtverec (případně čtverec), a proto platí $KC \perp BL$. Po tomto zjištění lze řešení dokončit takto (viz další obrázek): Protože také $AKCL$ je zřejmě rovnoběžník (ze stejného

* Toto pozorování není nutné dokazovat – plyne z toho, že protější strany KB a LC jsou shodné a rovnoběžné.



důvodu jako $KBCL$, viz poznámku pod čarou), platí v něm $AL \parallel KC$, odkud už díky $KC \perp BL$ máme $AL \perp BL$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Důkaz rovnosti $|BC| = |LC|$: 2 body.
A2. Důkaz rovnosti $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle BAL|$: 2 body.
B1. Zavedení středu K strany AB: 0 bodů.
B2. Pozorování, že $KBCL$ je rovnoběžník: 1 bod.
B3. Důkaz shodnosti úsečky KL s úsečkami KA, KB: 5 bodů.
B4. Důkaz kolmosti $KC \perp BL$: 4 body
B5. Pozorování, že $AKCL$ je rovnoběžník: 1 bod

Celkově pak udělte max(A1 + A2, B2, B3, B4 + B5) bodů.

3. *Najděte všechny čtveřice $a > b > c > d$ celých čísel se součtem 71, která splňují rovnici*

$$(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=26.$$

(Josef Tkadlec)

Řešení. Levou stranu zadané rovnice roznásobíme a upravíme:

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c) &= (ac-bc-ad+bd) \ + \ (ab-bd-ac+cd) = \\ &= -bc-ad+ab+cd=(a-c)(b-d).\end{aligned}$$

Máme tedy rovnici $(a-c)(b-d)=26=2\cdot 13$. Z podmínky $a>b>c$ plyne, že celá čísla $a>c$ se liší o aspoň 2, tj. $a-c\geqq 2$. Podobně z $b>c>d$ plyne $b-d\geqq 2$. Tím pádem v rovnici $(a-c)(b-d)=2\cdot 13$ se činitelé $a-c$, $b-d$ rovnají číslům 2 a 13 v nějakém pořadí (neboť 13 je prvočíslo). Tyto dvě možnosti teď rozebereme.

- $a-c=2$ a $b-d=13$. Pak platí $a=c+2$ a $d=b-13$. Podmínka $a>b>c$ tak přejde do tvaru $c+2>b>c$. Jelikož však mezi celými čísly $c+2$ a c leží jediné další celé číslo $c+1$, tak nutně platí $b=c+1$, odkud $d=b-13=c-12$. Naše čtveřice (a,b,c,d) má tedy tvar $(c+2,c+1,c,c-12)$. Z podmínky $a+b+c+d=71$ pak plyne $4c-9=71$ neboli $c=20$, a proto $(a,b,c,d)=(22,21,20,8)$. Zkouška není nutná.
- $b-d=2$ a $a-c=13$. Obdobně jako v prvním případě díky $b=d+2$ přejde podmínka $b>c>d$ do tvaru $d+2>c>d$, podle kterého $c=d+1$, a tudíž $a=c+13=d+14$. Naše čtveřice $(a,b,c,d)=(d+14,d+2,d+1,d)$ po dosazení do rovnosti $a+b+c+d=71$ dává $4d+17=71$, odkud $d=27/2$, což ovšem není celé číslo. Tento případ je tak vyloučen.

Závěr. Zadání úlohy vyhovuje jediná čtveřice (a,b,c,d), a to $(22,21,20,8)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V žádném řešení nepenalizujte absenci zkoušky. V neúplných řešeních ohodnoťte částečné kroky následovně.

A1. Rozklad levé strany rovnice na součin $(a-c)(b-d)$, případně $(c-a)(d-b)$: 2 body.
B1. Vyloučení případů, kdy $\{a-c,b-d\}=\{1,26\}$: 1 bod
B2. Vyřešení jednoho či obou případů, kdy $\{a-c,b-d\}=\{2,13\}$: 1 případ 2 body, 2 případy 3 body.
B3. Pozorování, že pro celá čísla x, y, z plyne ze vztahů $x>y>z$ a $x-z=2$ rovnost $y=z+1$: 1 bod.
B4. Uhodnutí odpovědi: 1 bod.

Celkově pak udělte A1 + max(B1, B2, B3, B4) bodů.