71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy krajského kola kategorie B

1. a) Rozhodněte, zda existuje takové přirozené číslo n, že $2n$ je druhou mocninou přirozeného čísla a $3n$ je třetí mocninou přirozeného čísla.

b) Rozhodněte, zda existuje takové přirozené číslo n, které splňuje obě podmínky části a) a navíc ještě je $4n$ čtvrtou mocninou přirozeného čísla.

2. Určete počet reálných kořenů rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ v závislosti na reálném parametru a.

3. Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2 \dots A_n$. Pro která $n \geqq 5$ platí, že obraz bodu A_3 v osové souměrnosti podle přímky A_1A_2 leží na přímce A_4A_5?

4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly -4, 3 a 10 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš 0. Určete největší možný součet čísel v tabulce.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 5. dubna 2022

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 14.20.

1. *a) Rozhodněte, zda existuje takové přirozené číslo n, že $2n$ je druhou mocninou přirozeného čísla a $3n$ je třetí mocninou přirozeného čísla.*

b) Rozhodněte, zda existuje takové přirozené číslo n, které splňuje obě podmínky části a) a navíc ještě je $4n$ čtvrtou mocninou přirozeného čísla.

(Josef Tkadlec)

Řešení. a) Takové číslo existuje. Obě podmínky splňuje například číslo $n = 72$, neboť pro ně je $2n = 144 = 12^2$ a $3n = 216 = 6^3$.

Předchozí odstavec je úplným řešením části a), ukažme si však ještě, jak se na (nejmenší vyhovující) číslo 72 přijde. Uvažujme prvočíselný rozklad hledaného čísla n ve tvaru

$$n = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p^{a_p}, \tag{1}$$

kde p je největší prvočíslo, které dělí n, a čísla $a_2, \ldots, a_p$ jsou celá a nezáporná. Pak číslo $2n$ má prvočíselný rozklad

$$2n = 2^{a_2+1} \cdot 3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p^{a_p}.$$

Uvědomme si, že toto číslo je druhou mocninou přirozeného čísla, právě když jsou všechny exponenty $a_2 + 1, a_3, \ldots, a_p$ čísla sudá. Prvočíselný rozklad čísla $3n$ je

$$3n = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3+1} \cdot \ldots \cdot p^{a_p}.$$

Toto číslo je třetí mocninou, právě když jsou všechny exponenty $a_2, a_3 + 1, \ldots, a_p$ čísla dělitelná třemi. Číslo n proto splňuje obě podmínky ze zadání, právě když platí zároveň: číslo a_2 je liché a dělitelné třemi, číslo a_3 je sudé a při dělení třemi dává zbytek 2, a konečně pro každé prvočíslo $q > 3$ je a_q dělitelné současně dvěma i třemi (tedy je dělitelné šesti). Vidíme, že exponenty $a_2 = 3$ a $a_3 = 2$ jsou nejmenší, které splňují odpovídající podmínky, a přitom v (1) můžeme volit $p = 3$ (tj. položit $a_q = 0$ pro každé $q > 3$). Dostaneme tak nejmenší možné $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, které splňuje zadání části a). Zároveň z našich úvah plyne, že všechna vyhovující čísla n jsou tvaru

$$n = 2^{6a-3} \cdot 3^{6b-4} \cdot M^6, \quad \text{nebo jednodušeji} \quad n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot N^6,$$

kde a, b, M, N jsou kladná celá čísla (o čísle M můžeme navíc předpokládat, že je nesoudělné s číslem 6).

b) Dokážeme sporem, že takové číslo n neexistuje. Jeho prvočíselný rozklad (1) by totiž musel splňovat podmínky určené v části a) našeho řešení a ještě navíc by číslo

$$4n = 2^{a_2+2} \cdot 3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p^{a_p}$$

muselo být čtvrtou mocninou, tedy všechny exponenty $a_2 + 2, a_3, \ldots, a_p$ by musely být dělitelné čtyřmi. Speciálně číslo a_2+2 by muselo být dělitelné čtyřmi, i když samo číslo a_2 je – jak víme z řešení části a) – nutně liché. Tímto sporem je důkaz neexistence čísla n ukončen.

