I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Průměrný věk dědy, babičky a jejich pěti vnoučat je 26 let. Průměrný věk samotných vnoučat je 7 let. Babička je o rok mladší než děda.

Kolik let je babičce? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik let mají všechna vnoučata dohromady?

Možné řešení. Vnoučata dohromady mají 35 let ($5 \cdot 7 = 35$). Děda, babička a vnoučata dohromady mají 182 let ($7 \cdot 26 = 182$). Děda a babička dohromady tedy mají 147 let ($182 - 35 = 147$).

Průměrný věk babičky a dědy je 73 a půl roku ($147 : 2 = 73{,}5$) a babička je o rok mladší než děda. Tedy babičce je 73 let (a dědovi 74 let; $73{,}5 \pm 0{,}5$).

Poznámka. Pokud b značí věk babičky a d věk dědy, potom informace za zadání lze zapsat jako

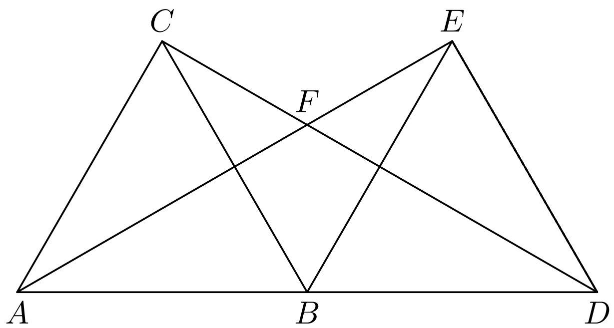
$$(d + b + 5 \cdot 7) : 7 = 26, \qquad d = b + 1.$$

Z prvního vztahu dostáváme $d + b = 26 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 21 \cdot 7 = 147$. Dosazením druhého vztahu dostáváme $2b + 1 = 147$, tedy $b = (147 - 1) : 2 = 73$.

Z7–I–2

Jsou dány dva shodné rovnostranné trojúhelníky ABC a BDE tak, že body A, B, D leží na jedné přímce a body C, E leží ve stejné polorovině vymezené onou přímkou. Průsečík CD a AE je označen F.

Určete velikost úhlu AFD. (*I. Jančigová*)

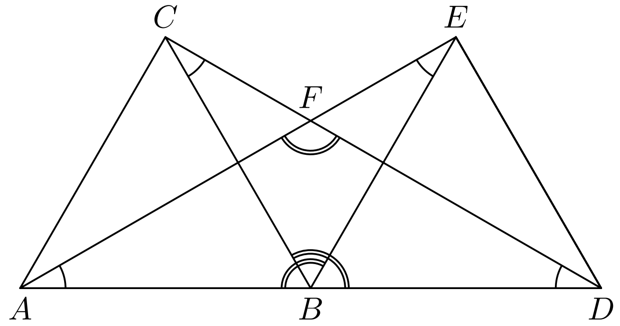


Nápověda. Vyplatí se zaměřit na skupiny navzájem shodných úhlů.

Možné řešení. Vnitřní úhel u vrcholu A, resp. D v trojúhelníku AFD je také vnitřním úhlem trojúhelníku ABE, resp. DBC. Trojúhelníky ABE a DBC jsou podle předpokladů rovnoramenné a navzájem shodné. Tedy také vnitřní úhly u vrcholů A a D jsou shodné.

Proto také trojúhelník AFD je rovnoramenný a úhel AFD je shodný s úhlem ABE, resp. DBC. Tento úhel je vnějším úhlem rovnostranného trojúhelníku, tedy má velikost $120°$.

Velikost úhlu AFD je $120°$.



Jiné řešení. Vnitřní úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost $60°$. Při otočení kolem bodu B o tento úhel po směru hodinových ručiček se bod A zobrazí na C a bod E se zobrazí na D. Tedy přímka AE se zobrazí na přímku CD.

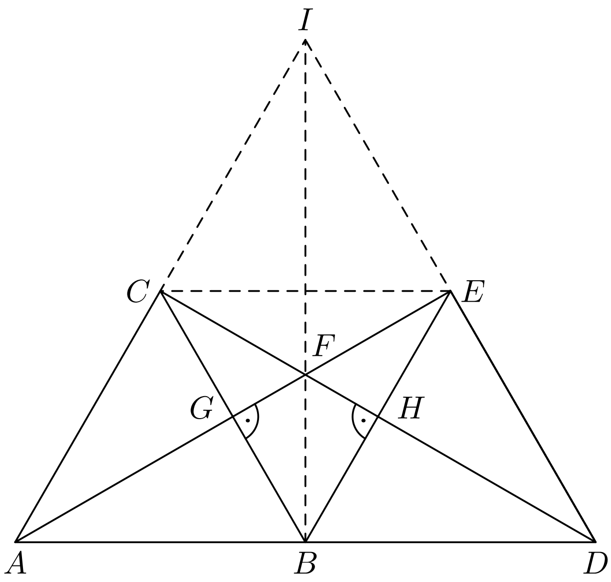
Úhel AFC, resp. EFD má proto velikost $60°$. Hledaný úhel AFD doplňuje tento úhel do úhlu přímého, tedy má velikost $120°$.

