I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Můj jediný syn se narodil, když mi bylo 37 let. To bylo právě 32 let po smrti dědečka, a ten zemřel ve svých 64 letech. Dědeček byl o 12 let starší než babička, brali se v roce 1947, právě když babičce bylo 18 let.

V kterém roce se narodil můj syn?

Poznámka: případné nesrovnalosti související s konkrétními daty narození ignorujte; můžete např. předpokládat, že všichni jmenovaní mají narozeniny ve stejný den.

(*M. Smitková*)

Výsledek a poznámky. Syn se narodil v roce 2013.

věk B	věk D	věk S	rok
18	30		1947
	64	–32	1981
		0	2013

Z6–I–2

Petr měl obdélník šířky 2 cm a neznámé délky. Radka měla obdélník šířky 2 cm, jehož délka byla rovna obvodu Petrova obdélníku. Když k sobě obdélníky přiložili jejich šířkami, získali nový obdélník s obvodem 63 cm.

Určete obsah Petrova obdélníku. (*K. Pazourek*)

Výsledek a poznámky. Petrův obdélník měl obsah 17 cm^2.

Délku Petrova obdélníku ozn. $d \implies$ jeho obvod $= 4 + 2d \implies$ obvod složeného obdélníku $= 6d + 12 = 63 \implies d = 51 : 6 = 17 : 2 \implies$ obsah $= 2d = 17$.

Z6–I–3

Míša zkoumá čísla, která lze vyjádřit jako součet alespoň dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Obzvlášť ji zajímají čísla, která se takto dají vyjádřit vícero způsoby (např. $18 = 5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6$). Číslům, která lze takto vyjádřit alespoň třemi způsoby, říká velkolepá.

Najděte alespoň tři Míšina velkolepá čísla. (*V. Hucíková*)

Výsledek a poznámky. Tři nejmenší velkolepá čísla jsou:

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$
$$21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$
$$27 = 13 + 14 = 8 + 9 + 10 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Pomocný přehled součtů několika po sobě jdoucích čísel:

součty dvou	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23 ...
součty tří	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	...
součty čtyř	10	14	18	22	26	30	34	38	42	...	
součty pěti	15	20	25	30	35	40	45	...			
součty šesti	21	27	33	39	45	...					
...	...										

Velkolepých čísel je neomezené množství (např. všechna, která jsou součtem šesti).

Z6–I–4

Kuba si zapsal čtyřmístné číslo, jehož dvě číslice byly sudé a dvě liché. Pokud by v tomto čísle vyškrtl obě sudé číslice, dostal by číslo čtyřikrát menší, než kdyby v tomtéž čísle vyškrtl obě liché číslice.

Které největší číslo s těmito vlastnostmi si mohl Kuba zapsat? (*M. Petrová*)

Výsledek a poznámky. Kubovo číslo bylo 6817.

- $4 \cdot LL = SS \implies LL < 25 \implies LL \leqq 19.$
- $4 \cdot 19 = 76 \neq SS$, $4 \cdot 17 = 68 = SS$.

