72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Ústřední kolo kategorie A

Zlín, 20. března 2023

1. Alice a Bohouš hrají hru na plánu se 72 políčky rozmístěnými po obvodu kruhu. Na začátku Bohouš položí na některá políčka po jednom žetonu. V každém kole nejprve Alice zvolí jedno prázdné políčko a Bohouš pak na něj musí posunout žeton z jednoho sousedního políčka. Pokud to nesvede, hra končí; jinak následuje další kolo. Určete nejmenší počet žetonů, pro který Bohouš umí zajistit, že ve hře proběhne aspoň 2023 kol.

2. Nechť $n \geqq 3$ je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou délky stran libovolného n-úhelníku. Dokažte nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > \sqrt{2\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík jeho výšek a I střed kružnice mu vepsané. Nechť D je kolmým průmětem bodu I na přímku BC a E je obrazem bodu A v souměrnosti se středem I. Dále je F kolmým průmětem bodu H na přímku ED. Dokažte, že body B, H, F a C leží na téže kružnici.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu může získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Ústřední kolo kategorie A

Zlín, 21. března 2023

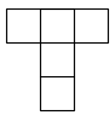
4. Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladných celých čísel splňující pro každý index $n \geqq 3$ podmínku
$$a_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1} - 1.$$

a) Dokažte, že některé prvočíslo je dělitelem nekonečně mnoha členů této posloupnosti.

b) Dokažte, že takových prvočísel je nekonečně mnoho.

5. V trojúhelníku ABC označme M, N, P po řadě středy stran BC, CA, AB a G jeho těžiště. Nechť kružnice opsaná trojúhelníku BGP protíná přímku MP v bodě K různém od P a kružnice opsaná trojúhelníku CGN protíná přímku MN v bodě L různém od N. Dokažte, že $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$.

6. Nechť $n \geqq 3$ je celé číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec



v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu může získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. *Alice a Bohouš hrají hru na plánu se 72 políčky rozmístěnými po obvodu kruhu. Na začátku Bohouš položí na některá políčka po jednom žetonu. V každém kole nejprve Alice zvolí jedno prázdné políčko a Bohouš pak na něj musí posunout žeton z jednoho sousedního políčka. Pokud to nesvede, hra končí; jinak následuje další kolo. Určete nejmenší počet žetonů, pro který Bohouš umí zajistit, že ve hře proběhne aspoň 2023 kol.* (Václav Blažej)

Řešení. Ukážeme, že hledaný nejmenší možný počet žetonů je 36.

V první části popíšeme strategii Bohouše, při které s 36 žetony dokáže zajistit, aby hra po žádném počtu kol neskončila. Na začátku Bohouš rozmístí 36 žetonů na každé druhé políčko hracího plánu a pevně si rozdělí všech 72 políček na 36 dvojic sousedících polí. Může žetony posunovat tak, aby v průběhu celé hry byl v každé vytvořené dvojici políček právě jeden žeton: V každém kole totiž Alice musí zvolit prázdné políčko v některé dvojici, Bohouš pak na ně přesune žeton z druhého políčka této dvojice. Hra tedy nikdy neskončí.

V druhé části řešení budeme předpokládat, že Bohouš na začátku rozmístí na hrací plán méně než 36 žetonů. Popíšeme strategii Alice, při které dokáže zajistit, aby hra skončila nejpozději 36. kolem.

Úvodem si Alice představí, že políčka jsou nastálo obarvena střídavě bílou a černou barvou. V každém kole pak Alice zvolí kterékoli prázdné bílé políčko – takové vždy najde, neboť bílých polí je 36, zatímco všech žetonů je méně. Bohouš tak bude nucen v každém kole přesunout žeton z některého černého políčka na bílé. S každým žetonem tak bude v průběhu celé hry moci táhnout nejvýše jednou – a to jen s těmi, které na začátku stály na černém políčku. Hra tedy skutečně skončí nejpozději 36. kolem.

