I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Aritmetická posloupnost je taková posloupnost čísel, v níž je rozdíl každého čísla od čísla jemu předcházejícího stále stejný; tomuto rozdílu se říká *diference*. (Např. 2, 8, 14, 20, 26, 32 je aritmetická posloupnost s diferencí 6.)

Bolek a Lolek měli každý svou aritmetickou posloupnost. Jak Bolkova, tak Lolkova posloupnost začínala číslem 2023 a končila číslem 3023. Tyto dvě posloupnosti měly 26 společných čísel. Poměr Bolkovy a Lolkovy diference byl 5 : 2.

Určete rozdíl Bolkovy a Lolkovy diference. (*E. Novotná*)

Nápověda. Bolkovu a Lolkovu diferenci lze vyjádřit pomocí jedné proměnné.

Možné řešení. Poměr Bolkovy a Lolkovy diference byl 5 : 2. Tedy Bolkova diference byla $5k$ a Lolkova $2k$, kde k je zatím neznámé číslo, které záhy určíme z ostatních informací. Rozdíl Bolkovy a Lolkovy diference potom vyjádříme jako $5k - 2k = 3k$.

Bolkova, resp. Lolkova posloupnost byla

$$\begin{array}{lllllll} 2023, & & & 2023+5k, & & 2023+10k, & \ldots, \\ 2023, & 2023+2k, & 2023+4k, & 2023+6k, & 2023+8k, & 2023+10k, & \ldots, \end{array}$$

společná čísla obou posloupností byla

$$2023, \quad 2023+10k, \quad 2023+20k, \quad 2023+30k, \quad \ldots. \tag{$*$}$$

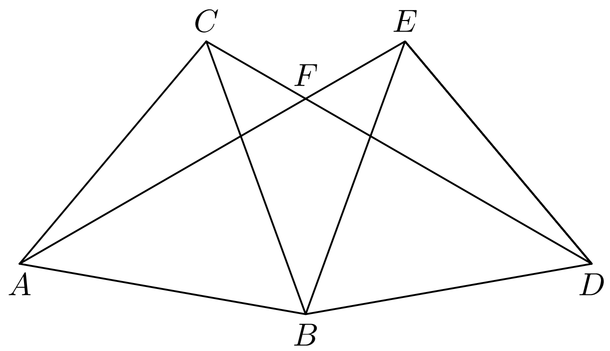
Společných čísel bylo 26 a poslední bylo 3023. Přitom 26. číslo v posloupnosti $(*)$ je tvaru $2023 + 250k$, tedy muselo být $k = 4$ $(2023 + 250 \cdot 4 = 3023)$.

Rozdíl Bolkovy a Lolkovy diference byl 12.

Z9–I–2

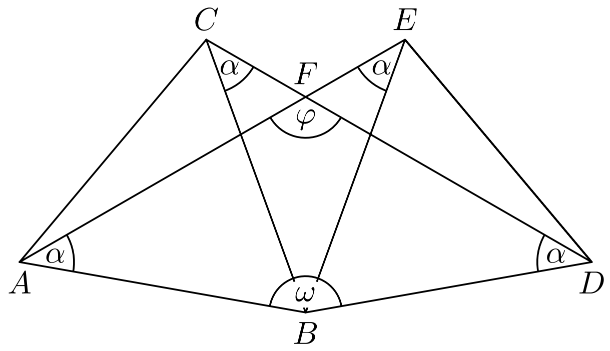
Jsou dány dva shodné rovnostranné trojúhelníky ABC a BDE tak, že velikost úhlu ABD je větší než 120° a menší než 180° a body C, E leží ve stejné polorovině vymezené přímkou AD. Průsečík CD a AE je označen F.

Určete velikost úhlu AFD. (*I. Jančigová*)



Nápověda. Součty vnitřních úhlů v trojúhelnících či mnohoúhelnících znáte.

