72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Úlohy klauzurní části I. kola kategorie C

1. Uvažujme 72 zlomků

$$\frac{0\cdot 0}{72},\ \frac{1\cdot 1}{71},\ \frac{2\cdot 2}{70},\ \frac{3\cdot 3}{69},\dots,\ \frac{71\cdot 71}{1}.$$

Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty?

2. V daném pravoúhlém trojúhelníku ABC označme K střed přepony AB a L střed kratší odvěsny AC. Kružnice s průměrem BC protne úsečku KL v bodě P. Dokažte, že úhly PAC a PBC jsou shodné.

3. Na tabuli byla napsána čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše 7 krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá?

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 24. ledna 2023

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Uvažujme 72 zlomků*

$$\frac{0\cdot 0}{72},\ \frac{1\cdot 1}{71},\ \frac{2\cdot 2}{70},\ \frac{3\cdot 3}{69},\ldots,\ \frac{71\cdot 71}{1}.$$

Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty? (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že celočíselné hodnoty nabývá 18 z uvažovaných zlomků.

Označíme-li d jmenovatel jednoho ze zlomků, pak jeho čitatel je roven $(72-d)^2$. Zlomek pak pro každé uvažované $d \in \{1, 2, \ldots, 72\}$ můžeme upravit následovně:

$$\frac{(72-d)^2}{d} = \frac{72^2 - 2\cdot 72\cdot d + d^2}{d} = \frac{72^2}{d} - 2\cdot 72 + d.$$

Taková hodnota je celé číslo, právě když číslo d je dělitelem čísla 72^2. Zbývá tak ukázat, že číslo 72^2 má celkem 18 kladných dělitelů rovných nejvýše 72. Provedeme to dvěma různými způsoby.

První způsob. Číslo $72^2 = (8\cdot 9)^2 = 2^6\cdot 3^4$ má celkem $(6+1)\cdot(4+1) = 35$ kladných dělitelů, neboť to jsou právě čísla tvaru $2^a\cdot 3^b$ pro libovolné $a \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ a libovolné $b \in \{0, 1, \ldots, 4\}$. Všechna tato čísla, která přitom jsou nejvýše rovna 72, vypíšeme. Uděláme to systematicky, a to tak,* že do prvního řádku zapíšeme čísla s rozkladem 2^a (až do $2^6 = 64 < 72$), do druhého čísla s rozkladem $2^a\cdot 3$, do třetího čísla s rozkladem $2^a\cdot 3^2$ a do čtvrtého čísla s rozkladem $2^a\cdot 3^3$ (vypisovat poslední pátý řádek s čísly $2^a\cdot 3^4$ je zbytečné, neboť kvůli nerovnosti $3^4 = 81 > 72$ by byl prázdný):

a	0	1	2	3	4	5	6	
2^a	1	2	4	8	16	32	64	
$2^a\cdot 3$	3	6	12	24	48			$(96 > 72)$
$2^a\cdot 3^2$	9	18	36	72				$(144 > 72)$
$2^a\cdot 3^3$	27	54						$(108 > 72)$

Vidíme, že hledaný počet dělitelů je $7+5+4+2$, tj. skutečně 18.

Druhý způsob. Tentokrát dělitele čísla 72^2, které nepřevyšují 72, nebudeme vypisovat. Využijeme přitom pouze výše uvedený poznatek, že všech dělitelů čísla 72^2 je 35. Jedním z těchto dělitelů je číslo 72; je-li d libovolný z dělitelů menších než 72, jiný dělitel d' určený rovností $d\cdot d' = 72^2$ splňuje zřejmě nerovnost $d' > 72$. Naopak každému děliteli $d' > 72$ bude z rovnosti $d\cdot d' = 72^2$ odpovídat dělitel $d < 72$. Vidíme, že dělitelů čísla 72^2 menších než 72 je právě tolik, kolik jich je větších než 72. Dohromady jich je $35 - 1 = 34$, takže dělitelů menších než 72 je $34 : 2 = 17$, a proto dělitelů rovných nejvýše 72 je skutečně $17 + 1 = 18$, jak jsme slíbili ukázat.

POZNÁMKA. K hledanému počtu 18 dělitelů lze dojít i postupným testováním, která z čísel od 1 do 72 jsou děliteli čísla 72^2. K tomu se samozřejmě vyplatí mít informaci o tom, že 72^2 má rozklad $2^6\cdot 3^4$. Testování lze výrazně urychlit tak, že nejprve z vypsané řady čísel od 1 do 72 postupně vyškrtneme jako nevyhovující všechny násobky prvočísel 5, 7 a 11, případně i několika dalších, nebo dokonce násobky všech prvočísel větších než 3

* Zvolená metoda vychází z toho, že všechny dělitele čísla 72^2 lze zapsat do tabulky s 5 řádky a 7 sloupci.

a menších než 72. V posledním případě už nám zůstanou nevyškrtnuta pouze čísla tvaru 2^a3^b, přitom díky nerovnostem $2^7 > 72$ a $3^4 > 72$ to všechno budou skutečně dělitelé čísla 72^2.