Jiné řešení. Uvedeme pouze odlišný přístup k druhé části původního řešení. Budeme tedy opět předpokládat, že Bohouš na začátku rozmístí na hrací plán méně než 36 žetonů, nyní navíc tak, že žádná tři sousední políčka nebudou prázdná – jinak Alice hru ukončí prvním kolem tím, že zvolí prostřední z těchto tří políček. Ukážeme, že po nejvýše 34 kolech si Alice vhodnou strategií vynutí situaci, kdy taková tři políčka už budou existovat.*

Prázdná políčka jsou tedy rozdělena do několika souvislých úseků, tvořených vždy jedním nebo dvěma políčky. Takové úseky o dvou políčkách existují aspoň dva – aspoň jeden najdeme při každém z obou rozdělení všech 72 polí na 36 dvojic sousedních polí, neboť žetonů je nejvýše 35.

Alice umístí mezi každá dvě prázdná sousední políčka zarážku (a po každém kole provede korekci polohy jedné z nich). Na začátku tyto zarážky v počtu $z \geqq 2$ rozdělí všech 72 políček na z úseků. Každý z nich přitom obsahuje aspoň 3 políčka, *začíná i končí prázdným políčkem a neobsahuje dvě sousedící prázdná políčka.* Alice jistě může z těchto úseků vybrat jeden, označme ho dále U, ve kterém je žetonů méně nežli prázdných políček (tato nerovnost totiž platí pro jejich celkové počty).

Nechť $k \geqq 1$ je to celé číslo, při kterém vybraný úsek U obsahuje $k + 1$ prázdných políček a nejvýše k žetonů. Těchto žetonů ovšem musí být právě k, totiž po jednom

* V poznámce za tímto řešením nastíníme, jak Alice může tuto strategii dále vylepšit, aby ukončila hru případně ještě dříve.

v každé z k „mezer“ mezi oněmi prázdnými $k+1$ políčky. Úsek U tak je tvořen lichým počtem $2k+1$ políček, pro který navíc zřejmě platí $2k+1 \leqq 72-3=69$ neboli $k \leqq 34$. Ve zřejmé symbolice pak obsazenost políček v okolí těchto dvou zarážek úseku U vypadá takto:

$$\ldots 0 \,|\, \underbrace{0\,1\,0\,1 \ldots 0\,1\,0}_{U} \,|\, 0 \ldots$$

Alice v prvním kole zvolí v úseku U první políčko zleva. Bohouš je pak vynucen k přesunu žetonu zprava – tím se levá zarážka posune o dvě pozice doprava, takže vznikne nový úsek U' délky $2k-1$:

$$\ldots 0 \,|\, \underbrace{0\,1\,0\,1 \ldots 0\,1\,0}_{U} \,|\, 0 \ldots \;\to\; \ldots 0\,1\,0 \,|\, \underbrace{0\,1\,0\,1 \ldots 0\,1\,0}_{U'} \,|\, 0 \ldots$$

Ve druhém kole Alice v úseku U' zvolí opět první políčko zleva. Proceduru neustále opakuje, až po k-tém kole, kde jak víme $k \leqq 34$, dostane úsek mezi dvěma zarážkami tvořený jedním políčkem, které tak je prostředním v trojici sousedících prázdných políček. Tím je tvrzení z úvodního odstavce dokázáno.

Poznámka. Lze dokázat, že musí vzniknout aspoň dva úseky liché délky. Alice pak může úsek U z předchozího řešení vybrat tak, aby byl tvořen nejvýše 35 políčky. Kromě toho může Alice svou strategii pozměnit tak, že v úseku U ukáže ne na krajní, nýbrž buď na prostřední prázdné políčko, nebo na jedno z políček vedle prostředního obsazeného. Pak se po Bohoušově tahu objeví v úseku U nová zarážka, která ho rozdělí na dva úseky – za U' pak Alice vybere kratší z nich. Opakováním této procedury dostane Alice posloupnost úseků s počty políček, které nepřevyšují po řadě čísla 35, 17, 7, 3 a 1, takže Alice hru ukončí nejpozději pátým kolem.

