72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Úlohy klauzurní části I. kola kategorie A

1. V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\lfloor 3x+5y+7z \rfloor &= 7z,\\ \lfloor 3y+5z+7x \rfloor &= 7x,\\ \lfloor 3z+5x+7y \rfloor &= 7y.\end{aligned}$$

2. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existují po řadě body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokažte, že $CD \parallel PQ$.

3. Dokažte tvrzení: Pokud vybereme libovolné čtyři dělitele čísla 720, pak jeden z nich je dělitelem součinu zbývajících tří.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 6. prosince 2022

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned}\lfloor 3x + 5y + 7z \rfloor &= 7z,\\ \lfloor 3y + 5z + 7x \rfloor &= 7x,\\ \lfloor 3z + 5x + 7y \rfloor &= 7y.\end{aligned}$$

(Tomáš Bárta)

Řešení. První rovnice zadané soustavy je splněna, právě když jsou splněny následující dvě podmínky:

▷ číslo $7z$ je celé,

▷ platí $7z \leqq 3x + 5y + 7z < 7z + 1$ neboli $3x + 5y \in \langle 0, 1)$.

Podobně druhá a třetí rovnice jsou splněny, právě když čísla $7x$ a $7y$ jsou celá a platí $3y + 5z, 3z + 5x \in \langle 0, 1)$.

Uvažme nyní libovolnou trojici podle zadání nezáporných čísel (x, y, z), která je řešením úlohy. Z nerovností $z \geqq 0$ a $3z + 5x < 1$ plyne $5x < 1$, odkud $7x < \frac{7}{5} < 2$. To znamená, že *nezáporné celé* číslo $7x$ se rovná jednomu z čísel 0 nebo 1, tj. platí $x \in \{0, \frac{1}{7}\}$. Podobně také $y, z \in \{0, \frac{1}{7}\}$.

V tuto chvíli máme už jen $2^3 = 8$ trojic (x, y, z), které jsou adepty na řešení úlohy, takže bychom je mohli jednotlivě testovat. Tomu se zcela vyhneme, když si všimneme, že pokud by některá dvě z čísel x, y, z byla rovna $\frac{1}{7}$, jeden z výrazů $3x+5y$, $3y+5z$, $3z+5x$ by měl hodnotu $\frac{8}{7}$, která je větší než 1, a to je spor. Víme tedy, že *nejvýše jedno* z čísel x, y, z je rovno $\frac{1}{7}$ a ostatní jsou rovna nule. Pak ale každý ze tří (nezáporných) výrazů $3x + 5y$, $3y + 5z$, $3z + 5x$ je nejvýše roven $\frac{5}{7}$, takže podmínky, které jsme uvedli v úvodu řešení jako ekvivalence zadaných rovnic, jsou splněny, tudíž všechny takové trojice jsou řešeními.

Závěr. Úloha má právě 4 řešení

$$(x, y, z) \in \left\{(0, 0, 0), (\tfrac{1}{7}, 0, 0), (0, \tfrac{1}{7}, 0), (0, 0, \tfrac{1}{7})\right\}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A0. Čísla $7x$, $7y$, $7z$ jsou celá: 0 bodů.

A1. Správná odpověď (i bez důkazu a zkoušky): 1 bod.

A2. $3x + 5y, 3y + 5z, 3z + 5x < 1$: 1 bod za jednu či dvě nerovnosti, 2 body za všechny tři nerovnosti.

A3. $5x, 5y, 5z < 1$ (nebo ve formě $x, y, z < \frac{1}{5}$): 1 bod jen za všechny tři nerovnosti.

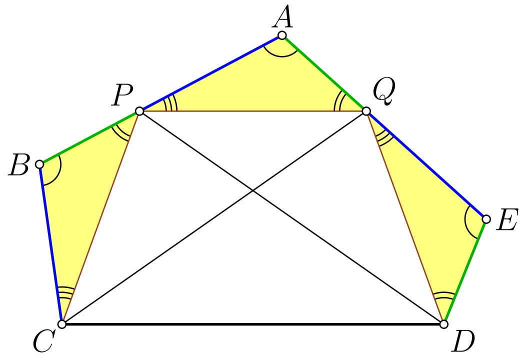
B1. Převedení úlohy na otestování určitého počtu popsaných trojic (x, y, z): 4 body v případě jednociferného počtu, 3 body v případě dvojciferného počtu.

