72. ročník Matematické olympiády (2022/23)

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Na louce bylo 45 ovcí a několik pastýřů. Po odchodu poloviny pastýřů a třetiny ovcí měli zbývající pastýři a ovce dohromady 126 nohou. Přitom všechny ovce a všichni pastýři měli obvyklé počty nohou.

Kolik pastýřů bylo původně na louce? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik ovcí bylo po odchodu na louce?

Možné řešení. Po odchodu třetiny ovcí jich na louce zůstaly dvě třetiny z původního počtu, tedy 30 ovcí ($\frac{2}{3} \cdot 45 = 30$). Ty mají celkem 120 nohou ($30 \cdot 4 = 120$).

Pastýři, kteří na louce zůstali, měli celkem 6 nohou ($126 - 120 = 6$), tedy zůstali 3 pastýři ($6 : 2 = 3$). Pastýřů odešla polovina, tedy původně jich bylo 6 ($3 \cdot 2 = 6$).

Z5–I–2

Marta hraje hru, ve které hádá pětimístné číslo tvořené navzájem různými číslicemi. Průběh prvních tří kol vypadá takto:

1. kolo	2	6	1	3	8
2. kolo	4	1	9	6	2
3. kolo	8	1	0	2	5

Barva políčka prozrazuje něco o číslici v něm obsažené:

- zelené políčko znamená, že číslice se v hádaném čísle vyskytuje, a to na tomtéž místě,
- žluté políčko znamená, že číslice se v hádaném čísle vyskytuje, ale na jiném místě,
- šedé políčko znamená, že číslice se v hádaném čísle nevyskytuje.

Vysvětlete, zda Marta může, či nemůže číslo s jistotou uhodnout v následujícím kole? (*J. Tkadlec*)

Nápověda. Které číslice se mohou v čísle vyskytovat?

Možné řešení. V hádaném čísle se nevyskytují číslice ze šedých políček, tj. 0, 3, 5, 6, 9. Zbývá právě pět číslic — 1, 2, 4, 7, 8 — jejichž pořadí se postupně pokusíme určit podle zbylých políček. V každém kroku zohledňujeme všechny předchozí závěry:

- Číslice 1 může být jedině na druhém místě.
- Číslice 2 nemůže být ani na druhém, ani na prvním, čtvrtém a pátém místě; může být jedině na třetím místě.
- Číslice 8 nemůže být ani na druhém a třetím, ani na prvním a pátém místě; může být jedině na čtvrtém místě.

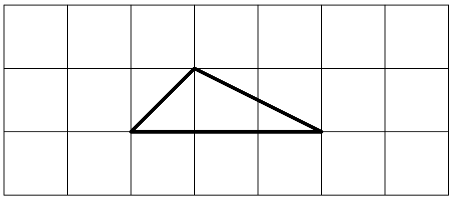
- Číslice 4 nemůže být ani na druhém, třetím a čtvrtém, ani na prvním místě; může být jedině na pátém místě.
- Číslice 7 nemůže být na druhém, třetím, čtvrtém a pátém místě; může být jedině na prvním místě.

Jako jediná možnost vychází číslo 71284, které vyhovuje všem uvedeným požadavkům. Marta může číslo s jistotou uhodnout, a to např. výše popsaným způsobem.

Poznámka. Součástí úlohy je i popis postupu vedoucího ke správné odpovědi. Uhodnuté číslo bez přiměřeného zdůvodnění nelze hodnotit nejlepším stupněm.

