II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Na tabuli byl zadán příklad na dělení dvou kladných čísel. David si všiml, že pokud by dělenec zvětšil o dva a dělitel o sedm, podíl by se nezměnil.

O kolik by se musel zvětšit dělitel, aby při zvětšení dělence o tři vyšel opět stejný podíl? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pokud původní dělenec označíme n a původní dělitel t, potom podmínka ze zadání znamená

$$\frac{n}{t} = \frac{n+2}{t+7}. \tag{1}$$

Úpravami založenými na porovnávání zlomků dostáváme:

$$\begin{aligned} nt + 7n &= nt + 2t, \\ \frac{n}{t} &= \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Otázka v zadání se ptá, pro které číslo z platí

$$\frac{2}{7} = \frac{2+3}{7+z}. \tag{2}$$

Úpravami dostáváme následující odpověď:

$$\begin{aligned} 14 + 2z &= 14 + 21, \\ 2z &= 21, \\ z &= \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Dělitel se musí zvětšit o $\frac{21}{2} = 10{,}5$.

Hodnocení. 2 body za pomocné úvahy a úpravy; 2 body za výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámky. I bez uvedených úprav lze úvahou přijít na to, že rovnost (1) platí právě pro dvojice tvaru $n = 2k$ a $t = 7k$, kde k je libovolné kladné číslo. Tato libovůle nehraje v dalším žádnou roli (k se vykrátí).

Místo rovnosti (2) lze obecně uvažovat

$$\frac{n}{t} = \frac{n+3}{t+z}$$

a obdobným způsobem jako výše odvodit, že $\frac{n}{t} = \frac{3}{z}$. To spolu s předchozí podmínkou $\frac{n}{t} = \frac{2}{7}$ dává $\frac{3}{z} = \frac{2}{7}$, odkud vyplývá $z = \frac{21}{2}$.

Z8–II–2

Po oslavě odložila maminka poslední kousek dortu pro tetu. Když teta konečně dorazila, našla místo pochoutky jen špinavý talíř. Maminka zjišťovala, co se stalo, a od svých čtyř dětí dostala následující odpovědi:

Adam: „Snědla to Blanka nebo Cyril.“
Blanka: „Snědl to Adam nebo Cyril.“
Cyril: „Nikdo z nás nelže.“
Dana: „Všichni kromě mě lžou.“

Nakonec se ukázalo, že dort dojedlo jedno z dětí a že toto dítě mluvilo pravdu.

Zjistěte, které dítě to bylo. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Dítě, které dort dojedlo, mluvilo pravdu.

Dort nemohli dojíst ani Adam, ani Blanka — to by pak nemohli tvrdit, že to udělal někdo jiný.

Kdyby dort dojedl Cyril, potom by podle jeho vyjádření mluvili pravdu všichni, tedy i Dana. Dana ale tvrdí, že Cyril (stejně jako Adam a Blanka) lže, což je neslučitelné — Cyril nemůže současně lhát a mluvit pravdu.

Dort tedy dojedla Dana — podle jejího vyjádření ostatní děti lhaly, a to vskutku nevede k žádnému rozporu jako v předchozích případech.

Hodnocení. 2 body za vyloučení některých možností (vedoucích ke sporu); 2 body za podezření Dany (žádný spor); 2 body za úplnost a kvalitu komentáře.

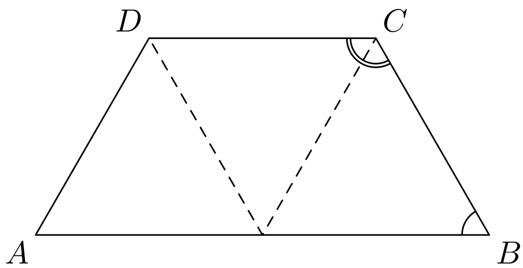
Poznámka. Uvědomte si, že pracujeme pouze s implikací „dítě snědlo dort, tedy mluvilo pravdu“. Tu lze nahradit např. „dítě lhalo, tedy nesnědlo dort“, zatímco úvahy typu „dítě nesnědlo dort, tedy lhalo“ nejsou správné.

Z8–II–3

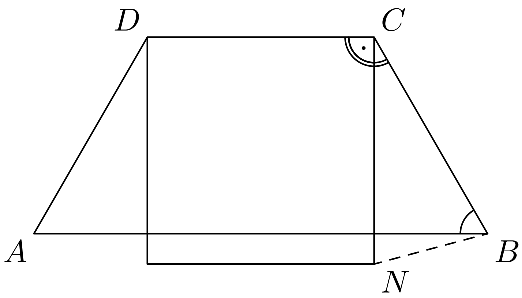
Petr narýsoval lichoběžník $ABCD$, jehož základna AB byla dvakrát delší než základna CD a strany AD, DC, CB byly navzájem shodné. Poté dorýsoval čtverec, který měl jednu stranu společnou s kratší základnou lichoběžníku. Nový vrchol čtverce, který byl blíž k B než k A, označil N.

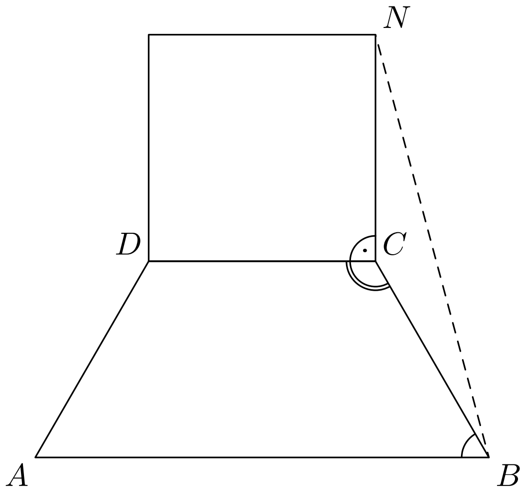
Jaká mohla být velikost úhlu ABN? Určete všechny možnosti. (*A. Bohiniková*)

Možné řešení. Podle předpokladů ze zadání lze lichoběžník $ABCD$ rozložit na tři rovnostranné trojúhelníky. Tedy vnitřní úhel u vrcholu B je $60°$a u vrcholu C je $120°$.



Podle toho, ve které polorovině omezené přímkou CD byly zbylé vrcholy Petrova čtverce, rozlišujeme dva případy:





V obou případech je trojúhelník BCN rovnoramenný, se shodnými rameny BC, CN a shodnými úhly u základny BN. Relevantní úhly vychází následovně:

- V prvním případě je úhel BCN roven $30°(120 - 90 = 30)$, tedy úhel CBN je $75°(30 + 2 \cdot 75 = 180)$ a úhel ABN je $15°(75 - 60 = 15)$.
- Ve druhém případě je úhel BCN roven $150°(360 - 120 - 90 = 150)$, tedy úhel CBN je $15°(150 + 2 \cdot 15 = 180)$ a úhel ABN je $75°(15 + 60 = 75)$.

  Velikost úhlu ABN mohla být buď $15°$, nebo $75°$.

Hodnocení. 1 bod za vnitřní úhly lichoběžníku $ABCD$; 2 body za další postřehy a mezivýsledky; 3 body za dořešení a kvalitu komentáře. Řešení zahrnující jen jednu možnost hodnoťte nejvýše 4 body.