B2. Úplné otestování všech trojic z B1: 1 bod v případě jednociferného počtu, 2 body v případě dvojciferného počtu.

Celkem pak udělte $\mathrm{A1} + \max(\mathrm{A2} + \mathrm{A3}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2})$ bodů.

2. *V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existují po řadě body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokažte, že $CD \parallel PQ$.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Jelikož podle zadání $|BC| = |AP| = |EQ|$, $|BP| = |AQ| = |ED|$ a $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle QED|$, jsou podle věty *sus* trojúhelníky PBC, QAP a DEQ navzájem shodné.



Odtud plyne $|CP| = |PQ| = |QD|$ a také

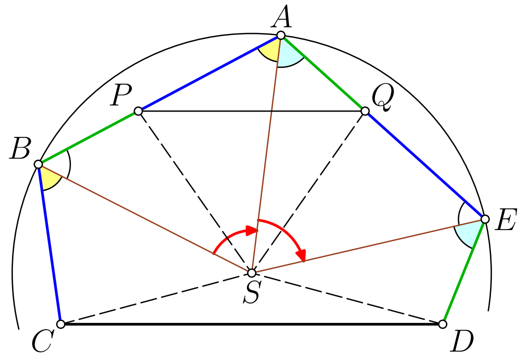
$$|\sphericalangle CPQ| = 180° - |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle APQ| = 180° - |\sphericalangle PQA| - |\sphericalangle EQD| = |\sphericalangle PQD|.$$

To znamená, že podle věty *sus* jsou také shodné rovnoramenné trojúhelníky CPQ a DQP. Z toho vyplývá také shodnost jejich výšek z vrcholů C a D na společnou protilehlou stranu PQ, a tedy $CD \parallel PQ$.

POZNÁMKA. Poznatek, že trojúhelníky CPQ a DQP jsou rovnoramenné a shodné, lze získat rovněž úvahou, že jde o dvě (výše nevybarvené) odpovídající si části shodných čtyřúhelníků $QABC$ a $DEAP$. Shodnost těchto čtyřúhelníků je důsledkem toho, že podle věty *sus* platí shodnosti $\triangle QAB \cong \triangle DEA$ a $\triangle ABC \cong \triangle EAP$.*

V následujícím řešení upřesníme, že shodné zobrazení čtyřúhelníku $QABC$ na čtyřúhelník $DEAP$ je jisté otočení. Díky tomu i nové řešení ukončíme jinak (bez užití výšek shodných trojúhelníků).

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme S střed kružnice, která prochází vrcholy B, A, E. V důsledku zadání bodů P a Q platí $|BA| = |AE|$. Proto v otočení se středem S o orientovaný úhel BSA platí $B \to A \to E$, a tedy i $P \to Q$.



* Dalo by se říci, že jsme užili „větu *susus*“ o shodnosti dvou konvexních čtyřúhelníků.

Dalším důsledkem vztahů $B \to A \to E$ je shodnost čtyř úhlů SBA, SAB, SAE a SEA. Odtud plyne, že osami shodných úhlů CBA, BAE a AED jsou po řadě polopřímky BS, AS a ES. V našem otočení je tak obrazem orientovaného úhlu CBS orientovaný úhel BAS, tudíž s ohledem na $|BC| = |AP|$ platí $C \to P$. Totéž platí o orientovaných úhlech SAE a SED, rovnost $|AQ| = |ED|$ pak vede ke $Q \to D$. Dohromady máme $C \to P \to Q \to D$, odkud plyne, že úsečky CD a PQ mají společnou osu – osa úsečky CD totiž půlí úhel CSD, a tedy půlí i úhel PSQ, a proto je rovněž osou úsečky PQ. Díky společné ose tak jsou úsečky CD a PQ rovnoběžné.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné výsledky následovně:

A0. Hypotéza o shodnosti trojúhelníků CPQ a DQP (bez důkazu): 0 bodů.
A1. Shodnost tří trojúhelníků DEQ, QAP a PBC nebo shodnost dvou čtyřúhelníků $CBAQ$ a $PAED$: 2 body.
A2. Shodnost trojúhelníků CPQ a DQP: 2 body, z toho 1 bod za rovnosti $|DQ| = |QP| = |PC|$ a 1 bod za rovnost $|\sphericalangle DQP| = |\sphericalangle QPC|$.
B1. Existence otočení, ve kterém $B \to A \to E$ a $P \to Q$: 2 body.
B2. Vztahy $C \to P$ a $Q \to D$: 3 body (2 body za pouze jeden vztah).

