I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Jsou dána tři navzájem různá čísla. Průměr průměru dvou menších čísel a průměru dvou větších čísel je roven průměru všech tří čísel. Průměr nejmenšího a největšího čísla je 2022.

Určete součet tří daných čísel. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete jedno z čísel pomocí zbylých dvou.

Možné řešení. Označme tři čísla se zadání jako a, b, c, přičemž $a < b < c$. První podmínka znamená

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{a+b+c}{3}. \qquad (*)$$

Tuto rovnost můžeme upravit následovně:

$$\begin{aligned} \frac{a+2b+c}{4} &= \frac{a+b+c}{3}, \\ 3a+6b+3c &= 4a+4b+4c, \\ 2b &= a+c, \\ b &= \frac{a+c}{2}. \end{aligned}$$

Tedy b je průměrem a a c, jehož hodnotu však známe: $b = \frac{a+c}{2} = 2022$.

Z uvedeného plyne, že součet daných čísel je roven

$$a+b+c = b+2b = 6066.$$

Poznámky. Ze zadaných údajů není možné určit čísla jako taková, pouze jejich součet. To, že úloha je smysluplná, tedy že existují čísla s uvedenými vlastnostmi, lze ukázat např. na trojici $a = 2020$, $b = 2022$, $c = 2024$.

Hned zkraje si lze všimnout, že pokud b je průměrem a a c, potom každá taková trojice čísel vyhovuje první podmínce ze zadání: jak průměr průměrů $\frac{a+b}{2}$ a $\frac{b+c}{2}$, tak průměr všech $\frac{a+b+c}{3}$ je roven $b = \frac{a+c}{2}$. Pro podmínky typu $(*)$ — tj. lineární vzhledem k a, b, c — platí, že kterékoli z čísel a, b, c je jednoznačně určeno zbylými dvěma. S tímto dodatkem lze předchozí postřeh považovat za vyhovující náhradu výše uvedených úprav rovnosti $(*)$.

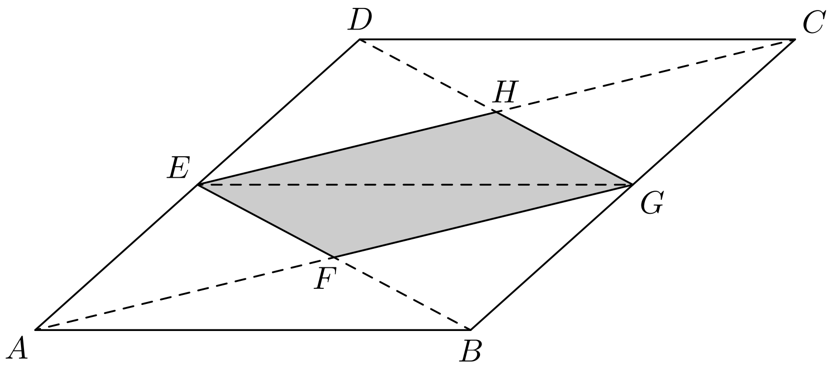
Z8–I–2

Čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtvercem se stranou délky 6 cm a výškou 4 cm. Bod E je středem strany AD, bod G je středem strany BC, bod F je průsečíkem úseček AG a BE, bod H je průsečíkem úseček CE a DG.

Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Pomozte si obrázkem s doplněnou úsečkou EG.

Možné řešení. Úsečka EG rozděluje kosočtverec $ABCD$ na dva shodné kosodélníky $ABGE$ a $EGCD$ (body E a G jsou středy stran, tedy úsečky AE, BG, ED, GC jsou navzájem shodné a přímky AB, EG, CD navzájem rovnoběžné). Zbylé úsečky ze zadání jsou úhlopříčkami těchto kosodélníků a body F, H jsou jejich průsečíky:



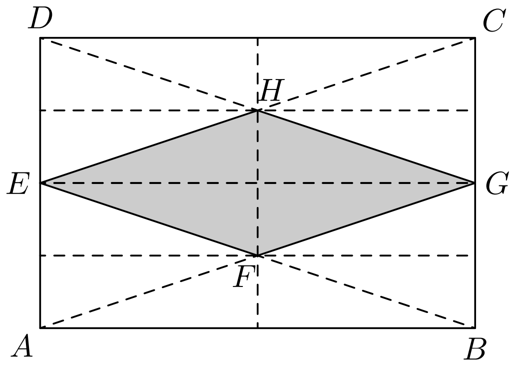
Každý kosodélník je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky se stejnými obsahy (každé dva sousední trojúhelníky mají shodné strany ležící na jedné přímce a společnou výšku vzhledem k této přímce).