Možné řešení. Vnitřní úhel u vrcholu A, resp. D ve čtyřúhelníku $AFDB$ je také vnitřním úhlem trojúhelníku ABE, resp. DBC. Trojúhelníky ABE a DBC jsou podle předpokladů rovnoramenné a navzájem shodné. Tedy vnitřní úhly u vrcholů A, E, D, C v těchto trojúhelnících jsou navzájem shodné. Velikost těchto úhlů závisí na úhlu ABD, který není přesně vymezen. Označme diskutované úhly podle obrázku:



Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABE, resp. DBC dává vztah mezi α a ω:

$$2\alpha + \omega - 60° = 180°.$$

Součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku $AFDB$ dává vztah s hledaným úhlem φ:

$$2\alpha + \omega + \varphi = 360°.$$

Z prvního vztahu plyne $2\alpha + \omega = 240°$, což společně se druhým vztahem dává $\varphi = 120°$.

Velikost úhlu AFD je $120°$.

Jiné řešení. Vnitřní úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost $60°$. Při otočení kolem bodu B o tento úhel po směru hodinových ručiček se bod A zobrazí na C a bod E se zobrazí na D. Tedy přímka AE se zobrazí na přímku CD.

Úhel AFC, resp. EFD má proto velikost $60°$. Hledaný úhel AFD doplňuje tento úhel do úhlu přímého, tedy má velikost $120°$.

Poznámka. Výsledek $\varphi = 120°$ vskutku nezávisí na velikosti úhlu ω. Omezení v zadání nejsou podstatná a slouží jen ke snazšímu uchopení úlohy. V mezních případech dostáváme speciální a zpravidla jednodušší případy: pro $\omega = 120°$ body C, E a F splývají a φ je součtem dvou vnitřních úhlů rovnostranných trojúhelníků, pro $\omega = 180°$ dostáváme zadání jako v úloze **Z7–I–2**.

Z9–I–3

Tři kouzelníci kouzlí s čísly, každý však umí jen jedno kouzlo:

- první kouzelník umí od libovolného čísla odečíst jedna,
- druhý kouzelník umí libovolné číslo vydělit dvěma,
- třetí kouzelník umí libovolné číslo vynásobit třemi.

Kouzelníci se při čarování mohou libovolně střídat, každý však může svoje kouzlo během jednoho vystoupení použít nejvýše pětkrát a žádný mezivýsledek nesmí být větší než 10. Při jednom vystoupení měli z dané pětice čísel 3, 8, 9, 2, 4 vykouzlit pětici trojek, při jiném vystoupení měli z téže pětice čísel vykouzlit pětici pětek.

Jak si mohli s problémem poradit? Najděte možná řešení, nebo vysvětlete, proč to možné není. (*E. Novotná*)

Nápověda. Pokud vám nejde kouzlení přímo, zkuste to nepřímo.

Možné řešení. Pětici trojek vykouzlit lze, kouzelníci mohli (v libovolném pořadí) postupovat podle následujícího schématu:

$$\begin{array}{l} 3 \\ 8 \xmapsto{:2} 4 \xmapsto{-1} 3 \\ 9 \xmapsto{-1} 8 \xmapsto{:2} 4 \xmapsto{-1} 3 \\ 2 \xmapsto{:2} 1 \xmapsto{\cdot 3} 3 \\ 4 \xmapsto{-1} 3 \end{array}$$

Žádné z kouzel nebylo použito víc než čtyřikrát a žádný mezivýsledek nebyl větší než 8.

Pětici pětek vykouzlit sice lze, ale ne s dodatečnými omezeními na počet jednotlivých kouzel a velikosti mezivýsledků:

Nejprve si uvědomme, že všechny mezivýsledky musí být celočíselné, neboť původní i koncové číslo je celé: Z celého čísla lze neceločíselný mezivýsledek dostat užitím druhého kouzla (ve jmenovateli bude mocnina dvojky); s danými typy kouzel by však také všechna následující čísla nebyla celá. K celému číslu se lze z neceločíselného mezivýsledku dostat užitím třetího kouzla (ve jmenovateli byla mocnina trojky); s danými typy kouzel by však také všechna předchozí čísla nemohla být celá.