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1} + \mathrm{A2}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2})$ bodů.

3. *Dokažte tvrzení: Pokud vybereme libovolné čtyři dělitele čísla* 720*, pak jeden z nich je dělitelem součinu zbývajících tří.* (Jaromír Šimša)

Řešení. S ohledem na rozklad $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ má číslo 720 právě tři prvočinitele 2, 3 a 5, takže každý jeho dělitel je tvaru $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, kde α, β, γ jsou nezáporná celá čísla splňující nerovnosti $\alpha \leqq 4$, $\beta \leqq 2$ a $\gamma \leqq 1$ (které dále potřebovat nebudeme). Jistě i součin libovolných tří dělitelů čísla 720 je tvaru $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ s nezápornými celými čísly α, β a γ. Ze dvou čísel takového tvaru je první dělitelem druhého, právě když hodnoty α, β, γ pro první číslo nepřevyšují stejnojmenné hodnoty pro druhé číslo.

Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Připusťme, že někteří čtyři dělitelé čísla 720 mají tu vlastnost, že žádný z nich nedělí součin tří ostatních dělitelů. Pak každý z nich ve svém rozkladu musí mít některé z prvočísel 2, 3, 5 ve vyšší mocnině, než ji má ve svém rozkladu součin ostatních tří dělitelů, a tedy i kterýkoli z nich. Dělitelé však jsou čtyři a zastoupená prvočísla jen tři, a to je zřejmý spor.

Jiné řešení. Přímý důkaz tvrzení úlohy vyložíme jednou z několika možných obměn (viz poznámku za řešením). Stejně jako v prvním řešení využijeme vše, co je obsaženo v jeho prvním odstavci.

Zvolme tedy libovolné čtyři dělitele čísla 720. Bude výhodné dále mluvit o prvočiniteli p daného dělitele i v případě, kdy v jeho rozkladu je p „zastoupeno“ jako činitel p^0. Nejprve ze čtyř dělitelů vybereme tři, kteří obsahují prvočinitele 2 v mocninách, jež nepřevyšují tuto mocninu u čtvrtého dělitele (je-li možností takového výběru více, zvolíme jednu z nich). Z těchto tří dělitelů pak vybereme dva, kteří obsahují prvočinitele 3 v mocninách, jež nepřevyšují tuto mocninu u třetího dělitele. Z těchto dvou dělitelů nakonec vybereme ten, který obsahuje prvočinitele 5 v mocnině nepřevyšující tuto mocninu u druhého dělitele. V naposledy vybraném děliteli je pak každé $p \in \{2, 3, 5\}$ zastoupeno v mocnině, jež nepřevyšuje aspoň jednu z mocnin p zastoupených v ostatních třech dělitelích. To zaručuje, že naposledy vybraný dělitel má vlastnost požadovanou zadáním úlohy.

Poznámka. Popišme jednu z možných obměn podaného výkladu. Z libovolně zvolených čtyř dělitelů nejprve přeškrtneme toho, který obsahuje prvočíslo 2 v nejvyšší mocnině (je-li adeptů na přeškrtnutí více, přeškrtneme jen jednoho – kteréhokoli z nich).* Přeškrtnutý dělitel můžeme ponechat „ve hře“ a zopakovat proceduru škrtání jednoho dělitele ještě dvakrát: jednou pro prvočíslo 3 a podruhé pro prvočíslo 5. Někteří ze čtyř dělitelů tak mohou být přeškrtnuti i vícekrát; protože jsme však škrtali pouze třikrát, aspoň jeden dělitel zůstane nepřeškrtnut, má tudíž zřejmě požadovanou vlastnost.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné závěry následovně:

A1. Dělitelé čísla 720 jsou tvaru $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ (stačí vyjmenovat všechny tři možné prvočinitele): 1 bod, případně 2 body, jen když jsou uvedeny všechny poznatky z úvodního odstavce prvního řešení a přitom za A2 není udělen žádný bod.

A2. Úvahy o porovnání stejnojmenných stupňů α, β, γ (tj. počtů výskytů jednotlivých prvočísel 2, 3, 5) pro dané čtyři dělitele: 0–4 body podle stupně přiblížení k tvrzení úlohy.

Celkem pak udělte A1 + A2 bodů.

* Tři nepřeškrtnutí dělitelé jsou vlastně trojicí z prvního výběru původního postupu.