71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy ústředního kola kategorie A

Teplice, 21. března 2022

1. Na papíře je v řadě vedle sebe napsáno 71 nenulových reálných čísel. Platí, že každé číslo kromě prvního a posledního je o jedna menší než součin jeho dvou sousedů. Dokažte, že první a poslední číslo se rovnají.

2. Řekneme, že kladné celé číslo k je *spravedlivé*, pokud počet 2021místných palindromů, které jsou násobky k, je stejný jako počet 2022místných palindromů, které jsou násobky k. Obsahuje množina $M = \{1, 2, \ldots, 35\}$ více těch čísel, která jsou spravedlivá, nebo těch, která spravedlivá nejsou?
(Palindromem nazýváme přirozené číslo, jehož dekadický zápis se čte zleva doprava stejně jako zprava doleva.)

3. V ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme M střed strany BC a N střed oblouku BAC jeho kružnice opsané. Dále označme ω kružnici s průměrem BC a D, E průsečíky ω s osou úhlu BAC. Body D', E' leží na kružnici ω tak, že čtyřúhelník $DED'E'$ je pravoúhelník. Dokažte, že body D', E', M, N leží na jedné kružnici.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu může získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy ústředního kola kategorie A

Teplice, 22. března 2022

4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABP a CDP. Dokažte, že čtyřúhelník O_1BCO_2 je rovnoběžník.

5. Najděte všechna celá čísla n, pro která je číslo

$$2^n + n^2$$

druhou mocninou nějakého celého čísla.

6. Při pokusu o kolonizaci Marsu zaplavilo lidstvo sluneční soustavu 50 satelity, které mezi sebou vytvořily 225 komunikačních linií (každá linie existuje mezi jednou dvojicí satelitů a žádné dva satelity mezi sebou nemají více než jednu linii). Řekneme, že trojice satelitů je *propojená*, pokud aspoň jeden z nich má vytvořené komunikační linie s oběma ostatními satelity. Určete nejmenší a největší možný počet propojených trojic satelitů. (Pořadí satelitů ve dvojicích ani trojicích nerozlišujeme.)

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu může získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. *Na papíře je v řadě vedle sebe napsáno 71 nenulových reálných čísel. Platí, že každé číslo kromě prvního a posledního je o jedna menší než součin jeho dvou sousedů. Dokažte, že první a poslední číslo se rovnají.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Dokážeme, že posloupnost 71 čísel na tabuli musí být periodická s periodou 5. Jelikož rozdíl $71 - 1 = 70$ je násobek pěti, bude tím úloha vyřešena.

Označme libovolných šest po sobě napsaných čísel po řadě a, b, c, d, e, f. Slíbili jsme dokázat, že $f = a$. K tomu pomocí čísel a, b postupně vyjadřujme čísla c, d, e, f. Ze zadání máme $b = ac - 1$, což lze díky podmínce $a \neq 0$ přepsat na $c = (b+1)/a$. Podobně dále obdržíme

$$\begin{aligned} d &= \frac{c+1}{b} = \frac{\frac{b+1}{a}+1}{b} = \frac{a+b+1}{ab}, \\ e &= \frac{d+1}{c} = \frac{\frac{a+b+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{ab+a+b+1}{ab} \cdot \frac{a}{b+1} = \frac{(a+1)(b+1)a}{ab(b+1)} = \frac{a+1}{b}, \\ f &= \frac{e+1}{d} = \frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{a+b+1}{ab}} = \frac{a+b+1}{b} \cdot \frac{ab}{a+b+1} = a, \end{aligned}$$

kde krácení čísly $b+1$ a $a+b+1$ bylo korektní, protože jde o čitatele zlomků, kterými jsme dříve vyjádřili nenulová čísla c a d. Jsme hotovi.

Jiné řešení. Jiným způsobem dokážeme, že pro každých šest po sobě napsaných čísel a, b, c, d, e, f platí $a = f$. Odvodíme totiž rovnost $abcde = bcdef$, z níž požadovaný závěr vyplyne po vydělení obou stran nenulovým součinem $bcde$.