Poznámky. Z předpokladů vyplývá řada dalších vztahů, které mohou vést k alternativním zdůvodněním předchozího výsledku. Stručně uvádíme několik postřehů (pro dodatečná značení viz obrázek níže):

Čtyřúhelník $ABEC$, resp. $BDEC$ je kosočtvercem. Úhlopříčky v kosočtverci půlí příslušné vnitřní úhly a jsou navzájem kolmé.

- Z prvního faktu plyne, že úhel BAE, resp. BDC má velikost $30°$. Úhel AFD, což je zbylý vnitřní úhel v trojúhelníku AFD, má proto velikost $120°$ (součet vnitřních úhlů trojúhelníku je $180°$).
- Z druhého faktu známe vnitřní úhly u vrcholů G a H ve čtyřúhelníku $BHFG$. Vnitřní úhel u vrcholu B má velikost $60°$. Úhel AFD, což je zbylý vnitřní úhel ve čtyřúhelníku $BHFG$, má proto velikost $120°$ (součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je $360°$).

Zadaný útvar je částí rovnostranného trojúhelníku ADI, kde body B, C, E jsou středy jeho stran. Úsečky AE, CD a IB jsou výškami a současně osami souměrnosti tohoto trojúhelníku. Trojúhelníky AFD, DFI a IFA jsou navzájem shodné a dohromady tvoří trojúhelník ADI. Jejich vnitřní úhly u vrcholu F proto mají velikost $120°$ (třetina plného úhlu).



Z7–I–3

Obkročné číslo je takové přirozené číslo, v jehož zápise

- je každá nenulová číslice použita právě dvakrát,
- mezi dvěma stejnými nenulovými číslicemi se nachází právě tolik nul, jaká je hodnota těchto číslic.

Příklady obkročných čísel jsou např. 40001041 či 300103100.

Kolik existuje sedmimístných obkročných čísel, v jejichž zápise se vyskytují právě jedničky, dvojky a nuly? (*M. Papšo*)

Nápověda. Kolikrát jsou použity nuly v každém z hledaných čísel?

Možné řešení. Hledaná čísla jsou sedmimístná a obsahují právě dvě jedničky a právě dvě dvojky, tedy obsahují právě tři nuly. Tyto nuly oddělují v zápise čísla čtyři části, ve kterých se mohou nacházet jedničky a dvojky:

$$\dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots$$

Některé části mohou zůstat prázdné, některé nuly mohou být bezprostředně vedle sebe. Jedničky mohou být jedině v sousedních částech (odděleny jednou nulou), dvojky ob jednu část (odděleny dvěma nulami). Všechna čísla s těmito vlastnostmi, která nezačínají nulou, jsou v následující tabulce:

	$\overset{1}{\dots}0\overset{1}{\dots}0\dots0\dots$	$\dots0\overset{1}{\dots}0\overset{1}{\dots}0\dots$	$\dots0\dots0\overset{1}{\dots}0\overset{1}{\dots}$
$\overset{2}{\dots}0\dots0\overset{2}{\dots}0\dots$	1201020, 2101020	2010120, 2010210	2001201, 2002101
$\dots0\overset{2}{\dots}0\dots0\overset{2}{\dots}$	1012002, 1021002	—	—

Obkročných čísel s uvedenými vlastnostmi je osm.

Poznámka. Součástí úlohy je i popis postupu vedoucího ke správné odpovědi. V tomto případě jde o nějaký systém, aby bylo zřejmé, že se na nic nezapomnělo. Výčet možností bez přiměřeného zdůvodnění nelze hodnotit nejlepším stupněm.

Z7–I–4

Jarda měl napsánu posloupnost slabik:

ZU ZA NA NE LA LU CI SA MU EL

Písmena chtěl nahradit číslicemi od 0 do 9 tak, aby různým písmenům odpovídaly různé číslice a aby (v daném pořadí) vznikla vzestupná posloupnost dvojmístných čísel.

Uveďte možné Jardovo řešení, nebo vysvětlete, že to možné není. (*J. Zhouf*)

Nápověda. Jarda se nejspíš soustředil na opakující se písmena.

Možné řešení. Ve dvojici za sebou stojících slabik ZU ZA by musela být číslice nahrazující písmeno U menší než číslice nahrazující písmeno A.