Z5–I–3

Ve čtvercové síti je dán trojúhelník, jehož vrcholy jsou uzlovými body sítě:

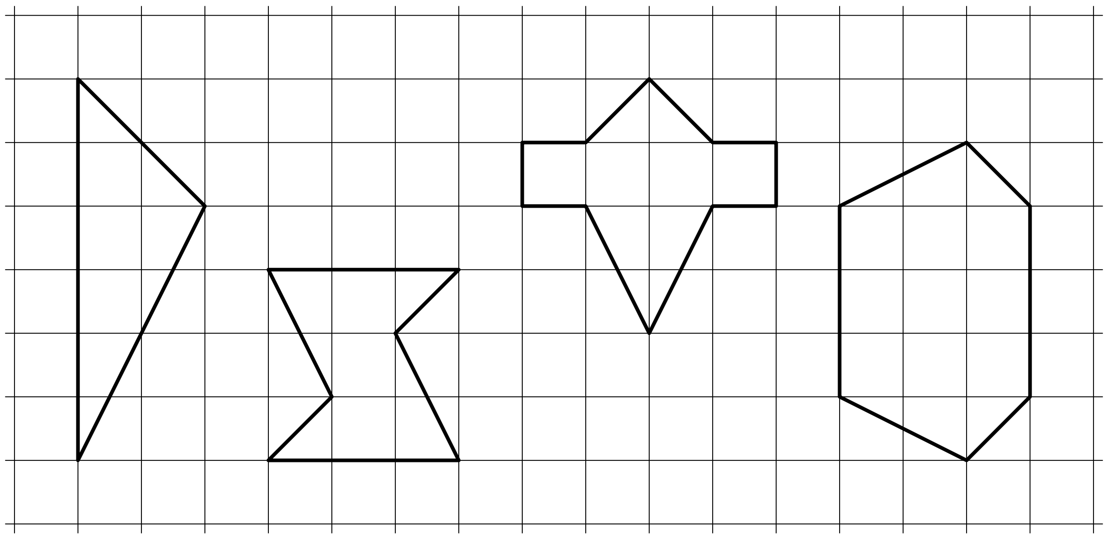


V dostatečně rozšířené síti nakreslete čtyři rozdílné (navzájem neshodné) mnohoúhelníky s dvojnásobným obvodem. (*E. Novotná*)

Nápověda. Jaké typy úseček vidíte na obvodu daného trojúhelníku?

Možné řešení. Obvod trojúhelníku je tvořen třemi hranami sítě, jednou úhlopříčkou čtverce 1×1 a jednou úhlopříčkou obdélníku 1×2. V nových mnohoúhelnících stačí všechny tyto části použít v dvojnásobném počtu.

To lze udělat velmi rozličnými způsoby; v následujícím výběru vyhovujících mnohoúhelníků jsou zastoupeny různé nápady (málo/mnoho vrcholů, souměrné/nesouměrné, konvexní/nekonvexní):



Z5–I–4

Nikola měla jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Každé z těchto čísel bylo kladné a tvořené navzájem různými číslicemi. Rozdíl Nikoliných čísel byl 976.

Jaký byl jejich součet? (*L. Hozová*)

Nápověda. Která trojmístná čísla přicházejí v úvahu?

Možné řešení. Největší trojmístné číslo s navzájem různými číslicemi je 987. Pokud by tohle bylo jedno z Nikoliných čísel, to druhé by muselo být 11 (aby rozdíl byl 976). To je dvojmístné číslo, avšak není tvořeno různými číslicemi, tedy nemohlo být Nikoliným číslem.

Nejbližší menší trojmístné číslo s navzájem různými číslicemi je 986. Pokud by tohle bylo jedno z Nikoliných čísel, to druhé by muselo být 10. To je dvojmístné číslo s různými číslicemi, tedy možné Nikolino číslo.

Žádná jiná dvojice nepřipadá v úvahu, neboť 10 je nejmenší dvojmístné číslo. Nikolina čísla byla 986 a 10, tedy jejich součet byl 996.

Poznámky. Lze uvažovat také obráceně od nejmenšího dvojmístného čísla: Pokud by jedno z Nikoliných čísel bylo 10, to druhé by muselo být 986 (aby rozdíl byl 976). To je trojmístné číslo s navzájem různými číslicemi, tedy možné Nikolino číslo. Pro další dvojmístná čísla s různými číslicemi (12, 13, 14, 15, ...) by druhé číslo buď obsahovalo dvě stejné číslice (988, 989, 990, 991, ...), nebo by nebylo trojmístné (pro dvojmístná čísla větší než 23). Tedy 10 a 986 byla Nikolina čísla.