Díky zadané podmínce (uplatňované níže k podtrženým součinům) můžeme psát

$$\begin{aligned} abcde &= (\underline{ac})(\underline{bd})e = (b+1)(c+1)e = (b+1)(\underline{ce}+e) = (b+1)(d+e+1) \\ &= \underline{bd} + be + b + d + e + 1 = be + b + c + d + e + 2. \end{aligned}$$

Analogicky pro druhý součin $bcdef$ vychází

$$\begin{aligned} bcdef = fedcb &= (\underline{fd})(\underline{ec})b = (e+1)(d+1)b = (e+1)(\underline{bd}+b) = (e+1)(c+b+1) \\ &= \underline{ec} + eb + e + c + b + 1 = be + b + c + d + e + 2. \end{aligned}$$

Vidíme, že rovnost $abcde = bcdef$ skutečně platí.*

Poznámka. Tvrzení úlohy obecně neplatí, pokud připustíme, že některá z napsaných čísel se mohou rovnat nule. V tom případě lze totiž libovolně za sebe řadit bloky tří délek: bloky $B_5 = (0, -1, a, -a-1, -1)$ délky 5 (třeba i pro různá reálná čísla a), bloky $B_3 = (0, -1, -1)$ délky 3 a bloky $B_2 = (0, -1)$ délky 2. Tak například vyhovující řada 71 čísel

$$\underbrace{B_5 B_5 \ldots B_5}_{13\ \text{krát}} B_3 B_3$$

začíná číslem 0 a končí číslem -1.

* Výpočet druhého součinu $fedcb$ nebyl nezbytný. Stačilo konstatovat, že podmínka ze zadání úlohy nezávisí na tom, v jakém z obou možných směrů napsanou řadu čísel přečteme, a že výsledek pro první součin $abcde$ závisí pouze na čtveřici (b, c, d, e) a je stejný jako pro čtveřici (e, d, c, b).

2. *Řekneme, že kladné celé číslo k je* spravedlivé*, pokud počet* 2021*místných palindromů, které jsou násobky k, je stejný jako počet* 2022*místných palindromů, které jsou násobky k. Obsahuje množina $M = \{1, 2, \ldots, 35\}$ více těch čísel, která jsou spravedlivá, nebo těch, která spravedlivá nejsou?*
(Palindromem nazýváme přirozené číslo, jehož dekadický zápis se čte zleva doprava stejně jako zprava doleva.) (David Hruška, Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že zadaná 35prvková množina M obsahuje alespoň 18 spravedlivých čísel, tedy více nežli je v ní čísel, která spravedlivá nejsou.

Stačí nám dokázat, že každý kladný dělitel čísla $2^{1010} \cdot 3^2 \cdot 5^{1010}$ je číslo spravedlivé. Z toho totiž vyplyne, že všech 18 čísel v podmnožině

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32\}$$

množiny M je spravedlivých. Ideu důkazu spravedlivosti každého k s vlastností $k \mid 2^{1010} \cdot 3^2 \cdot 5^{1010}$ uvedeme hned poté, co v následujícím odstavci rozdělíme všechny palindromy délek 2021 a 2022 do vhodných skupin, zavedeme pro ně účelná označení a doplníme poznatky o dělitelnosti, které zpřehlední další důkaz.

Uvažme libovolné 1010místné číslo n a označme A_n (resp. B_n) množinu těch 2021místných (resp. 2022místných) palindromů, jejichž první 1010čislí je dané n. Tímto způsobem máme všechny zkoumané palindromy rozděleny do skupin A_n, resp. B_n, přičemž čísla v téže skupině se shodují nejen v prvním, ale i v posledním 1010čislí. Tudíž k zadání čísla z A_n, resp. B_n stačí určit jeho prostřední číslici, resp. jeho prostřední dvojčíslí, a to libovolným výběrem z množiny

$$J = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \text{resp.} \quad D = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}.$$

Proto je v A_n i B_n právě 10 čísel a my je dále budeme značit zápisy $[n, j]$, resp. $[n, d]$, kde $j \in J$ a $d \in D$. Fakt, že všechny palindromy $[n, j]$ a $[n, d]$ s daným n končí tím 1010čislím, které dostaneme přečtením čísla n zprava doleva, bude pro nás mít dva důsledky: Čísla $[n, j]$ a $[n, d]$ jednak dávají při dělení čísly 3 a 9 stejné zbytky jako čísla $2n + j$, resp. $2n + d$ (neboť $10^i \equiv 1 \pmod 9$ pro každé celé $i \geqq 0$), jednak je jejich dělitelnost čísly 2^a a 5^a, kde $a \in \langle 1, 1010\rangle$ je celé, určena prvními a číslicemi daného n.

Nyní už jsme připraveni dokázat spravedlivost každého čísla $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kde $a, c \in \langle 0, 1010\rangle$ a $b \in \langle 0, 2\rangle$ jsou (i všude dále) celá čísla. K tomu ukážeme, že počet násobků takového k je v obou množinách A_n a B_n stejný, ať je přípustné n jakékoli. Sčítáním těchto počtů přes všechna možná 1010místná čísla n pak obdržíme požadovaný závěr.

