I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Adam, Bořek a Čenda porovnávali, kolik kg kaštanů nasbírali. Zjistili, že aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Bořkem, je o 10 kg větší než Čendův příspěvek. A aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Čendou, je o 3 kg menší než Bořkův příspěvek.

Určete rozdíl mezi aritmetickým průměrem toho, co nasbíral Bořek s Čendou, a Adamovým příspěvkem. (*M. Petrová*)

Výsledek a poznámky. Rozdíl je 7 kg:

$$\frac{A+B}{2} = C + 10 \quad \text{a} \quad \frac{A+C}{2} = B - 3$$
$$\implies A + \frac{B+C}{2} = B + C + 7$$
$$\implies A - \frac{B+C}{2} = 7.$$

Z9–I–2

Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1.

Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti. (*I. Jančigová*)

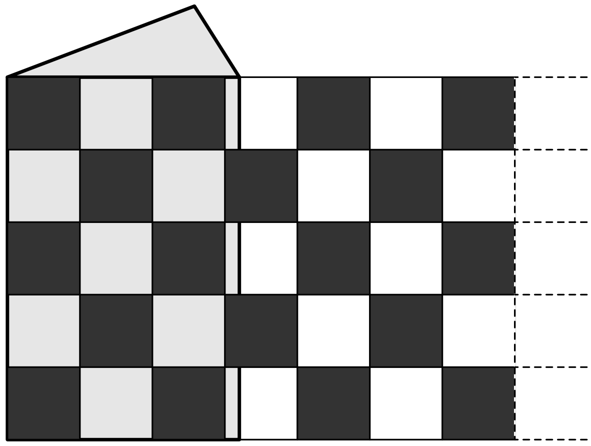
Výsledek a poznámky. Petr mohl šeptat buď 19, nebo 28.

- Zuzka Adamovi: 10.
- Petr Zuzce: 19, 28, 37, ...
- Jana Petrovi: max. $2022 \cdot 9 = 18198$.
- Největší ciferný součet pro čísla do 18198 je 36 (např. pro 9999).
- Tedy Petr Zuzce: 19, 28.

Z9–I–3

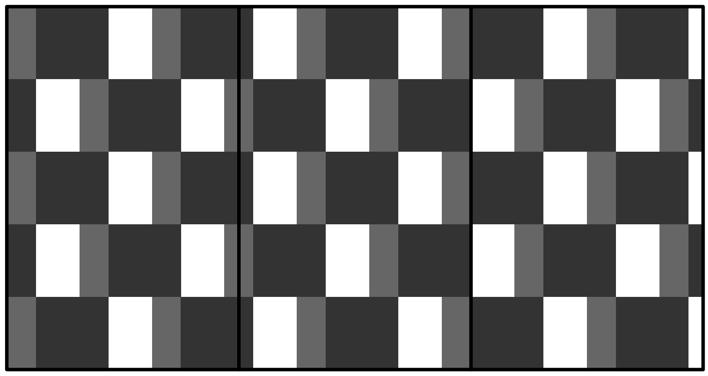
Je dán pravidelný trojboký hranol s podstavnou hranou délky 3,2 cm a výškou 5 cm. Jeho plášť omotáváme šachovnicovou fólií, která sestává z neprůhledných a průhledných čtvercových polí se stranami délky 1 cm. Začátek fólie lícuje s hranou hranolu (viz obrázek) a délka fólie vystačí právě na dvojí omotání celého pláště.

Kolik procent pláště hranolu bude přes fólii po omotání vidět? Tloušťku fólie zanedbejte. (*K. Pazourek*)



Výsledek a poznámky. Po omotání bude vidět 28,75% pláště hranolu.

Omotaný plášť schematicky:



- Průhledná část je tvořena 22 obdélníky $0{,}6 \times 1$ a 3 obdélníky $0{,}2 \times 1$, tj. $13{,}8\,(\mathrm{cm}^2)$.
- Plášť hranolu je tvořen 3 obdélníky $3{,}2 \times 5$, tj. $48\,\mathrm{cm}^2$.
- Tedy $13{,}8 : 48 = 0{,}2875$.