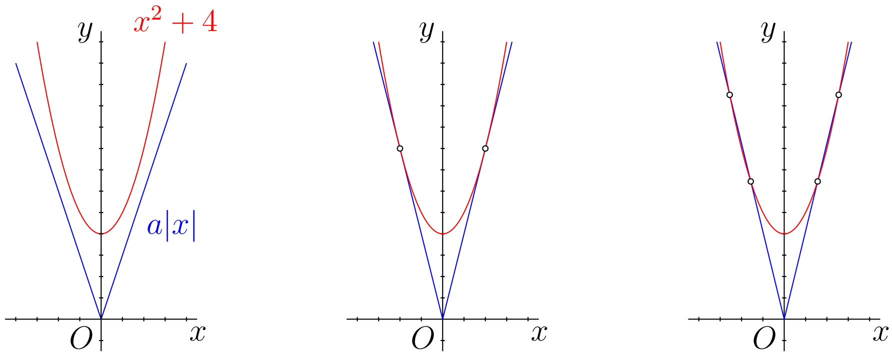
Jiné řešení části b) bez úvah o prvočíselných rozkladech: Hledané číslo n musí splňovat rovnost $2n = k^2$ pro nějaké přirozené k. Jelikož $\sqrt{4n} = \sqrt{2k^2} = k \cdot \sqrt{2}$ a číslo $\sqrt{2}$ je jak známo iracionální, není odmocněnec $4n$ druhou, a tedy ani čtvrtou mocninou přirozeného čísla.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za část a) a 3 body za část b). Za drobný nedostatek v argumentaci k části b) strhněte 1 bod.

2. *Určete počet reálných kořenů rovnice $x^2+4 = a|x|$ v závislosti na reálném parametru a.*
(Mária Dományová)

ŘEŠENÍ. Jako první uveďme grafické řešení úlohy. Grafem funkce na levé straně rovnice je parabola rozevřená vzhůru, která má vrchol v bodě $[0, 4]$. Grafem funkce na pravé straně je dvojice polopřímek vycházejících z počátku, které jsou souměrně sdružené podle osy y. Polopřímka směřující doprava (graf funkce pro $x > 0$) má směrnici a, polopřímka směřující doleva má směrnici $-a$.

Uvědomme si, že celá situace je souměrná podle osy y (obě zastoupené funkce $x^2 + 4$ a $a|x|$ jsou sudé). Mohou tedy nastat tři případy. Pro dostatečně malé hodnoty a polopřímky parabolu neprotnou (tak tomu bude pro každé $a \leqq 0$ a rovněž pro některá $a > 0$ jako na prvním obrázku) – rovnice pak nebude mít žádný reálný kořen. Pro jistou hraniční hodnotu $a = a_0 > 0$ budou obě polopřímky tečnami paraboly (viz druhý obrázek) – v tom případě bude rovnice mít 2 reálné kořeny. Při hodnotách $a > a_0$ každá z obou polopřímek protne parabolu ve dvou bodech (třetí obrázek) – rovnice pak bude mít celkem 4 reálné kořeny. Stačí tudíž dopočítat onu hraniční hodnotu $a_0 > 0$. Pro ni musí mít kvadratická rovnice $x^2 + 4 = a_0x$ právě jeden dvojnásobný kořen, což nastane právě tehdy, když její diskriminant $a_0^2 - 16$ bude roven nule. Tomu vyhovuje jediné kladné $a_0 = 4$ (dvojnásobným kořenem je pak skutečně *kladné* číslo $x = 2$).



Závěr. Při každém $a > 4$ má rovnice 4 reálné kořeny, pro $a = 4$ má dva reálné kořeny a pro libovolné $a < 4$ nemá žádný reálný kořen.

JINÉ ŘEŠENÍ. Podejme nyní čistě algebraické řešení. Všimněme si, že číslo $x = 0$ zřejmě není kořenem zadané rovnice (při žádném a), a hledejme nejprve její kladné kořeny.

