72. ročník Matematické olympiády (2022/23)

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Najděte všechna čtyřmístná čísla, která mají přesně pět čtyřmístných a přesně devět jednomístných dělitelů. (*S. Bednářová*)

Možné řešení. Hledaná čísla mají mít dělitele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tedy musí být dělitelná jejich nejmenším společným násobkem:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Postupně budeme uvažovat násobky čísla 2520 a zjišťovat jejich čtyřmístné dělitele:

- Číslo 2520 je čtyřmístné, ale má jen dva čtyřmístné dělitele, viz

$$2520 = 2520 \cdot 1 = 1260 \cdot 2;$$

  nejbližším menším dělitelem je 840.
- Dalším násobkem čísla 2520 je 5040. Toto číslo je čtyřmístné a má právě pět čtyřmístných dělitelů, viz

$$5040 = 5040 \cdot 1 = 2520 \cdot 2 = 1680 \cdot 3 = 1260 \cdot 4 = 1008 \cdot 5;$$

  nejbližším menším dělitelem je 840.
- Dalším násobkem čísla 2520 je 7560. Toto číslo je čtyřmístné, ale má víc než pět čtyřmístných dělitelů, viz

$$7560 = 7560 \cdot 1 = 3780 \cdot 2 = 2520 \cdot 3 = 1890 \cdot 4 = 1512 \cdot 5 = 1260 \cdot 6 = 1080 \cdot 7.$$

- Další násobky čísla 2520 již nejsou čtyřmístné.

Jediným řešením úlohy je číslo 5040.

Hodnocení. 2 body za nejmenší společný násobek jednomístných dělitelů; 2 body za postupný rozbor možností; 2 body za závěr a kvalitu komentáře.

Z9–II–2

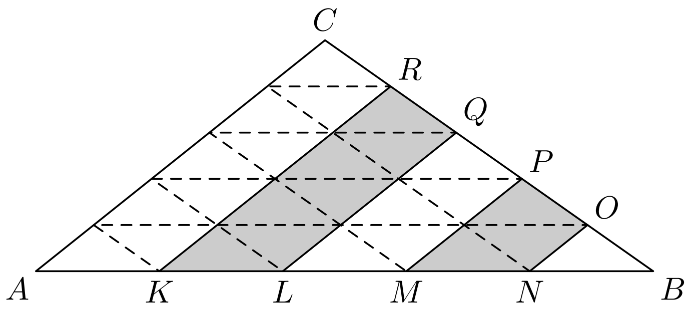
Trojúhelník ABC má stranu AC dlouhou 24 cm a výšku z vrcholu B dlouhou 25 cm. Strana AB je rozdělena na pět shodných částí, dělicí body jsou postupně od A k B označeny K, L, M, N. Každým z těchto bodů prochází rovnoběžka se stranou AC. Průsečíky rovnoběžek se stranou BC jsou postupně od B k C označeny O, P, Q, R.

Vypočtěte součet obsahů lichoběžníků $KLQR$ a $MNOP$. (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Obsah celého trojúhelníku ABC je

$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 = 300\,(\mathrm{cm}^2).$$

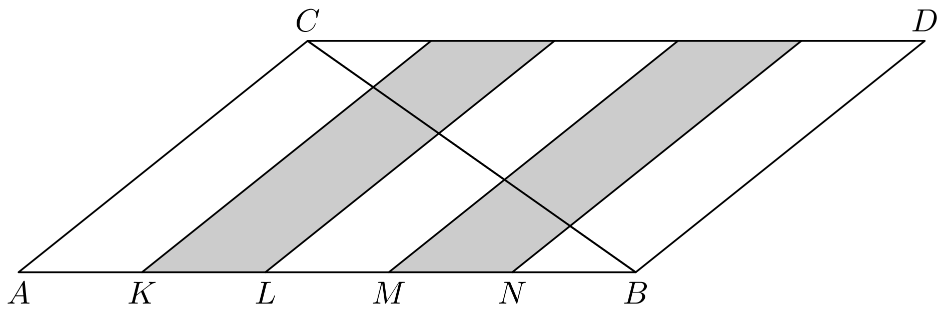
Rovnoběžky se stranou AB procházející body O, P, Q R a rovnoběžky se stranou BC procházející body K, L, M, N, rozdělují trojúhelník ABC na menší navzájem shodné trojúhelníky. Vzájemná shodnost trojúhelníků plyne z konstrukce a některé ze základních vět o shodnostech trojúhelníků (*sus*, *sss*, *usu*). Nejmenšími dílky v tomto dělení jsou trojúhelníky shodné s trojúhelníkem NBO, a těch je celkem 25.



