72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Mach si známkou z poslední pětiminutovky zlepšil celkový průměr z 2,6 na 2,5. Kolik pětiminutovek celkem psal? Určete všechny možnosti. (Průměry jsou přesné a možné známky jsou 1, 2, 3, 4, 5.)

2. Pro reálná čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$. Dokažte, že součin

$$(a + bc)(b + ca)(c + ab)$$

je nezáporný. Určete rovněž všechny trojice (a, b, c), pro které je daný součin roven nule.

3. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme F průsečík úhlopříček AC, BE a G průsečík prodloužených stran EA, CB. Který ze čtyřúhelníků $CDEF$ a $AGBF$ má větší obsah?

4. Čtyři navzájem různá prvočísla p, q, r, s splňují rovnost

$$72 + p = q \cdot r \cdot s.$$

Určete nejmenší možnou hodnotu p.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 4. dubna 2023

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Mach si známkou z poslední pětiminutovky zlepšil celkový průměr z* 2,6 *na* 2,5*. Kolik pětiminutovek celkem psal? Určete všechny možnosti. (Průměry jsou přesné a možné známky jsou* 1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*.)* (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že Mach celkem napsal 6 nebo 16 písemek.

Poslední známka mohla být 1 nebo 2, jinak by se celkový průměr naopak zhoršil. Tyto dva případy dále rozebereme, když v obou z nich označíme p počet známek před poslední písemkou a s jejich součet.

(i) Byla-li poslední známka 1, je zadání úlohy vyjádřeno soustavou rovnic

$$\frac{s}{p} = 2{,}6 = \frac{13}{5} \qquad \text{a} \qquad \frac{s+1}{p+1} = 2{,}5 = \frac{5}{2},$$

po úpravě $5s = 13p$ a $2s = 5p + 3$. Abychom vyloučili neznámou s, od první rovnice vynásobené dvěma odečteme druhou rovnici vynásobenou pěti. Pro neznámou p tak dostaneme rovnici $0 = 2 \cdot 13p - 5(5p + 3)$ s jediným řešením $p = 15$, kterému odpovídá $s = 13p/5 = 39$. Hodnoty $p = 15$ a $s = 39$ jsou přitom možné, například při 6 dvojkách a 9 trojkách. Mach tedy skutečně mohl celkem napsat $p + 1 = 16$ písemek.

(ii) V případě známky 2 získáme rovnice $s/p = 13/5$ a $(s + 2)/(p + 1) = 5/2$, po úpravě $5s = 13p$ a $2s = 5p + 1$. Podobným odečtením jako v (i) dostaneme rovnici $0 = 2 \cdot 13p - 5(5p + 1)$ s jediným řešením $p = 5$, kterému odpovídá $s = 13p/5 = 13$. Hodnoty $p = 5$ a $s = 13$ vyjdou například při 2 dvojkách a 3 trojkách. Mach tedy skutečně mohl celkem napsat $p + 1 = 6$ písemek.

POZNÁMKA. Výpisy příkladů známek lze nahradit konstatováním, že součet známek o daném počtu p může zřejmě nabýt všech celočíselných hodnot s od p do $5p$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Stejně jako v prvním řešení označíme p počet známek před poslední písemkou, s jejich součet a ukážeme, že (p, s) je jedna z dvojic $(5, 13)$ nebo $(15, 39)$. Příklady možných známek pro tyto dvojice opakovat v druhém řešení už nebudeme.

Z vyjádření průměru s/p zlomkem v základním tvaru $13/5$ plyne, že číslo p je násobkem pěti, tedy $p = 5k$ pro vhodné přirozené k. Z rovnosti $s/p = 13/5$ pak máme $s = 13k$, tudíž podmínku na poslední známku z můžeme zapsat rovnicí

$$2{,}5 = \frac{5}{2} = \frac{s+z}{p+1} = \frac{13k+z}{5k+1}.$$

Úpravou $5(5k + 1) = 2(13k + z)$, odkud získáme ekvivalentní podmínku $2z = 5 - k$. Vidíme, že v úvahu připadají pouze lichá $k = 1$ a $k = 3$. Hodnotě $k = 1$ podle $2z = 5 - k$ odpovídá $z = 2$ a z rovností $p = 5k$ a $s = 13k$ vychází $p = 5$ a $s = 13$. Podobně pro $k = 3$ jsou odpovídající hodnoty $z = 1$, $p = 15$ a $s = 39$.

POZNÁMKA. Úvodní úvahu o dělitelnosti lze při předchozím postupu užít i později. Předtím totiž můžeme sestavit pro neznámé p, s, z soustavu rovnic

$$\frac{s}{p} = \frac{13}{5} \qquad \text{a} \qquad \frac{s+z}{p+1} = \frac{5}{2},$$

tu pak upravit například do tvaru

$$5s = 13p, \quad 2s + 2z = 5p + 5$$

a teprve nyní využít dělitelnost, nebo ještě z posledních dvou rovnic podobně jako v prvním řešení vyloučit neznámou s. Tehdy dostaneme rovnici

$$5 \cdot (2s + 2z) - 2 \cdot 5s = 5 \cdot (5p + 5) - 2 \cdot 13p \quad \text{neboli} \quad 10z = 25 - p.$$

Odtud už plyne, že číslo p je liché, dělitelné pěti a menší než 25.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

Cestou prvního řešení

A1. Konstatování, že poslední známkou z mohla být jednička nebo dvojka: 1 bod.
A2. Vyřešení případů $z = 1$ a $z = 2$: 5 bodů za oba případy, 3 body za jeden případ. Chybí-li příklady možných známek, strhněte 1 bod (za jeden případ i celkem za oba).