V oboru všech kladných čísel x řešíme rovnici $x^2 + 4 = ax$ neboli $x^2 - ax + 4 = 0$. Její případné reálné kořeny jsou tvaru

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}.$$

Vidíme, že při $|a| < 4$ je diskriminant záporný a rovnice nemá žádný reálný kořen. Při $|a| = 4$ má rovnice dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}a$. Ten je však kladný, právě když je $a > 0$, tedy v našem případě $a = 4$. Při $|a| > 4$ má rovnice dva různé reálné kořeny. Tehdy ovšem z $a^2 - 16 < a^2$ plyne $\sqrt{a^2 - 16} < |a|$, a proto oba kořeny mají stejné znaménko jako parametr a. Tedy při $a > 4$ má rovnice dva kladné kořeny, zatímco při $a < -4$ nemá žádný kladný kořen (oba kořeny jsou záporné).

Nyní můžeme obdobně řešit rovnici v oboru všech záporných čísel x, ve kterém má tvar $x^2 + 4 = -ax$. Zjistíme, že při $a > 4$ má tato rovnice dva záporné kořeny, při $a = 4$ jen jeden a při $a < 4$ nemá žádný záporný kořen. Namísto těchto výpočtů ovšem stačí konstatovat, že z tvaru původní rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ plyne, že číslo x je jejím kořenem, právě když je kořenem číslo $-x$. Proto se výsledky o počtu řešení v oboru $x > 0$ beze změny přenesou do oboru $x < 0$.

Získané poznatky dohromady vedou ke stejnému závěru jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

V případě neúplného grafického řešení udělte:

A1. 1 bod za dostatečný popis obou grafů nebo jejich nakreslení pro některé a.
A2. 3 body za vizuální úvahu o vlivu směrnic $\pm a$ obou polopřímek na počet jejich průsečíků s parabolou a zformulování závěru o existenci hodnoty a_0 s vlastností: Rovnice bude mít celkem 4, 2 resp. žádné řešení podle toho, zda $a > a_0$, $a = a_0$, resp. $a < a_0$ (bez výpočtu a_0). Využívá-li přitom řešitel zřejmou souměrnost obou grafů podle osy y, opomene ji však zmínit, tolerujte to.
A3. 2 body za určení hodnoty a_0, kdy se obě polopřímky dotýkají paraboly.

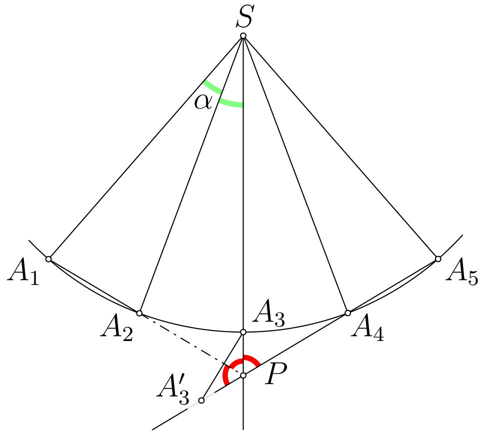
Při hodnocení neúplného algebraického řešení postupujte následovně. Je-li konstatováno, že díky symetrii stačí rovnici řešit v oboru $x \geqq 0$ (případně $x > 0$, je-li hodnota $x = 0$ apriori vyloučena), udělte částečné body podle následujícího schématu. Polovinu v něm uvedených bodů udělujte vždy za každý z oborů $x > 0$ a $x < 0$, není-li symetrie zmíněna.

B1. 2 body za důkaz, že při $|a| < 4$ nebude mít rovnice žádné řešení.
B2. 2 body za úplné vyřešení obou případů $a = \pm 4$ (při tvrzení, že rovnice bude mít řešení i pro $a = -4$, dejte 0 bodů).
B3. 2 body za úplné vyřešení případu $|a| > 4$ (při tvrzení, že rovnice bude mít řešení i pro některé $a < -4$, dejte 0 bodů).

Celkem pak udělte $\max\bigl(\mathrm{A1} + \mathrm{A2} + \mathrm{A3}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2} + \mathrm{B3}\bigr)$ bodů. Za pouhé pozorování symetrie bez dalších poznatků (kromě případného vyloučení hodnoty $x = 0$) udělte 1 bod.