Dodejme, že namísto uvedeného testování jmenovatelů zlomků ze zadání lze testovat přímo celočíselnost samotných zlomků. Tento náročný postup je spíše úkolem pro počítač, proto ho do našeho bodovacího schématu nezahrneme; o jeho hodnocení se zmíníme v závěrečném odstavci pokynů.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky nebo zjištění následovně:

A1. Zápis zlomků ve tvaru $(72-d)^2/d$: 1 bod.
A2. Zlomek s jmenovatelem d vyhovuje zadání, právě když je d dělitelem čísla 72^2: 2 body.
B1. Každý dělitel čísla 72^2 je číslo tvaru 2^a3^b, kde $0 \leqq a \leqq 6$ a $0 \leqq b \leqq 4$: 1 bod.
B2. Určení počtu 18 těch čísel z B1, která nepřevyšují 72, jejich výpisem: 3 body.
C1. Určení počtu 35 všech dělitelů čísla 72^2: 1 bod.
C2. Rozdělení všech dělitelů čísla 72^2 různých od 72 do dvojic (d, d') s vlastností $d \cdot d' = 72^2$: 2 body.
C3. Určení hledané odpovědi na základě C1 a C2: 1 bod.
D1. Určení hledané odpovědi testováním, která čísla od 1 do 72 jsou děliteli čísla 72^2: 4 body, přitom 1 bod strhněte za každé chybně otestované číslo či za chybné spočítání prvků správně určeného souboru všech vyhovujících čísel. (Průběh celého testování musí být zaznamenán, aby bylo zřejmá jeho úplnost, jinak za D1 udělte nejvýše 1 bod.)

Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) + \max(\mathrm{B1}+\mathrm{B2}, \mathrm{C1}+\mathrm{C2}+\mathrm{C3}, \mathrm{D1})$ bodů. Správné postupy s drobnými numerickými chybami nebo opomenutími (např. dělitelů 1 nebo 72 čísla 72^2) oceňte 4 nebo 5 body.

Pokud řešitel testuje přímo zlomky ze zadání, z 6 bodů strhněte 1 bod za každý chybně otestovaný nebo opomenutý zlomek či za chybné spočítání prvků správně určeného souboru všech vyhovujících zlomků; jestliže ze zápisu postupu není zřejmé, že byly otestovány všechny zlomky, udělte nejvýše 1–2 body.

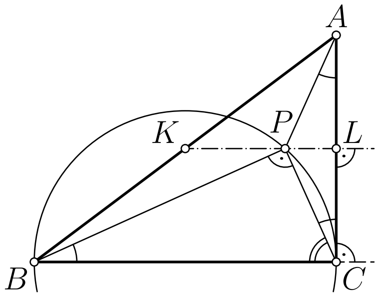
2. *V daném pravoúhlém trojúhelníku ABC označme K střed přepony AB a L střed kratší odvěsny AC. Kružnice s průměrem BC protne úsečku KL v bodě P. Dokažte, že úhly PAC a PBC jsou shodné.* (Jaromír Šimša)

Řešení. Protože KL je střední příčka trojúhelníku ABC, platí $KL \parallel BC$. Díky předpokladu $BC \perp AC$ to znamená, že rovněž $KL \perp AC$. Přímka KL tak je osou úsečky AC, neboť je k ní kolmá a prochází jejím středem L. Proto zadaný průsečík P splňuje rovnost $|PA| = |PC|$. Z rovnoramenného trojúhelníku ACP se základnou AC proto s přihlédnutím k pravému úhlu BCA plyne

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle BCP| = 90^\circ - |\sphericalangle BCP|.$$

Dále si všimneme, že podle Thaletovy věty má trojúhelník BCP pravý úhel u vrcholu P, tudíž pro jeho úhly u vrcholů B a C platí $|\sphericalangle PBC| = 90^\circ - |\sphericalangle BCP|$.

Dohromady dostáváme, že úhly PAC a PBC mají tutéž velikost, a tím je jejich shodnost dokázána.