Kosočtverec $ABCD$ je tak rozdělen na osm trojúhelníků se stejnými obsahy a čtyřúhelník $EFGH$ je tvořen dvěma z těchto osmi trojúhelníků. Tento čtyřúhelník tedy zaujímá dvě osminy, tj. jednu čtvrtinu obsahu daného kosočtverce.

Obsah kosočtverce $ABCD$ je roven $6 \cdot 4 = 24\,(\mathrm{cm}^2)$, tedy

$$S_{EFGH} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 6\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámky. V uvedeném řešení není podstatné, která z úhlopříček kosočtverce je kratší a která delší. Protože se zajímáme výhradně o obsahy, můžeme dokonce pracovat s jakýmkoli kosodélníkem, který má stejnou stranu a výšku jako původní kosočtverec. Proto můžeme úlohu řešit v obdélníku se stranami 6 cm a 4 cm:



Dodatečné dělení pomocí rovnoběžek se stranami rozděluje obdélník $ABCD$ na 16 shodných trojúhelníků, z nichž 4 tvoří čtyřúhelník $EFGH$. Tento čtyřúhelník tedy zaujímá $\frac{4}{16}$, tj. jednu čtvrtinu obsahu obdélníku.

Z8–I–3

Pro posloupnost čísel začínající

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \dots$$

platí, že každé číslo počínaje třetím je součtem předchozích dvou.

Kterou číslicí končí 2023. číslo v této posloupnosti? (*J. Mazák*)

Nápověda. Pomozte si posloupností tvořenou posledními číslicemi.

Možné řešení. Poslední číslice každého čísla odpovídá zbytku po dělení onoho čísla desíti. Stačí se tedy zaobírat posloupností odpovídajících zbytků:

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 1,\ 8,\ \dots,$$

tzn. posloupností, v níž každé číslo počínaje třetím je zbytkem součtu předchozích dvou po dělení desíti. Tato posloupnost se po 12 členech opakuje:

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 1,\ 8,\ 9,\ 7,\ 6,\ 3,\ 9,\ 2;\ 1,\ 3,\ \dots$$

Tedy např. 1., 13., 25., 145. či 2017. člen posloupnosti tvoří stejná čísla.

Číslo 2023 po dělení 12 dává 168 a zbytek 7. Tedy 2023. člen této posloupnosti je stejný jako ten sedmý, a to je číslo 9.

2023. číslo v dané posloupnosti končí číslicí 9.

Z8–I–4

Ctibor na mapě s měřítkem 1 : 50 000 vyznačil čtvercový pozemek a vypočítal si, že jeho strana ve skutečnosti odpovídá 1 km. Mapu zmenšil na kopírce tak, že vyznačený čtverec měl obsah o $1{,}44\,\mathrm{cm}^2$ menší než původně.

Jaké bylo měřítko takto zmenšené mapy? (*M. Petrová*)

Nápověda. Jaké rozměry měl vyznačený pozemek na původní mapě?

Možné řešení. Na původní mapě měla strana pozemku délku 2 cm ($2\,\mathrm{cm} \cdot 50\,000 = 100\,000\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{km}$). Tedy obsah příslušného čtverce byl $4\,\mathrm{cm}^2$.

Po zmenšení mapy byl obsah nového čtverce $2{,}56\,\mathrm{cm}^2$ ($2{,}56 + 1{,}44 = 4$). Tedy strana tohoto čtverce měla délku 1,6 cm ($1{,}6^2 = 2{,}56$).