3. *Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2 \ldots A_n$. Pro která $n \geqq 5$ platí, že obraz bodu A_3 v osové souměrnosti podle přímky A_1A_2 leží na přímce A_4A_5?* (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Označme S střed pravidelného n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ a P průsečík polopřímek A_1A_2 a A_5A_4. Bod P bude existovat pro každé $n > 6$, zbylé případy $n = 5$ a $n = 6$ rozebereme na konci řešení. Nyní tedy předpokládejme, že $n > 6$.



Obr. 1

Ze souměrnosti podle přímky SA_3 je zřejmé, že bod P leží na polopřímce SA_3. V zadání úlohy vystupující obraz bodu A_3 v osové souměrnosti podle přímky A_1A_2 označme A_3'. Dále označme ještě $\alpha = |\sphericalangle A_1SA_2| = |\sphericalangle A_2SA_3| = 360°/n$. V rovnoramenném trojúhelníku SA_1A_2 máme $|\sphericalangle SA_2A_1| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, takže pro jeho vnější úhel platí $|\sphericalangle SA_2P| = 180° - |\sphericalangle SA_2A_1| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, a tudíž z trojúhelníku SA_2P vychází $|\sphericalangle A_3PA_2| = |\sphericalangle SPA_2| = 180° - \alpha - (90° + \frac{1}{2}\alpha) = 90° - \frac{3}{2}\alpha$. Díky souměrné sdruženosti bodů A_2, A_4 podle přímky $SA_3 = SP$ platí rovněž $|\sphericalangle SPA_4| = 90° - \frac{3}{2}\alpha$. Podobně díky souměrné sdruženosti bodů A_3, A_3' podle přímky A_1A_2 platí také $|\sphericalangle A_2PA_3'| = 90° - \frac{3}{2}\alpha$. Dohromady to znamená, že (ne nutně konvexní) úhel $A_3'PA_4$ s vnitřním bodem S má velikost $3 \cdot (90° - \frac{3}{2}\alpha) = 270° - \frac{9}{2}\alpha$. Naším úkolem je najít všechna $n > 6$, kdy posledně určená velikost je 180° (právě tehdy totiž bod A_3' leží na přímce A_4A_5). Rovnost $270° - \frac{9}{2}\alpha = 180°$ ovšem nastane, právě když bude $\alpha = 20°$. Jelikož jak víme $\alpha = 360°/n$, je $n = 18$ jediným řešením úlohy v oboru všech čísel $n > 6$.

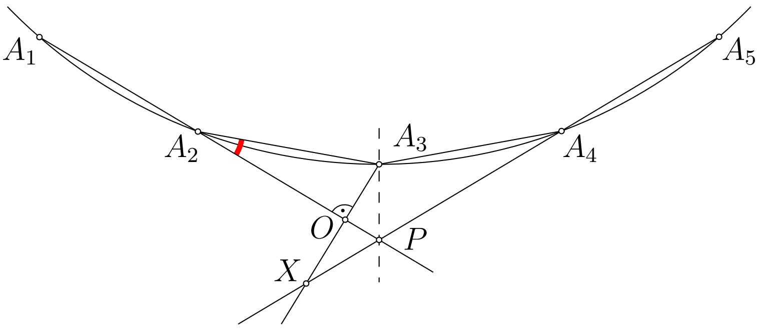
Zbývá rozebrat případy $n = 6$ a $n = 5$. Při $n = 6$ jsou přímky A_1A_2 a A_4A_5 rovnoběžné a přímka A_4A_5 leží celá v polorovině opačné k polorovině SA_3A_3', a proto bod A_3' neleží na přímce A_4A_5. Při $n = 5$ leží bod A_3' a celá přímka A_4A_5 v opačných polorovinách s hraniční přímkou A_1A_3 (která je totiž rovnoběžná s přímkou A_4A_5), takže ani tehdy bod A_3' na přímce A_4A_5 neleží.