Obsah trojúhelníku NBO je $\frac{1}{25} \cdot 300 = 12\,(\mathrm{cm}^2)$. Lichoběžník $KLQR$, resp. $MNOP$ sestává ze 7, resp. ze 3 takových trojúhelníků. Součet obsahů těchto lichoběžníků je tedy

$$(7 + 3) \cdot 12 = 120\,(\mathrm{cm}^2). \tag{1}$$

Jiné řešení. Trojúhelník ABC doplníme do rovnoběžníku $ABDC$. Čtveřice rovnoběžek po prodloužení dělí rovnoběžník na pět shodných rovnoběžníků:



Obsah celého rovnoběžníku $ABDC$ je

$$24 \cdot 25 = 600\,(\mathrm{cm}^2).$$

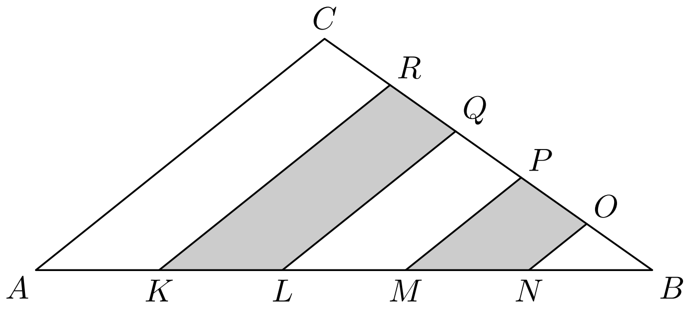
Součet obsahů dvou rovnoběžníků vybarvených šedě je

$$\frac{2}{5} \cdot 600 = 240\,(\mathrm{cm}^2).$$

Trojúhelníky ABC a DCB jsou shodné, a to včetně vybarvených částí. Tedy součet obsahů lichoběžníků $KLQR$ a $MNOP$ je roven polovině součtu obsahů šedých rovnoběžníků:

$$\frac{1}{2} \cdot 240 = 120\,(\mathrm{cm}^2). \tag{2}$$

Jiné řešení. Trojúhelníky ABC, KBR, LBQ, MBP a NBO jsou navzájem podobné, neboť mají společný úhel ve vrcholu B a k němu protější strany jsou navzájem rovnoběžné. Koeficienty podobnosti mezi prvním a zbylými čtyřmi trojúhelníky jsou postupně $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{5}$.



Obsah celého trojúhelníku ABC je

$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 = 300\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsahy trojúhelníků NBO, MBP, LBQ, KBR jsou postupně

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \cdot 24\right)\left(\frac{1}{5} \cdot 25\right) = 12\,(\mathrm{cm}^2),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \cdot 24\right)\left(\frac{2}{5} \cdot 25\right) = 48\,(\mathrm{cm}^2),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} \cdot 24\right)\left(\frac{3}{5} \cdot 25\right) = 108\,(\mathrm{cm}^2),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} \cdot 24\right)\left(\frac{4}{5} \cdot 25\right) = 192\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah lichoběžníku $KLQR$ je rozdílem obsahů trojúhelníků KBR a LBQ, obsah lichoběžníku $MNOP$ je rozdílem obsahů trojúhelníků MBP a NBO. Součet obsahů těchto dvou lichoběžníků je tedy

$$(192 - 108) + (48 - 12) = 120\,(\mathrm{cm}^2). \tag{3}$$

Hodnocení. 2 body za startovní úvahy (dělení, doplnění, resp. podobnosti); 2 body za pomocné výpočty a výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámka. Ve všech uvedených řešeních lze s výhodou místo postupného vyčíslování obsahů pracovat s výrazy vyjadřujícími závislosti na obsahu trojúhelníku ABC a hodnoty ze zadání dosazovat až nakonec. Pokud obsah trojúhelníku ABC označíme S, pak výpočty (1) a (2) odpovídají postupně

$$\frac{7+3}{25} S = \frac{2}{5} S, \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2S = \frac{2}{5} S$$

a vztah (3) lze vyjádřit jako

$$\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) S = \frac{16 - 9 + 4 - 1}{25} S = \frac{2}{5} S.$$

Z9–II–3

Pomocí proměnné n byly zapsány následující výrazy:

$$2023n, \quad n^2 + n + 23, \quad 3n^3, \quad 10n^2 + 2023.$$

Výraz se nazývá *lichotvorný*, pokud pro každé přirozené číslo n platí, že hodnota výrazu je lichá. Rozhodněte, které z uvedených čtyř výrazů jsou lichotvorné, a zdůvodněte proč. (*L. Hozová*)