Poznámka. Obě části postupu lze vyložit i v opačném pořadí: nejprve pro velikost druhého úhlu PBC získat z pravoúhlého trojúhelníku BCP vyjádření

$$|\sphericalangle PBC| = 90^\circ - |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle PCA|$$

a pak dokázat shodnost prvního úhlu PAC s úhlem PCA úvahou o ose úsečky AC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky nebo výsledky následovně:

A1. Přímka KL je osou úsečky AC: 2 body se zdůvodněním, 1 bod bez zdůvodnění.
A2. Odvození rovnosti $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA|$: 3 body. Chybí-li přitom zdůvodnění užitého poznatku A1, udělte jen 2 body.
A3. Rovnost $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ$ z Thaletovy věty: 1 bod.
A4. Odvození rovnosti $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCA|$: 3 body.

Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) + \max(\mathrm{A3}, \mathrm{A4})$ bodů.

3. *Na tabuli byla napsána čísla* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše* 7 *krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá?*

(Radek Horenský)

Řešení. Smažeme-li (v jednom kroku) dvě čísla sudá, budou nahrazena jedním sudým číslem. Smažeme-li dvě čísla lichá, budou rovněž nahrazena sudým číslem. Smažeme-li však jedno číslo sudé a jedno číslo liché, budou nahrazena lichým číslem. Proto se celkový počet čísel po každém kroku zmenší o 1 jedním ze dvou způsobů:

(i) Počet sudých čísel se zmenší o 1 a počet lichých čísel se nezmění.
(ii) Počet sudých čísel se zvětší o 1 a počet lichých čísel se zmenší o 2.

Nejprve odpovíme záporně na část b) zadané otázky. Protože na začátku je na tabuli pět lichých čísel, zůstane jejich počet podle (i) a (ii) vždy lichý, takže se nikdy nebude rovnat nule.* Případ b) je tak vyloučen.

K tomu, abychom ukázali, že odpověď na část a) je kladná, stačí uvést jeden příklad řady nejvýše 7 kroků, po kterých zůstane na tabuli jen několik stejných lichých čísel. Předtím však pro zajímavost vysvětlíme, že musí jít o řadu 4 nebo 6 kroků.**

Všimneme si, že na začátku jsou na tabuli 4 sudá čísla. K smazání všech sudých čísel tak potřebujeme aspoň 4 kroky. Navíc však počet sudých čísel po každém kroku změní podle (i) a (ii) svou paritu, takže k jejich počtu rovnému 0 může dojít jen po sudém počtu kroků. Z počtů od 4 do 7 tak připadají v úvahu pouze počty 4 a 6.

Nyní už uvedeme slíbené příklady. Po 4 krocích zůstane na tabuli pět jedniček, využijeme-li při nahrazováních rovnosti

$$(9-8)^2 = (7-6)^2 = (5-4)^2 = (3-2)^2 = 1.$$

Prodloužením tohoto postupu o 2 kroky, kdy nejprve dvě z pěti jedniček nahradíme nulou a pak dvojici jedničky a nuly opět jedničkou, zůstanou po 6 krocích na tabuli právě 3 jedničky.

Způsobů, jak získat tři stejná lichá čísla po 6 krocích, je více. Tak například pro získání tří devítek lze postupovat takto:

$$\begin{aligned}
(1,\mathbf{2},3,\mathbf{4},5,6,7,8,9) &\mapsto (1,3,4,5,6,7,8,9)\\
(\mathbf{1},\mathbf{3},4,5,6,7,8,9) &\mapsto (4,4,5,6,7,8,9)\\
(4,4,\mathbf{5},\mathbf{6},7,8,9) &\mapsto (1,4,4,7,8,9)\\
(1,4,4,\mathbf{7},\mathbf{8},9) &\mapsto (1,1,4,4,9)\\
(1,\mathbf{1},\mathbf{4},4,9) &\mapsto (1,4,9,9)\\
(\mathbf{1},\mathbf{4},9,9) &\mapsto (9,9,9)
\end{aligned}$$

Závěr. Mohla to být čísla lichá, ne však čísla sudá.

* Jednodušeji lze konstatovat, že počet lichých čísel bude vždy 5, 3 nebo 1.
** Zdůrazněme, že toto vysvětlení není nutnou součástí řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Možné změny počtu lichých čísel na tabuli po každém kroku: 1 bod.
A2. Pozorování, že počet lichých čísel na tabuli má stálou paritu: 2 body.
A3. Zdůvodnění, že nikdy na tabuli nezůstanou jen sudá čísla (stačí uvést, že počet lichých čísel bude vždy 5, 3 nebo 1): 3 body.
B1. Příklad nejvýše 7 kroků, po nichž zůstanou na tabuli stejná čísla: 3 body.

Celkově pak udělte $\max(A1, A2, A3) + B1$ bodů.