Závěr. Jediné řešení úlohy je $n = 18$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Uveďme nyní odlišné řešení, které je založeno na porovnávání délek užitím goniometrických funkcí. Sestrojme kolmici z bodu A_3 na přímku A_1A_2 a označme její průsečíky s přímkami A_1A_2 a A_4A_5 po řadě O a X jako na obr. 2. Role bodu X je jasná: naším úkolem je zjistit, kdy bod X je bodem A_3' souměrně sdruženým s bodem A_3 podle přímky A_1A_2. Nastane to, právě když bude platit rovnost $|A_3X| = |A_3A_3'|$ neboli $|A_3X| = 2|A_3O|$ a současně bod X bude ležet na polopřímce A_3O.

Naše řešení povedeme následovně. Nejprve dokážeme, že pokud bod X na polopřímce A_3O leží (jako na obr. 2), je rovnost $|A_3X| = 2|A_3O|$ splněna pouze pro hodnotu $n = 18$. Na závěr pak ukážeme, že pro $n = 18$ bod X na polopřímce A_3O skutečně leží.

Pro další výpočty označíme β velikost úhlu A_3A_2O (na obrázku vyznačeného červeně). Ukažme, že $\beta = 360°/n$. Skutečně, je-li S střed kružnice opsané našemu n-úhelníku, platí $|\sphericalangle A_1SA_3| = 2 \cdot |\sphericalangle A_1SA_2| = 2 \cdot 360°/n$ a podle věty o středovém a obvodovém úhlu je $|\sphericalangle A_1A_2A_3| = 180° - |\sphericalangle A_1SA_3|/2$, dohromady už vychází $\beta = |\sphericalangle A_3A_2O| = 180° - |\sphericalangle A_1A_2A_3| = |\sphericalangle A_1SA_3|/2 = 360°/n$. Dále ještě využijeme, že velikost $180° - \beta$ má nejen úhel $A_1A_2A_3$, ale také úhel $A_2A_3A_4$.



Obr. 2

Vyjádřeme nyní pomocí β velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku A_3A_4X. Díky osové souměrnosti podle přímky AP platí $|\sphericalangle A_3A_4X| = \beta$. Druhý úhel XA_3A_4 má (na základě plného úhlu s vrcholem A_3) velikost $|\sphericalangle XA_3A_4| = 360° - |\sphericalangle XA_3A_2| - |\sphericalangle A_2A_3A_4| = 360° - (90° - \beta) - (180° - \beta) = 90° + 2\beta$. Pro třetí úhel A_3XA_4 tak dostáváme $|\sphericalangle A_3XA_4| = 180° - \beta - (90° + 2\beta) = 90° - 3\beta$.

Označme nyní a délku strany našeho n-úhelníku. Protože z trojúhelníku A_3A_2O plyne $|A_3O| = a \sin\beta$, kýžená rovnost $|A_3X| = 2|A_3O|$ nastane, právě když bude platit $|A_3X| = 2a\sin\beta$. Podle sinové věty pro trojúhelník A_3A_4X máme

$$|A_3X| : |A_3A_4| = \sin|\sphericalangle A_3A_4X| : \sin|\sphericalangle A_3XA_4|.$$

Dosadíme-li sem určené velikosti úhlů spolu s délkou $|A_3A_4| = a$, získáme

$$|A_3X| = \frac{|A_3A_4| \cdot \sin|\sphericalangle A_3A_4X|}{\sin|\sphericalangle A_3XA_4|} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(90° - 3\beta)} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\cos 3\beta}.$$

Poslední výraz má požadovanou hodnotu $2a\sin\beta$, právě když $\cos 3\beta = \frac{1}{2}$. To nastane právě v případě $3\beta = 60°$ neboli $\beta = 360°/n = 20°$. Tato rovnost je zřejmě splněna pro jediné $n = 18$.

Zbývá ukázat, že v případě $n = 18$ náš průsečík X leží na polopřímce A_3O. Toho jsme při předchozích výpočtech využili, když jsme velikosti úhlů A_3A_4X a XA_3A_4 počítali vlastně jako velikosti úhlů A_3A_4P a OA_3A_4. Platí tedy $|\sphericalangle A_3A_4P| = \beta$ a $|\sphericalangle OA_3A_4| = 90° + 2\beta$. Odtud v případě $n = 18$, kdy $\beta = 20°$, dostáváme

$$|\sphericalangle A_3A_4P| + |\sphericalangle OA_3A_4| = 90° + 3\beta = 150° < 180°.$$