Ke koncovému číslu 5 lze dospět dvojím způsobem, a to buď $10 \xmapsto{:2} 5$, nebo $6 \xmapsto{-1} 5$. Mezivýsledek 10 však nemůže vzniknout z čísla, které by nebylo větší než 10. Tedy pětice pětek může vzniknout jedině paterým užitím prvního kouzla na pětici šestek:

$$\begin{array}{l} \cdots\ 6 \xmapsto{-1} 5 \\ \cdots\ 6 \xmapsto{-1} 5 \\ \cdots\ 6 \xmapsto{-1} 5 \\ \cdots\ 6 \xmapsto{-1} 5 \\ \cdots\ 6 \xmapsto{-1} 5 \end{array}$$

Tím je maximální počet užití prvního kouzla vyčerpán a otázka zní, zda je možné vykouzlit pětici šestek jen pomocí druhého a třetího kouzla, z nichž žádné není užito víc než pětkrát a žádný mezivýsledek není větší než 10.

K číslu 6 lze dospět jediným způsobem, a to $2 \xmapsto{\cdot 3} 6$. Tedy pětice šestek může vzniknout jedině paterým užitím třetího kouzla na pětici dvojek:

$$\begin{aligned}
\cdots\ 2 &\xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5\\
\cdots\ 2 &\xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5\\
\cdots\ 2 &\xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5\\
\cdots\ 2 &\xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5\\
\cdots\ 2 &\xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5
\end{aligned}$$

Tím je maximální počet užití třetího kouzla vyčerpán a otázka zní, zda je možné vykouzlit pětici dvojek jen pomocí druhého kouzla, které není užito víc než pětkrát a žádný mezivýsledek není větší než 10. To však pro danou pětici čísel 3, 8, 9, 2, 4 možné není (problém s 3 a 9).

S danými omezeními pětici pětek vykouzlit nelze, kouzelníci by se do tohoto vystoupení raději pouštět neměli.

Z9–I–4

Najděte nejmenší kladná celá čísla a a b, pro která platí

$$7a^3 = 11b^5.$$

(*A. Bohiniková*)

Nápověda. Vyplatí se zaměřit na prvočísla.

Možné řešení. Z uvedené rovnosti plyne, že mezi prvočíselnými činiteli a a b musí být 7 a 11. Protože hledáme nejmenší vyhovující čísla a a b, můžeme předpokládat, že jiné prvočinitele tato čísla nemají. Tedy hledáme čísla tvaru

$$a = 7^* \cdot 11^*, \qquad b = 7^* \cdot 11^*, \tag{$*$}$$

kde hvězdičky představují zatím neznámé (kladné celé) mocnitele. Nejmenší vyhovující čísla odpovídají nejmenším vyhovujícím mocnitelům.

Zadaná rovnost platí, právě když se prvočíselní činitelé vyskytují na obou stranách ve stejných počtech (mocninách). Probereme možné činitele, budeme zkoušet postupně od nejmenších počtů, diskuzi zahajujeme na pravé straně:

- Pokud $b = 7 \cdot 11^*$, potom na pravé straně je 7^5 (a nějaká mocnina 11). Stejnou mocninu 7 na levé straně však dostat nelze: $7 \cdot 7^3 = 7^4 < 7^5$ a $7 \cdot (7^2)^3 = 7^7 > 7^5$.
- Pokud $b = 7^2 \cdot 11^*$, potom na pravé straně je $(7^2)^5 = 7^{10}$ (a nějaká mocnina 11). Stejnou mocninu 7 na levé straně dostat lze: $7.(7^3)^3 = 7^{10}$.

Tedy hledaná čísla jsou tvaru

$$a = 7^3 \cdot 11^*, \qquad b = 7^2 \cdot 11^*.$$

- Pokud $b = 7^* \cdot 11$, potom na pravé straně je $11 \cdot 11^5 = 11^6$ (a nějaká mocnina 7). Stejnou mocninu 11 na levé straně dostat lze: $(11^2)^3 = 11^6$.