2. *Nechť $n \geqq 3$ je celé číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou délky stran libovolného n-úhelníku. Dokažte nerovnost*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > \sqrt{2\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Protože $a_1, \dots, a_n$ jsou délky stran n-úhelníku, platí zřejmé nerovnosti

$$\begin{gathered} a_2 + a_3 + \ldots + a_n > a_1, \\ a_1 + a_3 + \ldots + a_n > a_2, \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} > a_n. \end{gathered}$$

V první nerovnosti přičteme k oběma stranám a_1 a pak obě strany vynásobíme kladným číslem a_1. Podobně v druhé nerovnosti přičteme k oběma stranám a_2 a pak je obě vynásobíme a_2 a tak dále. Dostaneme tak nerovnosti

$$\begin{gathered} a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > 2a_1^2, \\ a_2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > 2a_2^2, \\ \vdots \\ a_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > 2a_n^2. \end{gathered}$$

Sečteme-li všech n těchto nerovností, obdržíme

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > 2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Po odmocnění obou (kladných) stran poslední nerovnosti už získáme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

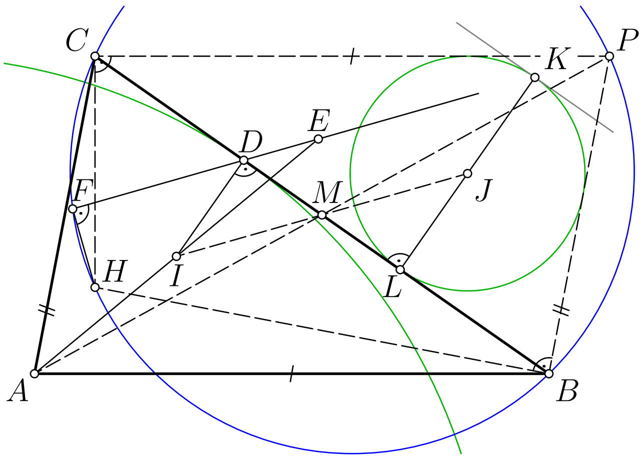
Jiné řešení. Protože v dané nerovnosti na označení délek stran nezáleží, můžeme předpokládat, že jsou očíslovány tak, že platí $a_n \geqq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Z obecně platné nerovnosti $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} > a_n$ pak dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= \sqrt{((a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} > \\ &> \sqrt{(a_n + a_n)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} = \\ &= \sqrt{2a_na_1 + 2a_na_2 + \ldots + 2a_na_n} \geqq \\ &\geqq \sqrt{2a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + 2a_n^2}. \end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili toho, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ díky našemu předpokladu $a_n \geqq a_i > 0$ platí $2a_na_i \geqq 2a_i^2$. Tím je ostrá nerovnost ze zadání úlohy dokázána.

3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík jeho výšek a I střed kružnice mu vepsané. Nechť D je kolmým průmětem bodu I na přímku BC a E je obrazem bodu A v souměrnosti se středem I. Dále je F kolmým průmětem bodu H na přímku ED. Dokažte, že body B, H, F a C leží na téže kružnici.* (Patrik Bak)

Řešení. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABPC$ (viz obr.). Protože platí $HB \perp AC \parallel BP$, je úhel HBP pravý. Podobně z $HC \perp AB \parallel CP$ plyne, že úhel HCP je rovněž pravý. Oba body B a C proto leží na Thaletově kružnici s průměrem HP.



Jistě se dále stačí zabývat případem, kdy platí $H \neq F$. Vysvětleme, proč pak stačí ukázat, že *body D, E, P leží na jedné přímce*. Tehdy totiž na této přímce leží i bod F, takže úhel HFP je pravý, a tudíž jeho vrchol F leží (společně s body B, C a H) na kružnici s průměrem HP.

Ve středové souměrnosti se středem v bodě M označme L obraz bodu D a J obraz bodu I. Z této souměrnosti plyne, že J je středem kružnice vepsané trojúhelníku BCP a L je bodem jejího dotyku se stranou BC. Nechť KL je průměr této kružnice. Bod J je tak středem úsečky KL.