Tato nerovnost už znamená, že polopřímky A_3O a A_4P se protínají (a jejich průsečíkem je tedy bod X). Tím je celé řešení hotovo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. *Vypočítáním* v následujícím schématu pro neúplná řešení rozumíme vyjádření závislosti na n, α, β, a nebo jiném zvoleném prvku pravidelného n-úhelníku. Za částečné kroky udělte:

X0. 0 bodů za zavedení bodů O, P, X.
X1. 0 bodů za vypočítání velikostí libovolných úhlů u vrcholů n-úhelníku.
A1. 1 bod za pozorování, že požadovaná situace nastane, právě když $|\sphericalangle A_3'PA_4| = 180°$.
A2. 1 bod za pozorování, že tři úhly u vrcholu P (červeně vyznačené na obr. 1) jsou díky dvěma osovým souměrnostem shodné.
A3. 3 body za vypočítání velikostí všech úhlů $A_3'PA_2$, A_2PA_3 a A_3PA_4 (za každý úhel po 1 bodu).
B1. 1 bod za konstatování, že požadovaná situace nastane, právě když $|A_3X| = |A_3A_3'|$.
B2. 1 bod za vypočítání $|A_3A_3'|$ (neboli $2|A_3O|$ v našem řešení).
B3. 3 body za vypočítání $|A_3X|$.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\text{A1} + \max(\text{A2}, \text{A3}), \text{B1} + \text{B2} + \text{B3}\bigr)$ bodů. Absenci rozboru případů $n = 5$, $n = 6$ (při prvním postupu) či závěrečné diskuze o poloze bodu X (při druhém postupu) v jinak úplném řešení nepenalizujte.

4. *Tabulka* 10×10 *je vyplněna čísly* -4, 3 *a* 10 *tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš* 0 *a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš* 0. *Určete největší možný součet čísel v tabulce.* (Radovan Švarc)

Řešení. Zkusme si nejprve rozmyslet, jaký největší součet může být v řádku tabulky, pokud je tvořen čísly -4, 3 a 10 a má být nejvýš 0. Všimněme si, že všechna tři čísla -4, 3 a 10 dávají zbytek 3 po dělení sedmi. Proto součet deseti čísel téhož řádku bude dávat po dělení sedmi stejný zbytek jako číslo $10 \cdot 3 = 30$, tedy zbytek 2. Největší nekladné číslo s touto vlastností je -5. V každém z devíti řádků, kde je součet nekladný, je tedy součet nutně nejvýše -5. V posledním řádku, na který nemáme žádné omezení, je součet nejvýše $10 \cdot 10 = 100$. Celkový součet čísel v tabulce tedy určitě nepřesáhne $9 \cdot (-5) + 100 = 55$.

Najděme nyní tabulku 10×10 se součtem čísel 55, která vyhovuje podmínkám ze zadání. Předcházející odstavec nám napovídá, jak ji hledat, když si ještě uvědomíme, že součtu -5 v řádku nebo sloupci můžeme dosáhnout užitím dvou desítek, jedné trojky a sedmi minus čtyřek, neboť $2 \cdot 10 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot (-4) = -5$. Proto poslední řádek i poslední sloupec vyplníme desítkami a zbývající tabulku 9×9 se budeme snažit vyplnit tak, aby v každém jejím řádku a také každém jejím sloupci byla jedna desítka, jedna trojka a sedm minus čtyřek. Toho lze dosáhnout způsobem založeným na cyklickém posunování pořadí čísel v řádcích (a tedy i sloupcích):

10	3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	10	3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	10	3	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	10	3	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	10	3	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	10	3	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	−4	10	3	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10	3	10
3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Závěr. Největší možný součet čísel v tabulce je roven 55.