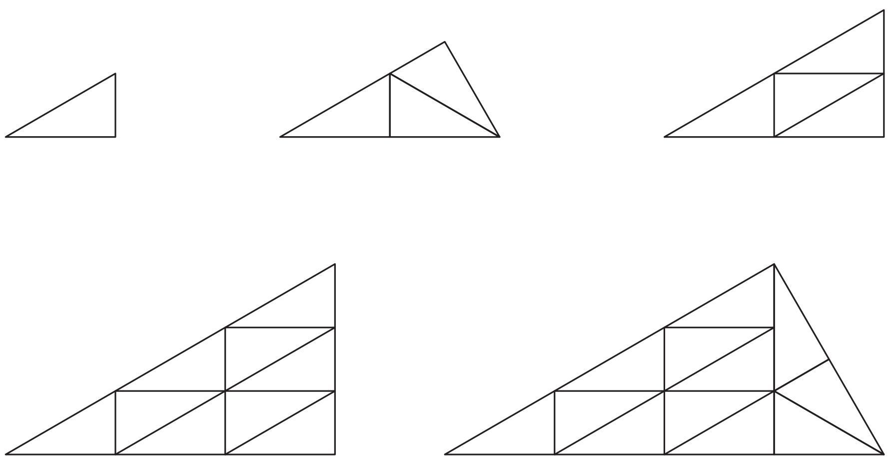
Z6–I–5

Mojmír rozstříhal pravidelný šestiúhelník na 12 shodných dílů. Z těchto dílů (ne nutně ze všech) skládal rozličné pravoúhlé trojúhelníky.

Jak mohly vypadat Mojmírovy složené trojúhelníky? Narýsujte alespoň čtyři možnosti. (*L. Hozová*)

Výsledek a poznámky. Shodné díly po rozstříhání jsou pravoúhlé trojúhelníky se zbylými úhly 30°a 60°.

Pravoúhlé trojúhelníky lze vytvořit pomocí 1, 3, 4, 9 a 12 těchto dílů (přičemž jejich seskupení může vypadat různě):



Z6–I–6

Pětice kamarádů porovnávala, kolik starého železa přivezli do sběru. Průměrně to bylo 55 kg, avšak Ivan přivezl jen 43 kg.

Kolik kg v průměru přivezli bez Ivana? (*L. Hozová*)

Výsledek a poznámky. Bez Ivana v průměru přivezli 58 kg:

$$5 \cdot 55 = 275, \quad 275 - 43 = 232, \quad 232 : 4 = 58.$$

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Žížala spirálová razí nový tunel: nejprve míří 10 cm na sever, poté 11 cm na východ, poté 12 cm na jih, 13 cm na západ atd. (každý úsek je o 1 cm delší než předchozí, směry opakuje podle uvedeného vzoru). Žížala souřadnicová mapuje dílo svojí kolegyně: začátek tunelu označí souřadnicemi $[0, 0]$, první odbočku souřadnicemi $[0, 10]$, druhou odbočku $[11, 10]$ atd.

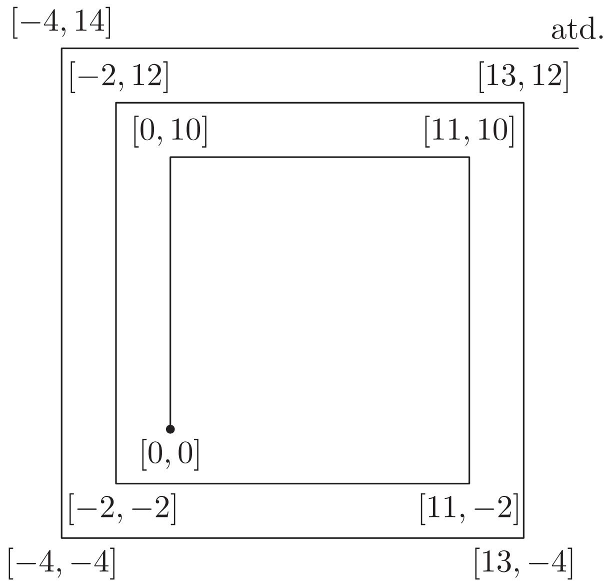
Určete souřadnice konce úseku, který má délku 100 cm. (*I. Jančigová*)

Výsledek a poznámky. Souřadnice onoho konce jsou $[55, -46]$.

- Délky úseků pro jednotlivé směry se opakují takto:

$$S \sim 10 + 4k,\ V \sim 11 + 4k,\ J \sim 12 + 4k,\ Z \sim 13 + 4k,\ \text{kde } k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Úsek dlouhý 100 cm bude pro $k = 22$ v jižním směru.
- Souřadnice konců těchto úseků jsou $[11 + 2k, -2 - 2k]$,
- pro $k = 22$ máme $[55, -46]$.



Z7–I–2

Součin věků všech dětí pana Násobka je 1408. Věk nejmladšího dítěte je roven polovině věku nejstaršího dítěte.