Je dobře známo, že D je bodem dotyku kružnice vně připsané straně BC trojúhelníku BCP.* Tato připsaná kružnice je obrazem jeho kružnice vepsané ve stejnolehlosti se středem ve vrcholu P (a koeficientem větším než 1). V této stejnolehlosti je tečna BC kružnice připsané obrazem té tečny kružnice vepsané, která je s jejich společnou tečnou BC rovnoběžná, má však od vrcholu P menší vzdálenost. Tato tečna ovšem prochází bodem K, jelikož KL je průměr kružnice vepsané kolmý na obě tečny. Proto se v této stejnolehlosti bod K zobrazí na bod D, a tudíž body D, K, P leží na jedné přímce. Zbývá tak dokázat, že na této přímce leží rovněž bod E. K tomu stačí ukázat, že úsečky EP a DK jsou rovnoběžné. To jsou ovšem strany po řadě trojúhelníků AEP a LDK se středními příčkami po řadě IM a MJ, pro něž platí $IM \parallel EP$ a $MJ \parallel DK$; odtud už plyne kýžená relace $EP \parallel DK$, neboť M je středem úsečky IJ.

* Souměrná sdruženost bodu dotyku připsané kružnice s bodem dotyku vepsané kružnice podle středu dotyčné strany je dokázána například v řešení úlohy 63–B–S–3.

4. *Uvažujme posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *kladných celých čísel splňující pro každý index* $n \geqq 3$ *podmínku*

$$a_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1} - 1.$$

a) Dokažte, že některé prvočíslo je dělitelem nekonečně mnoha členů této posloupnosti.

b) Dokažte, že takových prvočísel je nekonečně mnoho.

(Tomáš Bárta)

Řešení. Protože všechny členy a_i jsou přirozená čísla, platí

$$a_5 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 - 1 \geqq 1 + 1 + 1 - 1 = 2, \text{ a proto } a_5 \neq 1.$$

Číslo a_5 je tak dělitelné aspoň jedním prvočíslem.

Nyní si všimněme, že pro každé $n \geqq 4$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-3}a_{n-2}) + a_{n-2}a_{n-1} - 1 = \\ &= (a_{n-1} + 1) + a_{n-2}a_{n-1} - 1 = \\ &= a_{n-1}(a_{n-2} + 1), \end{aligned}$$

a tedy $a_{n-1} \mid a_n$. Nechť p je libovolný prvočíselný dělitel a_5, pak z relace $a_{n-1} \mid a_n$ plyne $p \mid a_6$, odkud zase plyne $p \mid a_7$ atd. Užitím principu matematické indukce vzhledem k n tak dostáváme, že $p \mid a_n$ pro každé $n \geqq 5$. Prvočíslo p tudíž dělí nekonečně mnoho členů dané posloupnosti. Tím je důkaz tvrzení z části a) hotov.

Označme $\mathcal{P}$ množinu všech prvočísel, která jsou děliteli nekonečně mnoha členů posloupnosti. Připusťme, že (jak už víme neprázdná) množina $\mathcal{P}$ je konečná, tj. $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_k\}$ pro vhodné k. Zřejmě pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ najdeme takový člen a_{n_i}, který je dělitelný p_i a má index $n_i \geqq 5$. Vzhledem k relaci $a_{n-1}|a_n$ (dokázané dříve pro každé $n \geqq 4$) pak platí $p_i \mid a_n$ pro všechna $n \geqq n_i$. Označíme-li nyní $N = \max(n_1, \ldots, n_k)$, bude číslo a_N dělitelné všemi prvočísly $p_1, \ldots, p_k$. Přirozené číslo $a_N + 1 > 1$ pak není dělitelné žádným prvočíslem z $\mathcal{P}$, musí tedy existovat prvočíslo $q \notin \mathcal{P}$ s vlastností $q \mid a_N + 1$. Toto prvočíslo q je pak také dělitelem čísla $a_{N+2} = a_{N+1}(a_N + 1)$, tudíž platí $q \mid a_n$ pro každé $n \geqq N + 2$, a proto $q \in \mathcal{P}$. Dostali jsme tak spor, který dokazuje tvrzení z části b) úlohy.