  Tedy hledaná čísla jsou

$$a = 7^3 \cdot 11^2 = 41\,503, \qquad b = 7^2 \cdot 11 = 539. \tag{$**$}$$

Poznámky. Pokud neznámé mocnitele v $(*)$ označíme jako

$$a = 7^k \cdot 11^m, \qquad b = 7^l \cdot 11^n,$$

potom po dosazení a úpravě rovnice ze zadání dostáváme

$$\begin{gathered} 7 \cdot (7^k \cdot 11^m)^3 = 11 \cdot (7^l \cdot 11^n)^5, \\ 7^{3k+1} \cdot 11^{3m} = 7^{5l} \cdot 11^{5n+1}. \end{gathered}$$

Porovnáním odpovídajících činitelů dostáváme lineární rovnice

$$3k + 1 = 5l, \qquad 3m = 5n + 1.$$

Nejmenší kladná celočíselná řešení těchto rovnic jsou $k = 3$, $m = 2$, $l = 2$, $n = 1$, což odpovídá $(**)$.

Pro zajímavost dodáváme, že všechna celočíselná řešení zadané rovnice jsou tvaru

$$a = 41\,503 \cdot c^5, \qquad b = 539 \cdot c^3,$$

kde c je libovolné celé číslo.

Z9–I–5

Na snovém tržišti nabídla Sfinga cestovateli za čtyři sny sedm iluzí, dva šlofíky a jednu noční můru. Jinému cestovateli tatáž Sfinga nabídla za sedm snů čtyři iluze, čtyři šlofíky a dvě noční můry. Sfinga měří všem cestovatelům vždy stejně.

Kolik iluzí stál jeden sen? (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete vztahy ze zadání pomocí neznámých, zasněte se a hledejte vztahy další.

Možné řešení. Označme cenu snu, iluze, šlofíku a noční můry postupně jako s, i, $š$ a m. Pak podle zadání platí

$$4s = 7i + 2š + m, \qquad 7s = 4i + 4š + 2m. \tag{$*$}$$

Šlofíků a nočních můr je ve druhé rovnici dvakrát tolik co v rovnici první. Vyjádřením těchto komodit z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme vztah mezi sny a iluzemi:

$$4s - 7i = 2š + m, \qquad \begin{aligned} 7s &= 4i + 2(2š + m), \\ 7s &= 4i + 8s - 14i, \\ s &= 10i. \end{aligned}$$

Jeden sen stál deset iluzí.

Poznámky. Ze zadání není možné určit zbylé neznámé, pouze odvozovat jejich další vztahy, přesněji řečeno jinak vyjadřovat zadané vztahy. Pro dané rovnice, lze jakoukoli jejich manipulací (použitou současně na obě jejich strany) odvodit opět platnou rovnici. Při řešení lineárních rovnic můžeme eliminovat neznámé vhodnými lineárními kombinacemi daných rovnic. Náš případ (∗) je speciální v tom, že lze eliminovat dvě ze čtyř neznámých najednou: rozdíl druhé rovnice od dvojnásobku první dává

$$\begin{aligned} 8s - 7s &= 14i + 4š + 2m - 4i - 4š - 2m, \\ s &= 10i. \end{aligned}$$

To je jen jinak uchopený tentýž postřeh jako v předchozím řešení.

Soustava rovnic (∗) má nekonečně mnoho řešení, která lze vyjádřit např.

$$s = 10i, \qquad m = 33i - 2š,$$

kde i a $š$ mohou být libovolná čísla. Zejména čtveřice $i = 0$, $s = 0$, $š = 0$, $m = 0$ je řešením a všechna řešení jsou lineárními kombinacemi čtveřic $i = 0$, $s = 0$, $š = 1$, $m = -2$ a $i = 1$, $s = 10$, $š = 0$, $m = 33$.