Oněch 1,6 cm na mapě odpovídá stále stejnému 1 km ve skutečnosti. Měřítko takto zmenšené mapy tedy bylo

$$1{,}6 : 100\,000 = 1 : 62\,500.$$

Z8–I–5

Petra měla napsána přirozená čísla od 1 do 9. Dvě z těchto čísel sečetla, smazala a výsledný součet napsala místo smazaných sčítanců. Měla tak napsáno osm čísel, která se jí podařilo rozdělit do dvou skupin se stejným součinem.

Určete jaký největší mohl být tento součin. (*E. Novotná*)

Nápověda. Vyplatí se zaměřit na prvočísla.

Možné řešení. Pro porovnání součinů vzniklých skupin čísel budou užiteční prvočíselní činitelé. Aby součiny čísel v obou skupinách byly stejné, musí být celkové počty jednotlivých prvočinitelů sudé. Pokud je počet některých prvočinitelů lichý, potom rozdělení do skupin se stejným součinem není možné.

Prvočísla mezi danými čísly jsou pouze 2, 3, 5, 7, přičemž 5 a 7 se vyskytují právě jednou. Vzhledem k výskytu 5 a 7 stačí uvažovat tři případy, které mohou vést k řešení, a ty postupně rozebereme:

a) Petra sečetla něco s 5, aby dostala násobek 7. To mohla udělat dvojím způsobem:

- Sečetla $5 + 2$ a dostala osmici čísel 1, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 9. Tuto osmici lze rozdělit do skupin se stejným součinem:

$$1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504.$$

- Sečetla $5 + 9$ a dostala osmici čísel 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14. Tuto osmici lze rozdělit do skupin se stejným součinem:

$$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 14 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336.$$

b) Petra sečetla něco se 7, aby dostala násobek 5. To mohla udělat dvojím způsobem:

- Sečetla $7 + 3$ a dostala osmici čísel 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Tuto osmici nelze rozdělit do skupin se stejným součinem, protože 3 se v prvočíselných rozkladech těchto čísel vyskytuje celkem třikrát.

- Sečetla $7 + 8$ a dostala osmici čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 15. Tuto osmici nelze rozdělit do skupin se stejným součinem, protože 3 se v prvočíselných rozkladech těchto čísel vyskytuje celkem pětkrát.

c) Petra sečetla $5+7$ a dostala osmici čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12. Tuto osmici nelze rozdělit do skupin se stejným součinem, protože 3 se v prvočíselných rozkladech těchto čísel vyskytuje celkem pětkrát (či 2 se vyskytuje devětkrát).

Petra mohla dostat buď součin 504, nebo 336. Největší možný součin je tedy 504.

Poznámky. Rozdělení do skupin se stejným součinem v případě a) nejsou jediná možná (např. 1 může být kdekoli).

Počet všech dvojic, které lze utvořit z daných devíti čísel, je 36. S úvodním pozorováním jsme počet případů do diskuze podstatně snížili.

Součástí úlohy je i popis postupu vedoucího ke správné odpovědi. Nalezené součiny bez přiměřeného zdůvodnění, že jiné možné nejsou, nelze hodnotit nejlepším stupněm.

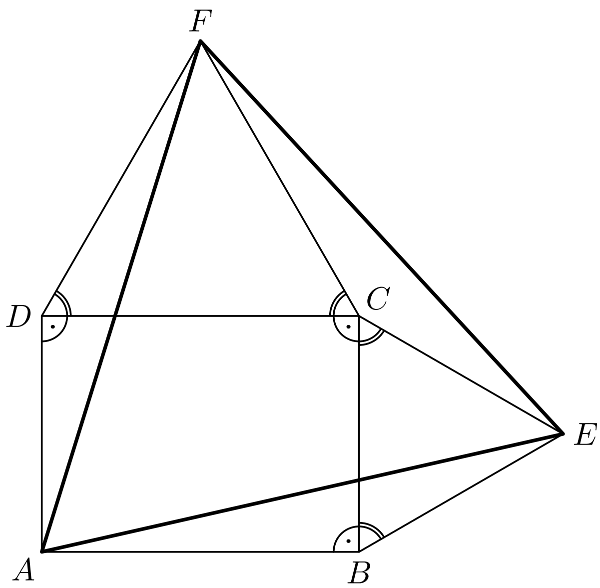
Z8–I–6

Je dán obdélník $ABCD$ a body E, F tak, že trojúhelníky BEC a CFD jsou rovnostranné a každý z nich má s pravoúhelníkem $ABCD$ společnou pouze stranu.