Poznámka. Z řešení části a) víme, že každé prvočíslo, které dělí některý člen posloupnosti počínaje třetím, dělí i všechny následující členy. Stačí tedy dokázat, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dělí aspoň jeden člen dané posloupnosti. Tento poznatek je důsledkem silnějšího tvrzení, totiž že *pro každé* $n \geqq 1$ *je číslo* a_{2n+3} *dělitelné aspoň* n *různými prvočísly.* Důkaz tohoto tvrzení zde uvádět nebudeme.

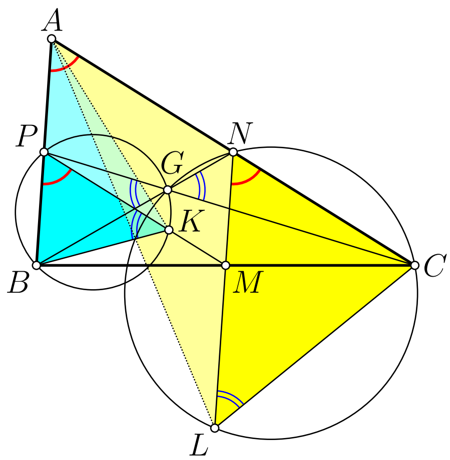
5. *V trojúhelníku ABC označme M, N, P po řadě středy stran BC, CA, AB a G jeho těžiště. Nechť kružnice opsaná trojúhelníku BGP protíná přímku MP v bodě K různém od P a kružnice opsaná trojúhelníku CGN protíná přímku MN v bodě L různém od N. Dokažte, že $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Střední příčka MP protíná těžnici BN mezi body B a G, takže bod K leží na polopřímce PM a $BKGP$ je tětivový čtyřúhelník. Podobně bod L leží na polopřímce NM a $CLGN$ je tětivový čtyřúhelník. S ohledem na $MP \parallel CA$ a $MN \parallel BA$ tak máme

$$|\sphericalangle BPK| = |\sphericalangle BPM| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MNC| = |\sphericalangle LNC|,$$

zatímco z obou tětivových čtyřúhelníků plyne

$$|\sphericalangle BKP| = |\sphericalangle BGP| = |\sphericalangle NGC| = |\sphericalangle NLC|.$$



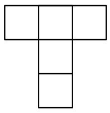
Vidíme, že trojúhelníky BPK a CNL jsou podobné podle věty *uu*. Díky tomu jsou podobné také trojúhelníky ABK a ACL, a to podle věty *sus*, neboť

$$\text{(i)} \quad |\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle PBK| = |\sphericalangle NCL| = |\sphericalangle ACL|,$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{|AB|}{|BK|} = 2 \cdot \frac{|PB|}{|BK|} = 2 \cdot \frac{|NC|}{|CL|} = \frac{|AC|}{|CL|}.$$

Tím je rovnost $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$ dokázána.

6. *Nechť $n \geqq 3$ je celé číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec*

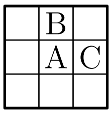


v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé.

(Jaroslav Zhouf)

Řešení. Jednotlivé čtverečky papíru $n \times n$ nazývejme dále *políčky*. Dokážeme, že přebarvení* všech n^2 bílých políček je po určitém počtu kroků možné, právě když platí $n > 3$ a zároveň je číslo n dělitelné dvěma nebo třemi.

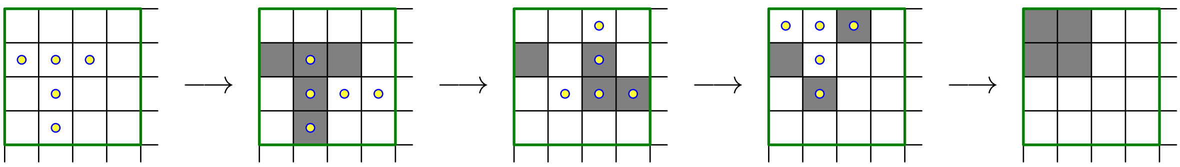
Ukažme nejprve, že pro $n = 3$ požadované přebarvení neexistuje. Uvažme k tomu na papíru 3×3 tři políčka A, B, C podle obrázku 1.