Možné řešení. V následujícím vystačíme se známými poznatky o součtech a součinech sudých (s) a lichých (l) čísel, které ve zkratce připomínáme v následujících tabulkách:

$+$	s	l
s	s	l
l	l	s

$\cdot$	s	l
s	s	s
l	s	l

- První výraz $2023n$ je součinem lichého čísla s n, tedy výsledek závisí na paritě n. Hodnota tohoto výrazu tedy není vždy lichá (např. pro $n = 2$ dostáváme 4046).
- Ve druhém výrazu je $n^2 + n$ vždy sudé číslo: pro n sudé, resp. liché se jedná o součet dvou sudých, resp. dvou lichých čísel. Zbývající sčítanec je liché číslo, tedy pro jakékoli n je hodnota výrazu $n^2 + n + 23$ vždy lichá.
- Třetí výraz $3n^3$ je součinem lichého čísla s n^3, tedy výsledek závisí na paritě n. Hodnota tohoto výrazu tedy není vždy lichá (např. pro $n = 2$ dostáváme 24).
- Ve čtvrtém výrazu je $10n^2$ vždy sudé číslo, neboť 10 je sudé číslo. Zbývající sčítanec je liché číslo, tedy pro jakékoli n je hodnota výrazu $10n^2 + 2023$ vždy lichá.

Lichotvorné výrazy jsou $n^2 + n + 23$ a $10n^2 + 2023$.

Hodnocení. Po 1 bodu za každou správnou a zdůvodněnou odpověď; 2 body za celkovou kvalitu komentáře.

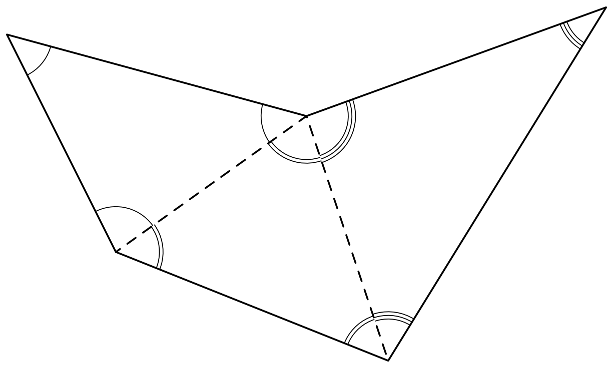
Poznámka. Výše diskutovaná sudost části druhého výrazu plyne také z následující úpravy: $n^2 + n = n(n + 1)$. Na pravé straně je součin dvou po sobě jdoucích čísel, tedy součin sudého a lichého čísla.

Z9–II–4

V jistém mnohoúhelníku platí, že poměr součtu velikostí jeho vnitřních úhlů a součtu velikostí k nim doplňkových úhlů je 3 : 5. (Na vysvětlenou: doplňkový úhel doplňuje daný úhel do úhlu plného.)

Kolik vrcholů má onen mnohoúhelník? (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Součet velikostí vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180°, čtyřúhelníku 360° atd. Obecně platí, že každý n-úhelník lze složit z $n - 2$ trojúhelníků, tedy součet jeho vnitřních úhlů je $(n - 2) \cdot 180°$.



Součet velikostí doplňkových úhlů obecného n-úhelníku je

$$n \cdot 360° - (n-2) \cdot 180° = (n+2) \cdot 180°.$$

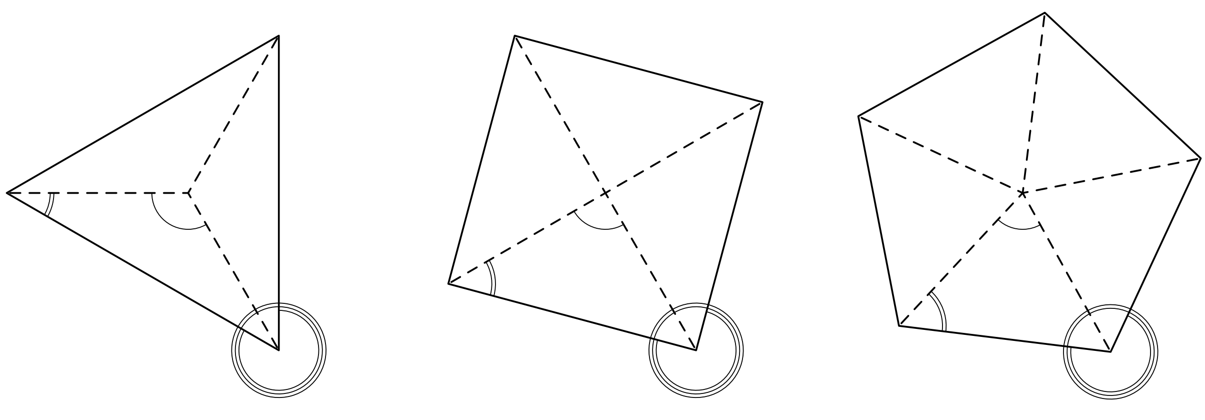
Poměr těchto dvou hodnot je $(n-2) : (n+2)$, což má podle zadání být $3 : 5$. Úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n+2} &= \frac{3}{5}, \\ 5n - 10 &= 3n + 6, \\ 2n &= 16, \\ n &= 8. \end{aligned}$$