Tvrzení o shodném počtu násobků daného k v množinách A_n a B_n s daným (všude dále pevným) číslem n je zřejmé v případě $k = 1$ (oba počty jsou 10). Pro ostatní vymezená k rozlišíme 4 případy, v nichž budeme poznatky o dělitelnosti (z třetího odstavce řešení) užívat bez odkazů.

a) Případ $k = 2^a 5^c$, kde $\max(a, c) \in \langle 1, 1010\rangle$. Dělitelnost čísel $[n, j]$ a $[n, d]$ takovým číslem k je určena prvními $\max(a, c)$ číslicemi čísla n, takže tvrzení platí – buď jsou násobky k všechna čísla v A_n i B_n (po deseti), nebo jím není žádné číslo v A_n ani B_n.
b) Případ $k = 3^2 = 9$. Čísla $[n, j]$ a $[n, d]$ dávají při dělení devíti stejný zbytek jako čísla $2n + j$, resp. $2n + d$. Zbytky čísel $d \in D$ po dělení devíti jsou podle zápisu D v a) po

řadě 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 0, tedy stejně jako pro čísla $j \in J$ se každý zbytek až na nulu vyskytuje jednou a nula se vyskytuje dvakrát. Pokud je tedy n násobkem devíti, obsahují množiny A_n, B_n po dvou násobcích devíti, v opačném případě po jednom násobku devíti.

c) Případ $k = 3^1$. Čísla $[n, j]$ a $[n, d]$ můžeme modulo 3 opět zaměnit čísly $2n + j$, resp. $2n + d$. Po dělení třemi dávají čísla $j \in J$ po řadě zbytky 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0 a dvojčíslí $d \in D$ zbytky 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0. Pokud je tedy n násobkem tří, obsahují obě množiny A_n, B_n po čtyřech násobcích tří, jinak obsahují po třech násobcích tří.

d) Případ $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kde $\max(a, c) \in \langle 1, 1010 \rangle$ a $b \in \langle 1, 2 \rangle$. Uvažme nejprve číslo $k' = 2^a 5^c$. Z důkazu případu a) plyne, že buď jsou všechna čísla v A_n i B_n násobky k', nebo žádné z nich takové není. Pokud nastává první možnost, z výsledku případu $k = 3^b$ plyne, že obě množiny A_n i B_n obsahují stejný počet násobků 3^b, a tedy i násobků čísla $3^b \cdot k' = k$. Pokud nastává druhá možnost, žádná z množin A_n, B_n neobsahuje násobek k', a tedy ani žádný násobek k.

Tím je celé řešení ukončeno.

Poznámka. Užitím počítače lze ověřit, že zadaná množina M obsahuje *právě* 18 spravedlivých čísel, která jsme tudíž v našem řešení určili v plném počtu.

3. *V ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme M střed strany BC a N střed oblouku BAC jeho kružnice opsané. Dále označme ω kružnici s průměrem BC a D, E průsečíky ω s osou úhlu BAC. Body D', E' leží na kružnici ω tak, že čtyřúhelník $DED'E'$ je pravoúhelník. Dokažte, že body D', E', M, N leží na jedné kružnici.* (Patrik Bak)

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $|AB| < |AC|$ a že bod D leží na úsečce AE (jak máme na obou obrázcích). V jiných případech stačí vyměnit označení bodů $B \leftrightarrow C$, resp. $D \leftrightarrow E$.

Označme ještě k kružnici opsanou trojúhelníku ABC a S její průsečík s osou úhlu BAC ($S \neq A$). Tento (tzv. Švrčkův) bod S je v našem případě středem *kratšího* oblouku BC kružnice k, neboť podle zadání je úhel BAC ostrý. Z definice bodu N pak plyne, že úsečka SN je průměrem kružnice k ležícím na ose její tětivy BC. Střed M této tětivy proto leží na úsečce SN tak, že platí $|MS| < |MN|$. Současně úhel BSC je tupý, což s ohledem na pravé úhly BDC a BEC znamená, že bod S leží uvnitř úsečky DE. Jelikož $DED'E'$ je pravoúhelník, jsou úsečky DD', EE' (stejně jako BC) průměry zadané kružnice ω, takže její střed M je i středem úseček DD' a EE'.