Kolik dětí má pan Násobek a kolik je jim let? (*L. Hozová*)

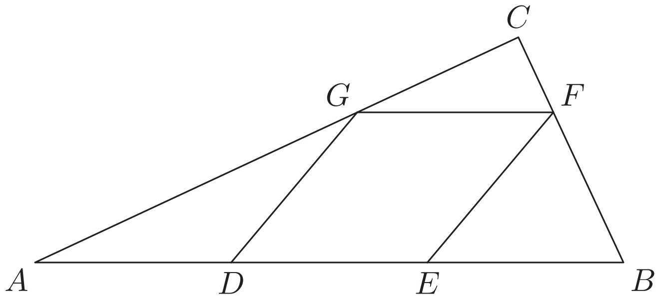
Výsledek a poznámky. Pan Násobek má tři děti staré 8, 11 a 16 let.

$$1408 = 2^7 \cdot 11 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2).$$

Z7–I–3

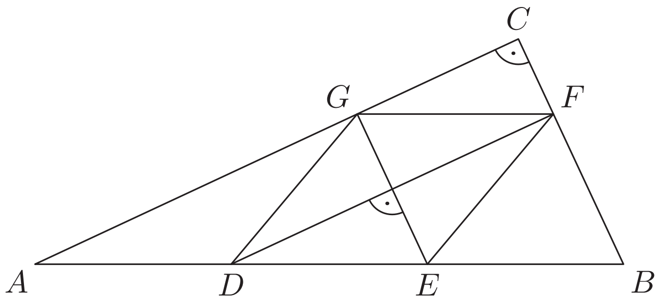
Na stranách trojúhelníku ABC jsou dány body D, E, F, G, viz obrázek. Přitom platí, že čtyřúhelník $DEFG$ je kosočtverec a úsečky AD, DE a EB jsou navzájem shodné.

Určete velikost úhlu ACB. *(I. Jančigová)*



Výsledek a poznámky. Úhel ACB je pravý.

- Trojúhelníky ADG a DEF, resp. EBF a DEG jsou shodné (posunuté) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ $DF \| AC$ a $EG \| BC$,
- úhlopříčky v kosočtverci jsou kolmé $\Longrightarrow$ AC a BC jsou kolmé.



Z7–I–4

Pepík vymyslel následující úlohu:

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U = ?$$

Různá písmena nahrazoval různými číslicemi od 1 do 9 a zjišťoval, co vychází.

a) Jaký největší výsledek mohl Pepík dostat?
b) Mohl dostat výsledek 50? Pokud ano, jak?
c) Mohl dostat výsledek 59? Pokud ano, určete jaké všechny hodnoty mohl mít součet $M + A + M$.

(M. Smitková)

Výsledek a poznámky. M a A jsou zastoupeny čtyřikrát, T dvakrát, ostatní písmena po jednom.

a) Největší možný výsledek je

$$4 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 103.$$

b) Výsledek 50 není možný; nejmenší je

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 57.$$

c) Výsledek 59 je možný:

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 59,$$
$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 59.$$

Součet $M + A + M$ může být

$$2 \cdot 1 + 2 = 4, \quad 2 \cdot 2 + 1 = 5, \quad 2 \cdot 1 + 3 = 5, \quad 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Z7–I–5

Honza vyrazil do světa s rancem buchet. Na prvním rozcestí potkal Dlouhého, Širokého a Bystrozrakého a spravedlivě se s nimi o své buchty rozdělil — každý dostal čtvrtinu buchet. Honza ze svého dílu ujedl dvě buchty a vyrazil dál.

Na druhém rozcestí potkal Jeníčka a Mařenku a i s nimi se spravedlivě rozdělil — každý dostal třetinu zbylých buchet. Honza ze svého dílu snědl zase dvě buchty a se zbylými vyrazil dál.

Na třetím rozcestí potkal Sněhurku. I s tou se spravedlivě rozdělil, takže oba měli polovinu zbylých buchet. Když Honza snědl opět svoje dvě buchty, byl ranec prázdný, a tak se vrátil domů.