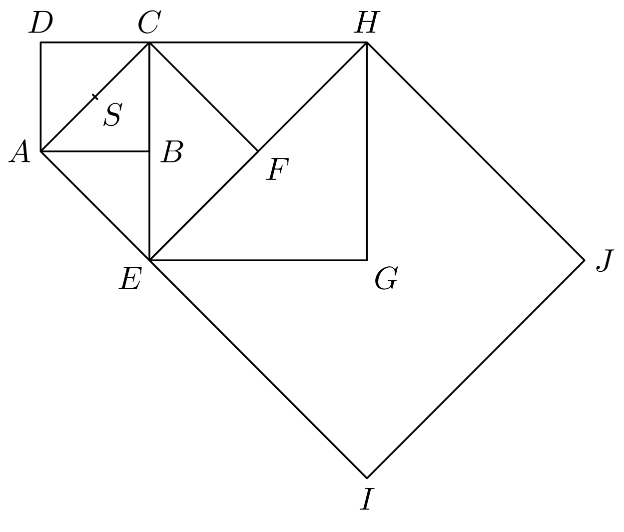
Ve dvojici za sebou stojících slabik LA LU by musela být číslice nahrazující písmeno A menší než číslice nahrazující písmeno U.

Tyto dva požadavky jsou neslučitelné, a proto Jardovu úlohu vyřešit nelze.

Z7–I–5

Na obrázku jsou znázorněny čtverce $ABCD$, $EFCA$, $GHCE$ a $IJHE$. Body S, B, F a G jsou po řadě středy těchto čtverců. Úsečka AC je dlouhá 1 cm.

Určete obsah trojúhelníku IJS. (*E. Semerádová*)

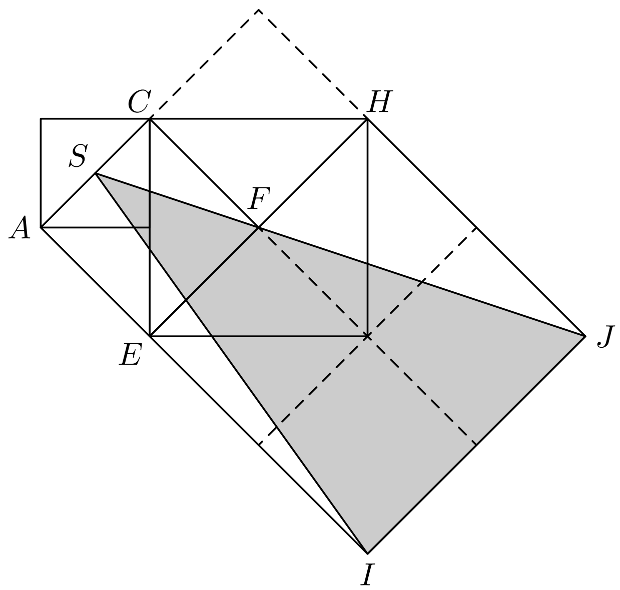


Nápověda. Obsah trojúhelníku je polovinou obsahu nějakého obdélníku.

Možné řešení. Obsah trojúhelníku IJS je roven polovině obsahu obdélníku se stranami IJ a IA. Strana IJ je stranou čtverce $IJHE$, strana IA je součtem strany čtverce $IJHE$ a strany čtverce $EFCA$.

Čtverec $IJHE$ má dvojnásobnou stranu vzhledem ke čtverci $EFCA$, a ta měří 1 cm. Tedy strana IJ měří 2 cm a strana IA měří 3 cm. Obsah trojúhelníku IJS je roven

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3\,(\mathrm{cm}^2).$$



Poznámka. Při jemnějším dělením naznačené čtvercové sítě lze k témuž výsledku dospět názorným počítáním čtverečků, resp. trojúhelníčků.

Z7–I–6

Eva si myslela dvě přirozená čísla. Čísla nejprve správně sečetla, poté odečetla. V obou případech dostala dvojmístný výsledek. Součin takto vzniklých dvojmístných čísel byl 645.

Která čísla si Eva myslela? (*E. Novotná*)

Nápověda. Každé přirozené číslo má konečný počet dělitelů.

Možné řešení. Číslo 645 lze zapsat jako součin dvou přirozených čísel následujícími způsoby:

$$645 = 1 \cdot 645 = 5 \cdot 129 = 15 \cdot 43 = 3 \cdot 215.$$

Součinitelé jsou dvoumístní pouze v posledním případě, tedy součet Eviných čísel byl 43 a rozdíl 15.

Čísla 43 a 15 vznikla tak, že k většímu z Eviných čísel se jednou přičetlo a jednou se od něj odečetlo to menší. Tedy větší Evino číslo je přesně mezi (tzn. je průměrem) 43 a 15 a menší Evino číslo je polovinou rozdílu mezi 43 a 15. Eva si myslela čísla

$$\frac{43+15}{2} = 29, \qquad \frac{43-15}{2} = 14.$$

Poznámka. Pokud větší z Eviných čísel označíme v a to menší m, potom předchozí vztahy můžeme zapsat jako

$$v + m = 43, \qquad v - m = 15.$$

Odtud lze formálně odvodit, že

$$(v + m) + (v - m) = 43 + 15, \qquad (v + m) - (v - m) = 43 - 15,$$

a tedy

$$v = \frac{43 + 15}{2} = 29, \qquad m = \frac{43 - 15}{2} = 14.$$