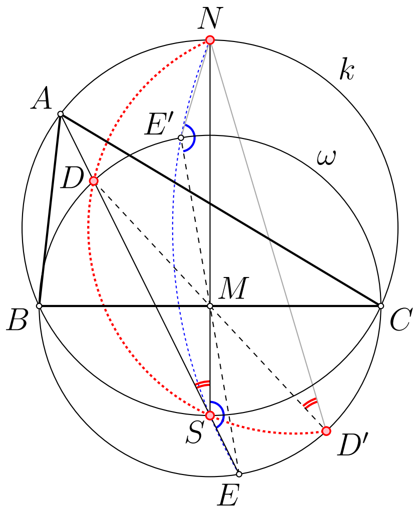
Po těchto úvodních pozorováních uvedeme několik způsobů, jak řešení dokončit. Budeme v nich bez odkazů využívat známé vlastnosti mocnosti bodu ke kružnici a obvodových úhlů.

První způsob. Vyjdeme z toho, že bod M je společným vnitřním bodem tětiv SN, BC kružnice k, jakož i tětiv BC, DD', EE' kružnice ω. Platí tak řetězec rovností

$$|MS| \cdot |MN| = |MB| \cdot |MC| = |MD| \cdot |MD'| = |ME| \cdot |ME'|.$$

Odtud plynoucí rovnost prvního součinu posledním dvěma součinům znamená právě to, že oba čtyřúhelníky $SDND'$ a $SENE'$ (s průsečíky úhlopříček v bodě M) jsou tětivové. Díky tomu platí (jak je barevně vyznačeno na obr. 1)

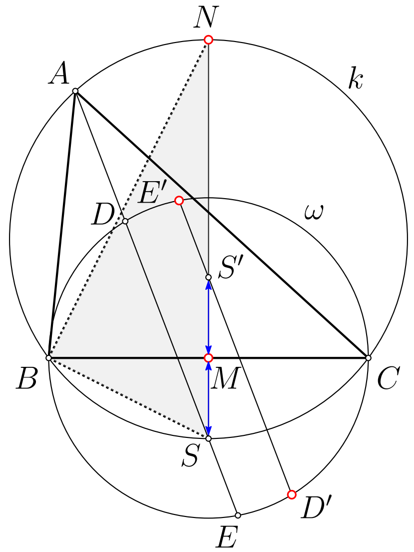
$$|\sphericalangle ND'M| = |\sphericalangle ND'D| = |\sphericalangle NSD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle NE'M| = |\sphericalangle NE'E| = |\sphericalangle NSE|.$$



Obr. 1

Jelikož však $|\sphericalangle NSD| + |\sphericalangle NSE| = 180°$, máme i $|\sphericalangle ND'M| + |\sphericalangle NE'M| = 180°$. Čtyři body z poslední rovnosti tak skutečně leží na jedné kružnici (jak máme dokázat), leží-li vrcholy D', E' úhlů $ND'M$, resp. $NE'M$ v opačných polorovinách s hraniční přímkou MN. Tato přímka však protíná úsečku DE (v bodě S), a tudíž i úsečku $D'E'$ (souměrně sdruženou podle středu M), takže jsme hotovi.

Druhý způsob. Uvážíme obraz S' bodu S v souměrnosti podle středu M, v níž $D \mapsto D'$ a $E \mapsto E'$. Protože podle úvodní části bod S leží uvnitř úsečky DE a platí $|MS| < |MN|$, leží bod S' uvnitř úseček $D'E'$ a MN (obr. 2). Stačí nám dokázat rovnost $|S'D'| \cdot |S'E'| = |S'M| \cdot |S'N|$.



Obr. 2

Předně ze souměrnosti podle středu M a z definice mocnosti bodu S vzhledem ke kružnici $\omega(M, |BM|)$ máme

$$|S'D'| \cdot |S'E'| = |SD| \cdot |SE| = |BM|^2 - |SM|^2.$$

Dále užitím rovnosti $|S'M| = |SM|$ a Eukleidovy věty pro výšku BM pravoúhlého trojúhelníku SNB dostáváme

$$|S'M| \cdot |S'N| = |S'M| \cdot (|MN| - |S'M|) = |SM| \cdot |MN| - |SM|^2 = |BM|^2 - |SM|^2.$$

Tím je avizovaná rovnost dokázána.