S kolika buchtami vyrazil Honza do světa? (*M. Petrová*)

Výsledek a poznámky. Honza vyrazil do světa s 80 buchtami:

rozcestí	zbylo	přinesl
3	0	$2 \cdot 2 = 4$
2	4	$(4 + 2) \cdot 3 = 18$
1	18	$(18 + 2) \cdot 4 = 80$

Z7–I–6

Pan Chrt měl ve svém psím spřežení pět psů — Alíka, Broka, Muka, Rafa a Punťu. Přemýšlel, jak by mohl psy zapřáhnout do řady za sebe tak, aby Alík byl před Punťou.

Kolika způsoby to mohl pan Chrt udělat? (*L. Hozová*)

Výsledek a poznámky. Celkem 60 způsoby.

Třídíme podle rozestupu mezi Alíkem a Punťou:

$$AP{*}{*}{*} \quad {*}AP{*}{*} \quad {*}{*}AP{*} \quad {*}{*}{*}AP$$
$$A{*}P{*}{*} \quad {*}A{*}P{*} \quad {*}{*}A{*}P$$
$$A{*}{*}P{*} \quad {*}A{*}{*}P$$
$$A{*}{*}{*}P$$

Tj. 10 případů, zbylá místa lze vždy obsadit 6 způsoby $\Longrightarrow$ celkem 60 možností.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Věrka ze tří daných číslic sestavovala navzájem různá trojmístná čísla, přičemž u každého čísla použila všechny tři číslice. Takto sestavila všechna možná čísla a když je sečetla, vyšlo jí 1221.

Jaké číslice Věrka použila? Určete pět možností. (*K. Pazourek*)

Výsledek a poznámky. Věrka mohla použít (s opakováním) číslice 1 a 9, nebo 2 a 7, nebo 3 a 5, nebo 4 a 3, nebo 5 a 1.

- Dané číslice nemohly být stejné (měla by jediné číslo), ani navzájem různé (součet odpovídajících šesti čísel by byl násobkem 222).
- Dvě číslice byly stejné a jedna různá:

$$\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = (2a + b) \cdot 111 = 1221 \implies 2a + b = 11,$$

- možné dvojice (a, b) jsou $(1, 9)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$.

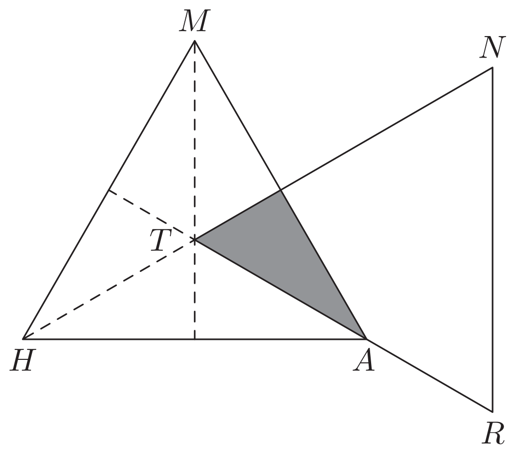
Z8–I–2

TRN a HAM jsou shodné rovnostranné trojúhelníky. Přitom bod T je těžištěm trojúhelníku HAM a bod R leží na polopřímce TA.

Jaký je poměr obsahů částí trojúhelníku TRN, které jsou uvnitř a vně trojúhelníku HAM? (*E. Semerádová*)

Výsledek a poznámky. Poměr obsahů částí je 1 : 5.

Rovnostranné trojúhelníky $\implies$ vnitřní úhly 60°, těžnice jsou výšky atd.



Společná část trojúhelníků odpovídá $\frac{1}{6}$ obsahu každého.

Z8–I–3

Na nově objevené planetě žijí zvířata, která astronauti pojmenovali podle počtu nohou jednonožky, dvounožky, trojnožky atd. (zvířata bez nohou nebyla nalezena). Zvířata s lichým počtem nohou mají dvě hlavy, zvířata se sudým počtem nohou mají jednu hlavu. V jisté prohlubni potkali skupinu takových zvířat a napočítali u nich 18 hlav a 24 nohou.