Jiné řešení. Pokud si nevšimneme, že všechna tři čísla 10, 3 a -4 dávají zbytek 3 po dělení sedmi, můžeme dokázat jinak, že součty v devíti řádcích nepřevyšují -5, totiž rozborem případů možných počtů zastoupených desítek:

- Kdyby v řádku byly aspoň tři desítky, daly by v součtu nejméně 30 a součet čísel ve zbývajících nejvýše sedmi polích by byl nejméně $7 \cdot (-4) = -28$, tj. celkový součet by byl kladný, což odporuje zadání.
- Pokud jsou v řádku dvě desítky, potřebujeme je „vyvážit“ pěti minus čtyřkami ($2 \cdot 10 + 5 \cdot (-4) = 0$). Zbývají nám tři pole, stojí v nich trojky a minus čtyřky tak, že jejich součet je nekladný. Jistě nemohou být dvě z těchto tří čísel kladná ($3+3-4 > 0$). Největší možný nekladný součet při dvou desítkách je tedy $3 - 4 - 4 = -5$.
- Pokud je v řádku právě jedna desítka, musí tam být aspoň tři minus čtyřky. Protože $10 + 3 \cdot (-4) = -2$, ve zbývajících šesti polích stojí trojky a minus čtyřky se součtem nejvýše 2. Jelikož $3 + 3 + 3 + 3 - 4 - 4 = 4 > 2$, největší součet menší než 3 je $3+3+3-4-4-4 = -3$. Celkový součet v řádku pak je $1 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) = -5$.

- Pokud v řádku není žádná desítka, pak s ohledem na $6 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) > 0$ je nejvyšší možný nekladný součet roven $5 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = -5$.

Jak jsme slíbili, rozborem možností jsme dokázali, že pokud je součet čísel v řádku nekladný, pak je nejvýše roven -5.

Dodejme, že provedení rozboru lze zkrátit následujícím způsobem. Je-li v řádku tabulky x desítek, y trojek a $10 - x - y$ minus čtyřek, má jejich součet hodnotu

$$s = 10x + 3y + (10 - x - y) \cdot (-4) = 14x + 7y - 40.$$

Vidíme, že v případě $s \leqq 0$ jsou možné jen hodnoty $x = 0, 1, 2$. Jim odpovídají hodnoty s po řadě rovné $7y - 40$, $7y - 26$ a $7y - 12$, které mají největší nekladné hodnoty po řadě rovné $35 - 40 = -5$, $21 - 26 = -5$ a $7 - 12 = -5$. V případě $x = 0$ ovšem nebude v tabulce sloupec se samými desítkami, který pro získání celkového součtu 55 potřebujeme.

Poznámka. Rozbor případů ve druhém řešení ukazuje, že tabulka 10×10 splňující zadání úlohy má celkový součet čísel 55, právě když má jeden řádek a jeden sloupec vyplněný samými desítkami a v každém z ostatních devíti řádků a devíti sloupců má součet čísel (až na jejich pořadí) tvaru $2 \cdot 10 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot (-4)$ nebo tvaru $1 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-4)$. To nám dává další příklady takových tabulek:

3	3	3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	3	3	3	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	3	3	3	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	3	3	3	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	3	3	3	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	3	3	3	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	−4	3	3	3	10
3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	3	3	10
3	3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	3	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

10	3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	10	3	−4	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	10	3	−4	−4	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	3	3	3	−4	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	3	3	3	−4	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	3	3	3	−4	10
−4	−4	−4	−4	−4	−4	3	3	3	10
−4	−4	−4	3	−4	−4	−4	3	3	10
3	−4	−4	−4	3	−4	−4	−4	3	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě neúplného řešení udělte:

A1. 2 body za příklad (nebo úplný popis) tabulky se součtem 55.
B0. 0 bodů za hypotézu, že součet čísel v tabulce nepřesáhne 55.
B1. 1 bod za hypotézu, že součty v devíti řádcích (resp. sloupcích) nemohou být větší než -5, a odtud plynoucí závěr, že součet čísel v tabulce nepřesáhne 55.
B2. 4 body za důkaz, že součet čísel v tabulce nemůže být větší než 55, z toho 3 body za důkaz, že součty v devíti řádcích (resp. sloupcích) nemohou být větší než -5, a 1 bod za získání horního odhadu celkového součtu číslem 55. Pokud je rozbor případů neúplný nebo s chybami, udělte nejvýše 2 body z těchto 4.

Celkem pak udělte $\mathrm{A1} + \max(\mathrm{B1}, \mathrm{B2})$ bodů.