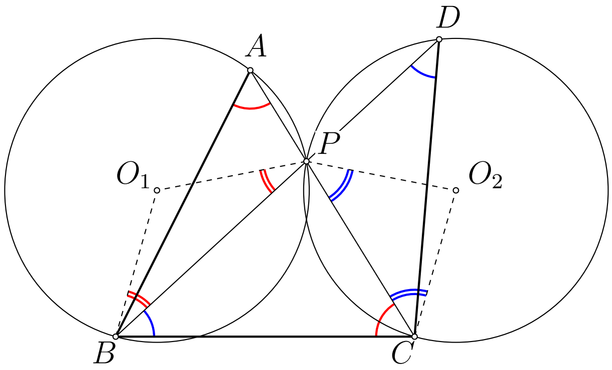
Třetí způsob. Opět uvážíme bod S' z druhého postupu (viz obr. 2) a tentokrát využijeme kruhovou inverzi podle zadané kružnice ω. Protože při tomto zobrazení jsou body $D', E' \in \omega$ samodružné a střed M kružnice ω neleží na přímce $D'E'$, bude jak známo obrazem této přímky kružnice procházející body D', E', M. Na ní ovšem bude rovněž ležet obraz bodu S', neboť $S' \in D'E'$. Ukážeme-li proto, že zmíněným obrazem bodu S' je právě bod N, budeme s řešením úlohy hotovi.

Eukleidova věta pro výšku BM pravoúhlého trojúhelníku SNB dává rovnost $|BM|^2 = |MS| \cdot |MN| = |MS'| \cdot |MN|$. Jelikož M je střed a $|BM|$ poloměr kružnice ω, podle které invertujeme, a jelikož bod N leží na polopřímce MS', je podle rovnosti $|BM|^2 = |MS'| \cdot |MN|$ bod N skutečně obrazem bodu S', jak jsme slíbili ukázat.

4. *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABP a CDP. Dokažte, že čtyřúhelník O_1BCO_2 je rovnoběžník.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. V první části řešení dokážeme, že úsečky BO_1 a CO_2 leží v polorovině BCP a jsou rovnoběžné, ve druhé části ukážeme, že tyto úsečky mají stejnou délku. Dohromady to už bude znamenat, že O_1BCO_2 je rovnoběžník.

První část. Rovnoramenné trojúhelníky ABC, BCD mají při svých základnách AC, resp. BD ostré vnitřní úhly, jejichž velikost označíme α, resp. β. Tyto úhly jsou na obrázku vyznačeny jedním obloučkem. Jak hned zdůvodníme, dvěma obloučky odpovídající barvy jsou vyznačeny úhly velikosti $90° - \alpha$, resp. $90° - \beta$.



Jelikož trojúhelník ABP má u vrcholu A ostrý úhel α, leží střed O_1 jemu opsané kružnice v polorovině BPA a konvexní středový úhel PO_1B má velikost 2α. Proto v rovnoramenném trojúhelníku BPO_1 mají úhly u vrcholů B, P avizovanou velikost $90° - \alpha$. Analogicky se dokáže, že střed O_2 leží v polorovině CPD a v rovnoramenném trojúhelníku CPO_2 mají úhly u vrcholů C, P velikost $90° - \beta$.

Jelikož ostré úhly O_1BP a CBP leží na různé strany od společného ramene BP, je úhel O_1BC s vnitřním bodem P konvexní, leží tak v polorovině BCP a má navíc velikost

$$|\sphericalangle O_1BC| = |\sphericalangle O_1BP| + |\sphericalangle CBP| = (90° - \alpha) + \beta.$$

Analogicky v polorovině BCP leží rovněž úhel O_2CB a má velikost $(90° - \beta) + \alpha$. Dohromady nám vychází $|\sphericalangle O_1BC| + |\sphericalangle O_2CB| = 180°$ a s první částí řešení jsme tak hotovi.

Druhá část řešení bude kratší. Rovnost $|O_1B| = |O_2C|$ snadno dokážeme užitím rozšířené sinové věty pro trojúhelníky ABP a CDP. Ty se totiž shodují ve velikosti úhlů u společného vrcholu P i v délce protějších stran AB a CD, takže platí

$$2 \cdot |O_1B| = \frac{|AB|}{\sin |\sphericalangle APB|} = \frac{|CD|}{\sin |\sphericalangle CPD|} = 2 \cdot |O_2C|.$$

5. *Najděte všechna celá čísla n, pro která je číslo*

$$2^n + n^2$$

druhou mocninou nějakého celého čísla. (Tomáš Jurík)

Řešení. Ukážeme, že zadání vyhovují pouze celá čísla $n = 0$ a $n = 6$.