Kolik zvířat mohlo být v prohlubni? Určete všechny možnosti. (*T. Bárta*)

Výsledek a poznámky. V prohlubni mohlo být 10, 12, nebo 14 zvířat.

Třídíme podle počtů jednohlavých (j) a dvouhlavých (d) tvorů, přičemž $j+2d = 18$, a diskutujeme odpovídající počty nohou (n) tak, aby $n = 24$:

- d liché $\implies$ n liché,
- $j > 10$ $\implies$ $n > 24$,
- mohou nastat následující případy:

hlavy	nohy (příklad)	tvorové
$10 \cdot 1 + 4 \cdot 2$	$10 \cdot 2 + 4 \cdot 1$	14
$6 \cdot 1 + 6 \cdot 2$	$6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3$	12
$2 \cdot 1 + 8 \cdot 2$	$2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3$	10

Z8–I–4

V dané skupině čísel je jedno číslo rovno průměru všech, největší číslo je o 7 větší než průměr, nejmenší je o 7 menší než průměr a většina čísel ze skupiny má podprůměrnou hodnotu.

Jaký nejmenší počet čísel může být ve skupině? (*K. Pazourek*)

Výsledek a poznámky. Ve skupině je nejméně sedm čísel.

Ozn. průměr p, nejmenší $p - 7$, největší $p + 7$.

Většina podprůměrných $\implies$ alespoň sedm čísel:

$$p-7, \quad p-a, \quad p-b, \quad p-c, \quad p, \quad p+d, \quad p+7,$$

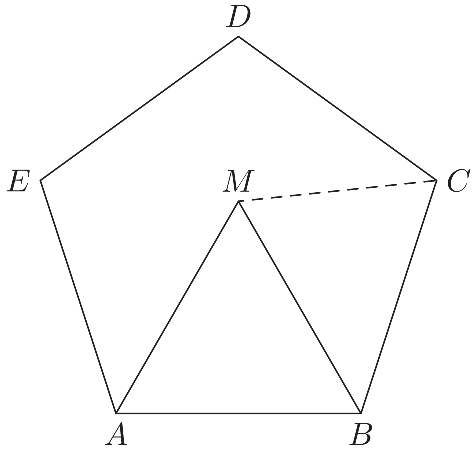
kde $0 < a, b, c, d < 7$ a $a + b + c = d$.

Z8–I–5

V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je obsažen rovnostranný trojúhelník ABM. Určete velikost úhlu BCM. (*L. Hozová*)

Výsledek a poznámky. Úhel BCM má velikost $66°$.

- Vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníku, resp. trojúhelníku je $108°$, resp. $60°$.
- Vnitřní úhel trojúhelníku BCM u vrcholu B je $108° - 60° = 48°$.
- Trojúhelník BCM je rovnoramenný $\implies$ vnitřní úhel u C je $\frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$.



Z8–I–6

Alenka dostala list papíru s následujícím sdělením:

A. Nejvýše jedno z tvrzení A, B, C, D, E je pravdivé.
B.
C. Všechna tvrzení A, B, C, D, E jsou pravdivá.
D.
E. Tvrzení A je pravdivé.

Tvrzení B a D byla napsána neviditelným inkoustem, který lze přečíst jen pod speciální lampou. Než Alenka takovou lampu našla, dokázala rozhodnout, zda může těmto tvrzením důvěřovat.

Určete i vy, která z tvrzení A, B, C, D, E jsou pravdivá a která nepravdivá.

(*I. Jančigová*)

Výsledek a poznámky. Tvrzení A, C, E jsou nepravdivá, tvrzení B, D jsou pravdivá.

- A nebo C nebo E pravda $\implies$ spor s některým z ostatních $\implies$ A a C a E nepravda.
- A nepravda $\implies$ B a D pravda.