Z9–I–4

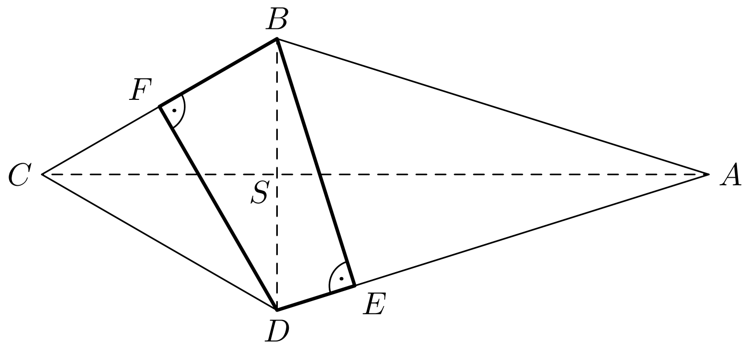
Deltoid je konvexní čtyřúhelník s jedinou osou souměrnosti. Deltoid $ABCD$ je souměrný podle úhlopříčky AC se stranou AB délky 5 cm, se stranou BC délky 3 cm a s úhlem BCD velikosti $60°$. Bod E je patou kolmice z vrcholu B na stranu AD a F je patou kolmice z vrcholu D na stranu BC.

Určete obvod a obsah čtyřúhelníku $DEBF$. (*K. Pazourek*)

Výsledek a poznámky. Přibližné vyjádření obvodu, resp. obsahu je $o \doteq 7{,}86\,\mathrm{cm}$, resp. $S \doteq 3{,}24\,\mathrm{cm}^2$.

- Trojúhelník BCD je rovnostranný a F je pata výšky $\Longrightarrow |BF| = \frac{3}{2}$ a $|DF| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Trojúhelníky ASD a BED jsou podobné $\Longrightarrow |DE| : |DB| = |DS| : |DA| \Longrightarrow$ $\Longrightarrow |DE| = \frac{9}{10}$.
- Trojúhelník BED je pravoúhlý $\Longrightarrow |BE| = \frac{3\sqrt{91}}{10}$.
- Obvod je $o = |BF| + |FD| + |DE| + |EB| \doteq 7{,}86\,(\mathrm{cm})$,

- obsah je $S = \frac{1}{2}(|BF| \cdot |FD| + |DE| \cdot |EB|) \doteq 3{,}24\,(\mathrm{cm}^2)$.



Z9–I–5

Vodník Kebule nakupoval v rybárně kapitána Nema, kde ceny všeho zboží byly uvedeny v celých šupinkách. Kdyby Kebule koupil 2 raky, 3 škeble a 1 štiku, zaplatil by 49 šupinek. Pokud by přikoupil ještě 5 raků, 11 škeblí a 1 štiku, platil by celkem 154 šupinek.

Kolik šupinek by platil za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky? Určete všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Výsledek a poznámky. Za uvedené zboží mohl platit buď 60, nebo 79 šupinek.

Ozn. r cenu raka, k cenu škeble a t cenu štiky:

$$2r + 3k + t = 49 \quad \text{a} \quad 5r + 11k + t = 154 - 49 = 105$$
$$\implies 3r + 8k = 56 \implies k = 7 - \frac{3}{8}r.$$

Jediné vyhovující možnosti jsou:

r	k	t	$r + 2k + 3t$
8	4	21	79
16	1	14	60

Z9–I–6

Jsou dána dvě různá čísla. Pokud od každého čísla odečteme čtvrtinu menšího čísla, dostaneme čísla, z nichž jedno bude pětkrát větší než druhé.

Kolikrát je dané větší číslo větší než to menší? (*L. Hozová*)

Výsledek a poznámky. Daná čísla ozn. v a m, přičemž $v > m$. Pokud jsou obě čísla kladná, pak $v = 4m$, pokud jsou obě záporná, pak $v = \frac{2}{5}m$ (případ s opačnými znaménky není možný).

Porovnáváme čísla $v - \frac{1}{4}m$ a $\frac{3}{4}m$:

- $v - \frac{1}{4}m = 5 \cdot \frac{3}{4}m \implies v = 4m$; podmínka $v > m$ platí pro lib. $m > 0$.
- $\frac{3}{4}m = 5 \cdot (v - \frac{1}{4}m) \implies v = \frac{2}{5}m$; podmínka $v > m$ platí pro lib. $m < 0$.