Neznámý mnohoúhelník je osmiúhelníkem.

Jiné řešení. Součty velikostí vnitřních, resp. doplňkových úhlů jsou ve všech mnohoúhelnících se stejnými počty vrcholů stejné. Proto se stačí zaobírat (např.) jen pravidelnými mnohoúhelníky.

Pravidelný n-úhelník lze složit z n navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků. Vnitřní úhel u hlavního vrcholu trojúhelníku má velikost $\frac{1}{n}360°$, součet vnitřních úhlů u základny je roven vnitřnímu úhlu pravidelného n-úhelníku a má velikost $180° - \frac{1}{n} \cdot 360°$. Doplňkový úhel pravidelného n-úhelníku tedy má velikost $360° - (180° - \frac{1}{n} \cdot 360°) = 180° + \frac{1}{n} \cdot 360°$.



Součty velikostí vnitřních a vnějších úhlů jsou postupně

$$n\Big(180^\circ - \frac{1}{n}\cdot 360^\circ\Big) = (n-2)\cdot 180^\circ,$$
$$n\Big(180^\circ + \frac{1}{n}\cdot 360^\circ\Big) = (n+2)\cdot 180^\circ.$$

Poměr těchto dvou hodnot je $(n-2) : (n+2)$, což má být $3 : 5$. Odtud, stejnými úpravami jako výše, dostáváme $n = 8$. Neznámý mnohoúhelník je osmiúhelníkem.

Hodnocení. 2 body za přípravná vyjádření v závislosti na n; 2 body za sestavení a dořešení rovnice; 2 body za kvalitu komentáře.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení se zaměříme jen na pravidelné mnohoúhelníky, resp. jejich dělení na navzájem shodné rovnoramenné trojúhelníky, viz ilustrace výše.

V pravidelném mnohoúhelníku je poměr součtů velikostí vnitřních a doplňkových úhlů stejný jako poměr velikostí těchto úhlů u každého jednoho vrcholu. Tento poměr je $3 : 5$, právě když vnitřní úhel neznámého mnohoúhelníku má velikost

$$\frac{3}{8}\cdot 360^\circ = 135^\circ$$

($3 + 5 = 8$ dílů odpovídá plnému úhlu). Úhel u hlavního vrcholu pomocného rovnoramenného trojúhelníku, tj. středový úhel mnohoúhelníku, je 45° (aby součet vnitřních úhlů trojúhelníku byl 180°). Tento úhel je osminou plného úhlu. Neznámý mnohoúhelník je osmiúhelníkem.

Poznámka. Předchozí nápad lze zpracovat postupným vyjadřováním středového, vnitřního, resp. doplňkového úhlu pravidelného n-úhelníku v závislosti na n a kontrolou požadovaného poměru:

n	3	4	5	6	7	8	...
středový	120°	90°	72°	60°	$\frac{1}{7}360^\circ$	45°	...
vnitřní	60°	90°	108°	120°	$\frac{1}{7}900^\circ$	135°	...
doplňkový	300°	270°	252°	240°	$\frac{1}{7}1620^\circ$	225°	...
poměr	$1:5$	$1:3$	$3:7$	$1:2$	$5:9$	$\mathbf{3:5}$	...

Z geometrické představy vyplývá, že pro zvětšující se n hodnota poměru vnitřního a doplňkového úhlu postupně roste k $1 : 1$. Tedy pokud má úloha řešení, je toto řešení jediné.

Hodnocení. Po 2 bodech za velikosti vnitřního a středového úhlu pravidelného mnohoúhelníku; 2 body za dořešení a kvalitu komentáře.

Při postupném zkoušení zohledněte úplnost komentáře. Náhodně odhalené nezdůvodněné řešení hodnoťte 2 body.