V případě celého $n < 0$ zřejmě není číslo $2^n + n^2$ celé, natož druhá mocnina celého čísla. Pro $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nabývá výraz $2^n + n^2$ po řadě hodnot 1, 3, 8, 17, 32, 57, 100, z nichž jsou druhými mocninami pouze krajní hodnoty 1^2 a 10^2, které odpovídají číslům $n = 0$ a $n = 6$. Dokážeme-li dále sporem, že žádné $n \geqq 7$ nevyhovuje, budeme s úvodním vytyčeným úkolem hotovi.

Připusťme tedy, že pro nějaké celé číslo $n \geqq 7$ platí

$$2^n + n^2 = m^2, \tag{1}$$

kde m je celé číslo, o kterém můžeme předpokládat, že je kladné, a tedy podle (1) větší než n. Podle parity n rozlišíme dva případy.

a) *Případ lichého n.* Tehdy i číslo m z rovnosti $2^n + n^2 = m^2$ je liché. Upravme tuto rovnost do tvaru

$$2^n = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

Vidíme, že obě kladná čísla $m + n > m - n$ jsou mocninami dvou, takže $m - n \mid m + n$. Tedy $m - n$ dělí i číslo $(m + n) - (m - n)$ rovné $2n$, kde ovšem n je lichý činitel, takže $4 \nmid m - n$. Mocnina dvou rovná $m - n$ je ale sudé číslo, neboť čísla m, n jsou lichá. Proto z $4 \nmid m - n$ plyne $m - n = 2$. Po dosazení $m = n + 2$ přejde (1) po úpravě v rovnost $2^n = 4n + 4$. My však matematickou indukcí ukážeme, že pro každé celé $n \geqq 5$ platí $2^n > 4n + 4$, a tím případ a) dovedeme ke sporu. Skutečně, pro $n = 5$ jde o platnou nerovnost $32 > 24$. Předpokládáme-li nyní, že pro nějaké $n \geqq 5$ platí $2^n > 4n + 4$, pak po vynásobení dvěma dostaneme $2^{n+1} > 8n + 8$, odkud s přihlédnutím ke zřejmé nerovnosti $8n + 8 > 4(n + 1) + 4$ dostáváme dokazovanou nerovnost pro hodnotu $n + 1$. Tím je celý rozbor případu a) hotov.

b) *Případ sudého n.* Tehdy i číslo m z rovnosti $2^n + n^2 = m^2$ je sudé. Položme $n = 2k$, kde k je celé číslo, které díky předpokladu $n \geqq 7$ splňuje nerovnost $k \geqq 4$. Dokážeme dále, že platí nerovnosti $\left(2^k\right)^2 < m^2 < \left(2^k + 2\right)^2$, což bude kýžený spor, protože mezi kvadráty dvou po sobě následujících sudých čísel nemůže ležet další kvadrát sudého čísla.

Nerovnosti, které jsme slíbili dokázat, mají po nahrazení m^2 součtem $2^{2k} + (2k)^2$ a rozepsání mocniny $(2^k + 2)^2$ tvar

$$2^{2k} < 2^{2k} + (2k)^2 < 2^{2k} + 4 \cdot 2^k + 4.$$

Levá nerovnost je díky $(2k)^2 > 0$ triviální, pravá nerovnost po zrušení stejných členů 2^{2k} a vydělení obou stran čtyřmi přejde v ekvivalentní nerovnost $k^2 < 2^k + 1$. Tu opět dokážeme pro každé celé $k \geqq 4$ matematickou indukcí. Tak pro $k = 4$ jde o platnou nerovnost $16 < 17$. Předpokládáme-li nyní, že pro nějaké $k \geqq 4$ platí $k^2 < 2^k + 1$, pak po vynásobení dvěma a odečtení jedničky dostaneme $2k^2 - 1 < 2^{k+1} + 1$. Kýžená nerovnost pro hodnotu $k + 1$ tak bude dokázána, pokud ukážeme, že platí $(k + 1)^2 < 2k^2 - 1$ neboli $2 < k(k - 2)$, což je však zřejmé dokonce pro každé $k \geqq 3$. Tím je i rozbor případu b) ukončen.

Jiné řešení. Úpravu rovnice $2^n + n^2 = m^2$ na součinový tvar

$$2^n = (m - n)(m + n), \tag{2}$$

kterou jsme v prvním řešení využili pouze k rozboru případu lichého n, nyní uplatníme univerzálně, totiž k vyřešení původní rovnice $2^n + n^2 = m^2$ v oboru všech celých čísel $m > n \geqq 1$. Ukážeme, že jediné řešení je $(m, n) = (10, 6)$.