Obr. 1

Uvědomme si, že v každém kroku se přebarví políčko A a právě jedno z políček B nebo C. Pokud bychom po určitém počtu kroků všech 9 políček přebarvili, počty přebarvení políček B a C by byly liché, tudíž počet přebarvení políčka A by byl sudý, a proto by se ve výsledku políčko A nepřebarvilo, což je spor. Dále už proto budeme předpokládat, že platí $n \geqq 4$. Tvrzení z úvodního odstavce řešení dokážeme ve třech etapách.

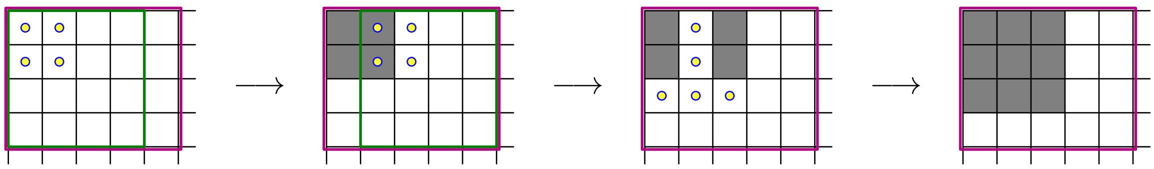
(i) Je-li n sudé, využijeme opakovaně postup podle obrázku 2, při kterém čtyřmi kroky v zeleně vyznačeném čtverci 4×4 přebarvíme právě 4 políčka jednoho čtverce 2×2. Papír $n \times n$ rozdělíme na $\left(\frac{1}{2}n\right)^2$ čtverců 2×2 a po řadě v každém z nich políčka uvedeným postupem přebarvíme. U těch čtverců, které jsou na hranici papíru, budeme konstrukci z obr. 2 vhodně otáčet, aby potřebný čtverec 4×4 ležel celý uvnitř papíru.



Obr. 2

(ii) Je-li n dělitelné třemi, využijeme opakovaně postup podle obrázku 3, který nejdříve využívá dvakrát konstrukci z obr. 2. Takto ve fialově vyznačeném obdélníku 4×5 přebarvíme právě 9 políček jednoho čtverce 3×3. Postup podobně jako v části (i)

* Budeme tím dále s výhodou mínit jak změnu barvy políčka z bílé na černou, tak i naopak.



Obr. 3

uplatníme k jednotlivým čtvercům 3×3, na které celý papír rozdělíme, přičemž pro hraniční čtverce konstrukci z obr. 3 opět vhodně otáčíme, aby potřebný obdélník 4×5 ležel celý uvnitř papíru.

(iii) Nyní budeme předpokládat, že n není dělitelné ani dvěma, ani třemi. Políčka papíru $n \times n$ v každém řádku označíme postupně čísly 0, 1, 2, $0, \ldots$ jako na obrázku 4.

0	1	2	0	1	$\cdots$
0	1	2	0	1	$\cdots$
0	1	2	0	1	$\cdots$
0	1	2	0	1	$\cdots$
0	1	2	0	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Obr. 4

Nechť a_i značí počet černě obarvených políček s číslem i, $i \in \{0, 1, 2\}$. Všimněme si, že parita každého ze tří čísel a_i se po každém kroku změní, neboť v něm měníme barvu některých políček pouze ve třech sousedních sloupcích, a to v každém z nich u lichého počtu políček. Jelikož na začátku máme $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, po libovolném počtu kroků bude platit $a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \pmod 2$.

Díky předpokladu $3 \nmid n$ je políček s číslem 0 o n (celý jeden sloupec) více nežli těch s číslem 2. Kdyby po některém počtu kroků byla všechna políčka obarvena černě, měli bychom pak $a_0 - a_2 = n$, což by s ohledem na předpoklad $2 \nmid n$ znamenalo, že čísla a_0 a a_2 mají různou paritu. To ale odporuje závěru z předchozího odstavce. Po žádném počtu kroků se nám tak nepodaří zadaný úkol splnit.