Není těžké odhalit vyhovující dvojici čísel. Součástí úlohy je také rozbor dalších možností, tedy zdůvodnění, že víc takových dvojic není. Řešení bez přiměřeného rozboru nelze hodnotit nejlepším stupněm.

Z5–I–5

Tři žáby se naučily skákat po žebříku. Každá dovede skákat jak nahoru, tak dolů, ovšem jen o určité počty příček. Žáby začínají na zemi a každá by se ráda dostala na svoji oblíbenou příčku:

- malá žába umí skákat o 2 nebo o 3 příčky a chce se dostat na sedmou příčku,
- střední žába umí skákat o 2 nebo o 4 příčky a chce se dostat na první příčku,
- velká žába umí skákat o 6 nebo o 9 příček a chce se dostat na třetí příčku.

Pro jednotlivé žáby rozhodněte, zda je jejich přání splnitelné. Pokud ano, popište jak. Pokud ne, vysvětlete proč. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Pokud se vám nedaří dostat na danou příčku, zkuste jinou.

Možné řešení.

- Malá žába může postupně skočit nahoru o 2, o 2 a o 3 příčky, čímž se dostane na sedmou příčku.
- Velká žába může postupně skočit o 9 příček nahoru a o 6 příček dolů, čímž se dostane na třetí příčku.
- Střední žába umí skákat jen o sudé počty příček, tedy její dosažitelné příčky jsou vždy sudé. Na první příčku se tato žába nedostane.

Poznámka. Uvedené příklady u kladných odpovědí jsou nejjednodušší, avšak nikoli jediné možné. Malá žába může např. skákat pětkrát o 2 příčky nahoru, jednou o 3 příčky dolů a dostane se na tutéž příčku. Pokud jsou úlohy tohoto typu řešitelné, pak mívají neomezené množství řešení. V našem případě lze navíc považovat jiná (přípustná) pořadí skoků za jiná řešení.

Z5–I–6

Jindra sbírá hrací kostky, všechny stejné velikosti. Včera našel krabičku, do níž začal kostky skládat. Jednou vrstvou kostek se mu podařilo přesně vyskládat čtvercové dno. Obdobně vyskládal pět dalších vrstev, ovšem v polovině následující vrstvy mu došly kostky. Dnes Jindra od babičky dostal 18 dalších kostek, které mu přesně chyběly na dokončení této vrstvy.

Kolik kostek měl Jindra včera? (*M. Petrová*)

Nápověda. Kolik kostek měl Jindra v každé úplné vrstvě?

Možné řešení. Nových 18 kostek od babičky představovalo polovinu všech kostek v nedokončené (stejně jako v každé jiné) vrstvě. Tedy v jedné vrstvě bylo 36 kostek ($2 \cdot 18 = 36$). Vrstvy jsou vskutku čtvercové, a to se 6 řadami po 6 kostkách ($6 \cdot 6 = 36$).

Včera měl Jindra vyskládáno šest plných vrstev a polovinu sedmé. Celkem tak měl 234 kostek ($6 \cdot 36 + 18 = 234$).

Poznámky. V uvedeném řešení pro zjištěný počet kostek ve vrstvě ověřujeme, že mohly tvořit čtverec. Naopak lze začít zkoušením možných rozměrů čtvercové vrstvy tak, aby polovina představovala 18 kostek. Rychle dospějeme k téže možnosti 6 řad po 6 kostkách.

Polovinu vrstvy lze přeskládat do obdélníku, jehož jedna strana je poloviční vzhledem ke straně druhé. Číslo 18 lze v tomto duchu rozložit jedině jako $18 = 3 \cdot 6$. Tedy jedna vrstva sestávala z $6 \cdot 6 = 36$ kostek.