Vyjdeme opět z toho, že na pravé straně rovnice (2) musí stát dvě mocniny dvou. Platí tedy $m - n = 2^a$ a $m + n = 2^b$, kde celá čísla $0 \leqq a < b$ splňují díky vztahu $2^n = 2^a \cdot 2^b$ rovnost $a + b = n$. Původní neznámé m a n pak mají zřejmě vyjádření

$$m = \frac{2^b + 2^a}{2} \quad \text{a} \quad n = \frac{2^b - 2^a}{2},$$

ze kterých plyne, že $a \neq 0$, jinak by oba zlomky měly liché čitatele a čísla m, n by tak nebyla celá. Dosadíme-li do $a + b = n$ vyjádření čísla n, dostaneme po vynásobení dvěma ekvivalentní rovnici

$$2a + 2b = 2^b - 2^a \tag{3}$$

pro nové celočíselné neznámé a a b z oboru $1 \leqq a < b$.

Tvrdíme, že v případě $b \geqq 6$ rovnost (3) nemůže nastat. Jelikož z nerovnosti $a < b$ zřejmě plyne $2a + 2b < 4b$ a na druhou stranu zároveň $2^b - 2^a \geqq 2^b - 2^{b-1} = 2^{b-1}$, stačí nám ukázat, že $4b < 2^{b-1}$ pro každé celé $b \geqq 6$. Užijeme k tomu matematickou indukci. Pro $b = 6$ dostáváme platnou nerovnost $24 < 32$. Předpokládáme-li nyní, že pro nějaké $b \geqq 6$ platí $4b < 2^{b-1}$, pak po vynásobení dvěma dostaneme $8b < 2^b$, odkud s přihlédnutím ke zřejmé nerovnosti $4(b + 1) < 8b$ dostáváme dokazovanou nerovnost pro hodnotu $b + 1$ a důkaz indukcí je hotov.

Pro zbývajících 10 případů, kdy platí $1 \leqq a < b \leqq 5$, přímým dosazením do rovnice (3) ověříme, že rovnost v ní nastane pouze pro dvojici $(a, b) = (2, 4)$, které odpovídá dvojice $(m, n) = (10, 6)$:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 \neq 2 = 2^2 - 2^1, && \mathbf{2 \cdot 2 + 2 \cdot 4} = 12 = 12 = \mathbf{2^4 - 2^2},\\
&2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8 \neq 6 = 2^3 - 2^1, && 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 14 \neq 28 = 2^5 - 2^2,\\
&2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 10 \neq 14 = 2^4 - 2^1, && 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14 \neq 8 = 2^4 - 2^3,\\
&2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 12 \neq 30 = 2^5 - 2^1, && 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16 \neq 24 = 2^5 - 2^3,\\
&2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 \neq 4 = 2^3 - 2^2, && 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 18 \neq 16 = 2^5 - 2^4.
\end{aligned}$$

6. *Při pokusu o kolonizaci Marsu zaplavilo lidstvo sluneční soustavu* 50 *satelity, které mezi sebou vytvořily* 225 *komunikačních linií (každá linie existuje mezi jednou dvojicí satelitů a žádné dva satelity mezi sebou nemají více než jednu linii). Řekneme, že trojice satelitů je* propojená, *pokud aspoň jeden z nich má vytvořené komunikační linie s oběma ostatními satelity. Určete nejmenší a největší možný počet propojených trojic satelitů. (Pořadí satelitů ve dvojicích ani trojicích nerozlišujeme.)*

(Ján Mazák, Josef Tkadlec)

Řešení. Dokážeme ve dvou oddělených částech, že satelity mohou vytvořit nejméně 600 a nejvíce 5 400 propojených trojic. V celém textu bude S značit množinu dotyčných satelitů, $n = 50$ jejich počet a $m = 225$ počet komunikačních linií.

a) *Největší možný počet propojených trojic je* 5 400*.*

Trojice satelitů je propojená, právě když obsahuje dvě nebo tři komunikační linie. Vyplatí se nám proto pro každou možnou hodnotu $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ označit jako t_i počet těch trojic satelitů, mezi kterými je právě i komunikačních linii. Tvrdíme, že tyto počty splňují rovnost

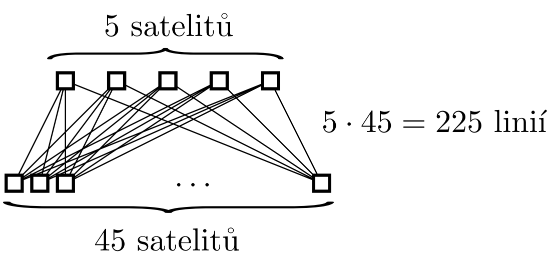
$$\sum_{i=0}^{3} i \cdot t_i = m \cdot (n-2). \tag{1}$$