Pro pokusně odhalené řešení soustavy (∗) bude jistě platit $s = 10i$. Zobecnění typu

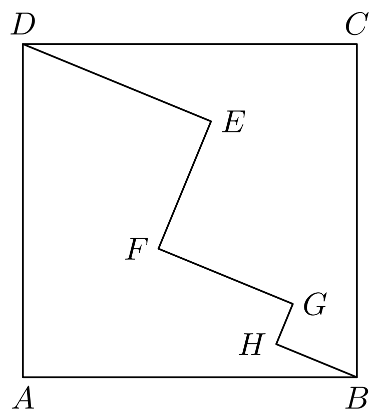
„$i = 1$, $s = 10$, $š = 0$, $m = 33$ je řešením, tedy $s = 10i$“

však nelze bez dodatečného vysvětlení považovat za vyhovující řešení úlohy.

Z9–I–6

Vrcholy čtverce $ABCD$ spojuje lomená čára $DEFGHB$. Menší úhly u vrcholů E, F, G, H jsou pravé a úsečky DE, EF, FG, GH, HB po řadě měří 6 cm, 4 cm, 4 cm, 1 cm, 2 cm.

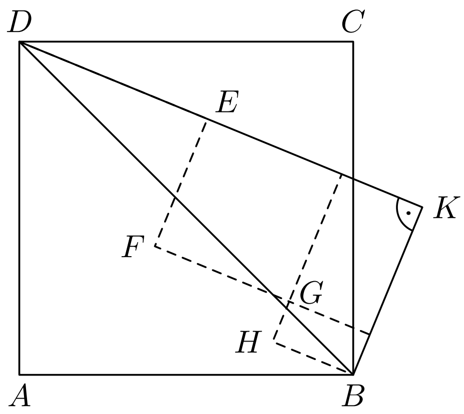
Určete obsah čtverce $ABCD$. *(M. Dillingerová)*



Nápověda. Nešla by z oné polámané úhlopříčky určit ta skutečná?

Možné řešení. Ze zadání lze určit úhlopříčku čtverce, odkud již snadno vyjádříme jeho obsah.

Úhlopříčku DB interpretujeme jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku DKB, jehož odvěsny jsou rovnoběžné s částmi dané lomené čáry (doplněné pomocné čtyřúhelníky jsou obdélníky):



Odvěsny mají velikosti

$$|DK| = |DE| + |FG| + |HB| = 6 + 4 + 2 = 12\,(\text{cm}),$$
$$|KB| = |EF| + |GH| = 4 + 1 = 5\,(\text{cm}).$$

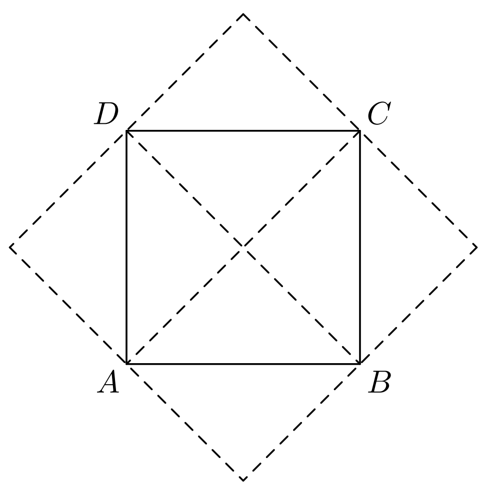
Podle Pythagorovy věty platí

$$|DB|^2 = |DK|^2 + |KB|^2 = 12^2 + 5^2 = 169\,(\text{cm}^2).$$

Obsah čtverce $ABCD$ je roven polovině čtverce, jehož strana je úhlopříčkou čtverce $ABCD$, tzn.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|DB|^2 = 84{,}5\,\text{cm}^2.$$

Poznámka. Poslední vztah lze považovat za dobře známý a není nutné jej v řešení úlohy odvozovat. Názorně lze tento vztah vyjádřit takto:



Jinak (z Pythagorovy věty v trojúhelníku BAD) víme, že $|DB|^2 = 2|AB|^2$, tedy

$$|AB|^2 = \frac{1}{2}|DB|^2,$$

což je právě obsah čtverce $ABCD$.