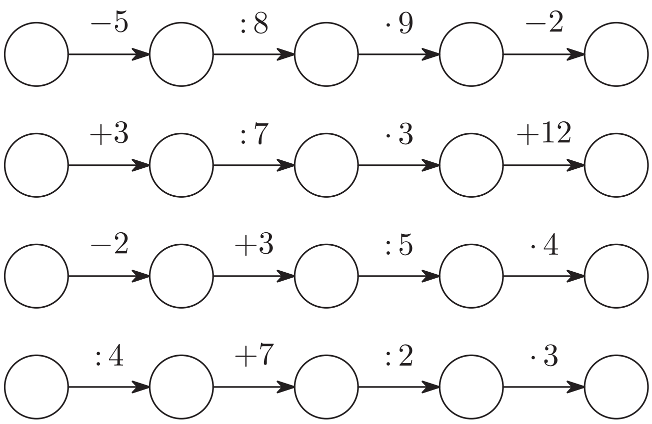
71. ročník Matematické olympiády (2021/22)

# I. kolo kategorie Z5

**Z5–I–1**

Do kruhových políček doplňte přirozená čísla od 1 do 20 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a současně platily všechny uvedené vztahy. (*M. Smitková*)




**Výsledek a poznámky.** Vyplnění je jednoznačné:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 8 | 1 | 9 | 7 |
| 11 | 14 | 2 | 6 | 18 |
| 19 | 17 | 20 | 4 | 16 |
| 12 | 3 | 10 | 5 | 15 |

Je vhodné začít s políčky předcházejícími dělení (větší dělitel — méně možností).

**Z5–I–2**

Trpaslíci natírali krychlové kostky zelenou a bílou barvou tak, že každá stěna byla celá obarvena jednou z těchto dvou barev. Po chvíli si všimli, že některé obarvené kostky vypadají po vhodném pootočení zcela stejně a začali je podle tohoto hlediska třídit do skupin (ve stejné skupině jsou stejně obarvené kostky).

Kolik nejvýše skupin mohli takto dostat? (*I. Jančigová*)

**Výsledek a poznámky.** Nejvýše 10 skupin.

Třídíme podle počtu zelených/bílých stěn a diskutujeme možnosti v jednotlivých případech:

| zelené | bílé | možnosti |
|---|---|---|
| 6 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 2 |
| 2 | 4 | 2 |
| 1 | 5 | 1 |
| 0 | 6 | 1 |

**Z5–I–3**

Adámek přepočítával svoji sbírku duhových kuliček. Zjistil, že je může rozdělit do stejně početných hromádek, a to vícero způsoby. Kdyby je rozdělil do tří hromádek, bylo by v každé hromádce o osm kuliček víc, než by bylo v každé hromádce při dělení do čtyř hromádek.

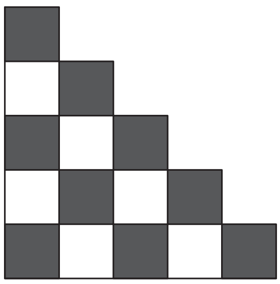
Kolik měl Adámek duhových kuliček? (*E. Semerádová*)

**Výsledek a poznámky.** Adámek měl 96 kuliček:

$$96 = 4 \cdot 24 = 3 \cdot (24 + 8).$$

**Z5–I–4**

Jarda vystřihl z rohu šachovnice následující útvar sestávající z patnácti polí:

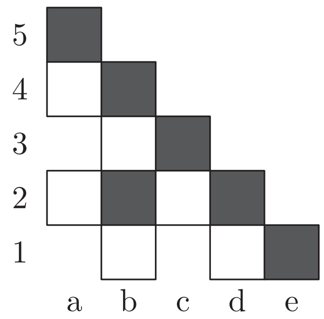


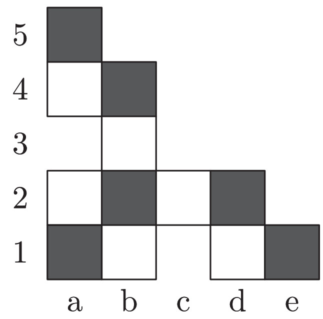
Následně odstřihl několik dalších polí, a to tak, že výsledný útvar neobsahoval díry a nerozpadal se, měl stejný počet černých a bílých polí a měl největší možný obsah. Navíc zjistil, že ze všech možných útvarů s těmito vlastnostmi měl ten jeho největší možný obvod.

Která pole Jarda dodatečně odstřihl? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

**Výsledek a poznámky.** Při značení jako na běžné šachovnici odstřihl buď trojici polí a3, c1, a1, nebo trojici a3, c1, c3.

- 9 černých a 6 bílých polí $\Longrightarrow$ odstřihával 3 černá pole.
- Rozbor možností vzhledem ke zbylým požadavkům dává:



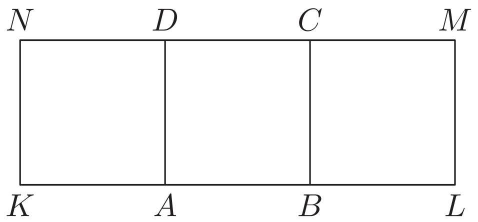




**Z5–I–5**

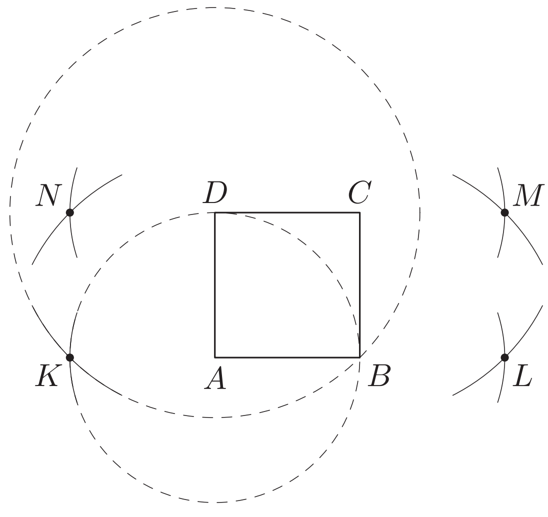
Na papíru byl sestrojen čtverec $ABCD$ se stranou 4 cm. Pavel sestrojil vrcholy obdélníku, který měl třikrát větší obsah než čtverec $ABCD$. Přitom rýsoval pouze kružnice, protože pravítko nenašel.

Jak mohl Pavel postupovat? Popište alespoň jednu konstrukci. (*K. Pazourek*)

**Výsledek a poznámky.** Vztah mezi daným čtvercem a hledaným obdélníkem může vypadat např. takto:




Každý vrchol lze sestrojit pomocí dvou kružnic s poloměry rovnými straně, příp. úhlopříčce čtverce:



**Z5–I–6**

Na parkovišti stála auta a bicykly. Pokud by přijelo jedno další auto, bylo by jich stejně jako bicyklů. Pokud by přijelo pět dalších bicyklů, měly by všechny bicykly stejný počet kol jako všechna auta.

Kolik stálo na parkovišti aut a kolik bicyklů? (*M. Dillingerová*)

**Výsledek a poznámky.** Na parkovišti stálo 6 aut a 7 bicyklů:

$$6 + 1 = 7, \quad 4 \cdot 6 = 2 \cdot (7 + 5).$$