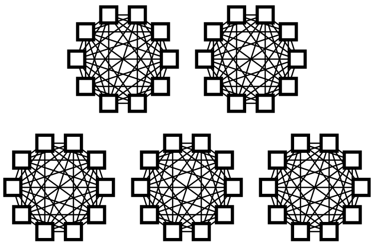
Skutečně, obě strany vyjadřují celkový počet uspořádaných dvojic (T, l), kde T je trojice satelitů a l je komunikační linie mezi dvěma satelity této trojice, neboť na levé straně započítáváme pro jednotlivá T, v kolika dvojicích (T, l) dané T vystupuje, zatímco pravou stranou (1) vyjadřujeme fakt, že každé l se vyskytuje v $n - 2$ dvojicích (T, l).

Z dokázané rovnosti (1) přepsané ve tvaru $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = m(n - 2)$ vyplývá pro počet $t_2 + t_3$ všech propojených trojic satelitů odhad

$$t_2 + t_3 = \frac{m(n-2) - t_1 - t_3}{2} \leqq \frac{m(n-2)}{2} = 5400,$$

přitom kýžená rovnost $t_2 + t_3 = 5\,400$ nastane, právě když bude platit $t_1 = t_3 = 0$. Toho lze dosáhnout, budou-li satelity propojené jako na obrázku vlevo (kde skutečně máme $5 + 45 = 50$ satelitů a $5 \cdot 45 = 225$ komunikačních linií).





$5 \cdot \binom{10}{2} = 225$ linií

b) *Nejmenší možný počet propojených trojic je* 600*.*

O propojené trojici satelitů T a jejím satelitu s řekneme, že s je *centrální satelit* trojice T, pokud je propojený s oběma ostatními satelity této trojice. Všimněme si, že každá propojená trojice má buď jeden, nebo tři centrální satelity.

Definujme ještě *stupeň* d_s satelitu s jako počet komunikačních linií, které má. Pak s je centrálním satelitem v právě $\binom{d_s}{2} = \frac{1}{2}d_s(d_s - 1)$ propojených trojicích. Jelikož každá propojená trojice má nejvýše 3 centrální satelity, pro celkový počet P propojených trojic platí

$$P \geqq \frac{1}{3}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} = \frac{1}{6}\left(\sum_{s\in S} d_s^2 - \sum_{s\in S} d_s\right) \geqq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{s\in S} d_s\right)^2 - \sum_{s\in S} d_s\right),$$

kde poslední nerovnost plyne z nerovnosti mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem pro n-tici čísel $\big(d_s \mid s \in S\big)$, která je sama důsledkem Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\left(\sum_{s\in S} 1 \cdot d_s\right)^2 \leqq \left(\sum_{s\in S} 1^2\right) \cdot \left(\sum_{s\in S} d_s^2\right).$$

Součet $\sum_{s\in S} d_s$, který se v získaném odhadu objevil, je však roven dvojnásobku počtu m všech komunikačních linií, neboť je v něm každá linie započítána právě dvakrát (jednou za každý její konec). Dvojím dosazením hodnoty $2m = 450$ za $\sum_{s\in S} d_s$ spolu s hodnotou $n = 50$ už z odvozené nerovnosti dostáváme slíbený odhad

$$P \geqq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{50} \cdot 450^2 - 450\right) = 600.$$

Z našeho postupu navíc plyne, že rovnost $P = 600$ nastane, právě když všech P propojených trojic má po třech centrálních satelitech a zároveň všech $n = 50$ satelitů má týž stupeň, rovný tudíž jak víme $2m/n = 9$.* Toho lze dosáhnout, budou-li satelity propojené jako na obrázku vpravo (všech 50 satelitů je rozděleno do pěti komunikačně izolovaných skupin po deseti navzájem propojených satelitech, majících tudíž skutečně týž stupeň 9).

POZNÁMKY.

1. Není obtížné dokázat, že konstrukce potřebných příkladů v obou částech řešení jsou jediné možné.
2. Odhad počtu P všech propojených trojic v druhé části řešení lze získat rovněž užitím *Jensenovy nerovnosti* pro konvexní funkci $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$:

$$P \geqq \frac{1}{3}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} = \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{n}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} \geqq \frac{n}{3} \cdot \binom{\frac{1}{n}\sum_{s\in S} d_s}{2} = \frac{n}{3} \cdot \binom{2m/n}{2}.$$

* Naštěstí vyšlo celé číslo.