Zdůvodněte, že také trojúhelník AEF je rovnostranný. (*J. Švrček*)

Nápověda. Vyplatí se zaměřit na skupiny shodných objektů.

Možné řešení. Vzájemná poloha obdélníku a dvou rovnostranných trojúhelníků je znázorněna na obrázku, ve kterém jsou také vyznačeny některé navzájem shodné úhly:



Rovnostrannost trojúhelníku AEF plyne ze vzájemné shodnosti trojúhelníků ABE, FCE a FDA, a tu zdůvodníme následovně:

- strany AB, FC a FD jsou navzájem shodné, neboť protější strany AB a CD obdélníku jsou shodné a trojúhelník CFD je rovnostranný,

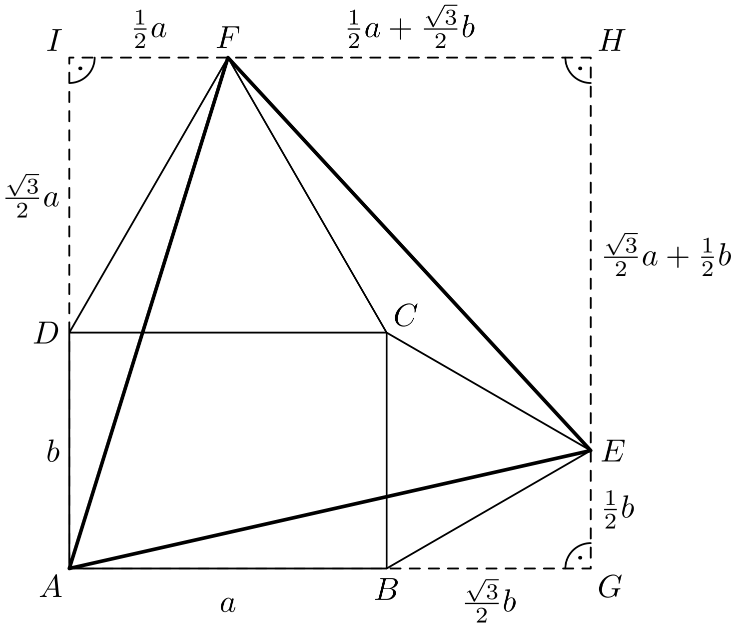
- strany BE, CE a DA jsou navzájem shodné, neboť protější strany DA a BC obdélníku jsou shodné a trojúhelník BEC je rovnostranný,
- úhly ABE, FCE a FDA jsou navzájem shodné, neboť všechny mají stejnou velikost:

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle FDA| = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ, \qquad |\sphericalangle FCE| = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ.$$

Podle věty *sus* jsou trojúhelníky ABE, FCE a FDA navzájem shodné. Shodují se tedy i ve zbylých stranách, což jsou zároveň strany trojúhelníku AEF. Proto je trojúhelník AEF rovnostranný.

Poznámky. V úvodním obrázku je znázorněn obdélník, jehož strana AB je delší než BC. Tento předpoklad nehraje v dalším žádnou roli — stejné argumenty, a tedy i závěr, platí pro jakýkoli pravoúhelník (včetně čtverce).

Pokud bychom strany obdélníku označili a a b, lze se ke shodnosti stran AE, EF a FA dopočítat pomocí Pythagorovy věty ve vhodných pravoúhlých trojúhelnících. Pro přehlednost opišme danému útvaru obdélník $AGHI$ jako na obrázku:



Doplněné rozměry jsou odvozeny z rovnostrannosti trojúhelníků BEC a CFD. Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku AGE platí

$$|AE|^2 = |AG|^2 + |GE|^2 = \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 =$$
$$= a^2 + \sqrt{3}ab + \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab.$$

Obdobným způsobem lze vyjádřit také stranu EF, resp. FA jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku EHF, resp. FIA. Vychází pokaždé stejný výraz, tedy trojúhelník AEF je rovnostranný.