Cestou druhého řešení

B1. Zdůvodnění, že $p = 5k$ a $s = 13k$: 1 bod.
B2. Vyjádření z (nebo $2z$) pomocí k: 3 body
B3. Určení obou trojic (p, s, z) a vyloučení jiných: 1 bod.
B4. Příklady možných známek pro určené dvojice (p, s): 1 bod.

Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1} + \mathrm{A2}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2} + \mathrm{B3} + \mathrm{B4})$ bodů.

2. *Pro reálná čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Dokažte, že součin*

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

je nezáporný. Určete rovněž všechny trojice (a,b,c), pro které je daný součin roven nule. (Patrik Bak)

Řešení. Z dané podmínky plyne $a = 1-b-c$. Proto první činitel zkoumaného součinu má vyjádření

$$a+bc = (1-b-c)+bc = (1-b)(1-c).$$

Analogicky přepíšeme také zbylé dva činitele. Celý součin je tak roven

$$(1-b)(1-c)\cdot(1-c)(1-a)\cdot(1-a)(1-b) = \big[(1-a)(1-b)(1-c)\big]^2.$$

Protože druhá mocnina každého reálného čísla je nezáporná, poslední výraz má skutečně nezápornou hodnotu. Ta je přitom rovna nule, právě když je základ druhé mocniny roven nule, tj. $(1-a)(1-b)(1-c)=0$. To zřejmě nastane jen tehdy, pokud je aspoň jedno z čísel a, b, c rovno 1. Platí-li například $a=1$, pak zadaná podmínka $a+b+c=1$ přejde do tvaru $b+c=0$, takže ji splňují právě ty dvojice (b,c), které jsou tvaru $(b,c)=(t,-t)$ pro vhodné reálné číslo t. Všechny hledané trojice (a,b,c) tak jsou právě tvaru

$$(1,t,-t), \qquad (t,1,-t), \qquad (t,-t,1),$$

kde t je libovolné reálné číslo.

Poznámka. Popišme dva jiné vhodné způsoby úprav činitelů zadaného součinu.

Při prvním z nich využijeme rovnost $a+b+c=1$ následovně:

$$a+bc = a\cdot 1+bc = a(a+b+c)+bc = a^2+ab+ac+bc = (a+b)(a+c).$$

Podobně $b+ca=(b+c)(b+a)$ a $c+ab=(c+a)(c+b)$, takže dohromady

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = (a+b)(a+c)\cdot(b+c)(b+a)\cdot(c+a)(c+b) = \big[(a+b)(b+c)(c+a)\big]^2.$$

Odtud plyne stejný závěr jako v původním řešení, neboť například $a+b=1-c$.

Při druhém způsobu dosadíme vyjádření $a=1-b-c$ do všech tří činitelů:

$$\begin{aligned}
a+bc &= 1-b-c+bc = (1-b)(1-c),\\
b+ca &= b+c-bc-c^2 = (b+c)(1-c),\\
c+ab &= c+b-b^2-bc = (b+c)(1-b).
\end{aligned}$$

Vynásobením těchto tří rovností obdržíme

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = (1-b)(1-c)\cdot(b+c)(1-c)\cdot(b+c)(1-b) = \big[(b+c)(1-b)(1-c)\big]^2.$$

Odtud opět plyne stejný závěr jako v původním řešení, neboť $b+c=1-a$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Úprava některého z činitelů daného součinu na součin dvou výrazů typu $1-a$ nebo $b+c$: 1 bod, 2 body udělte za takovou úpravu všech tří činitelů.

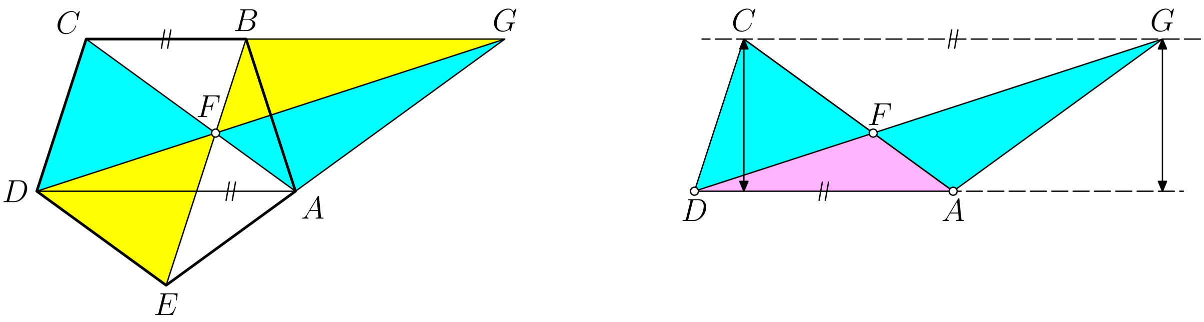
A2. Důkaz nezápornosti daného součinu: 2 body.

A3. Popis všech trojic (a,b,c) pro které je daný součin roven nule: 2 body, z toho 1 bod, je-li odvozena pouze skupina podmínek typu $a=1$ nebo $b+c=0$, avšak chybí popis odpovídajících trojic (a,b,c), jak je zadáním úlohy vyžadováno. Vyhovující je i slovní popis: Jsou to právě ty trojice reálných čísel, v nichž je některé číslo rovno 1 a součet zbylých dvou čísel je roven 0. Za podmínky typu $a+bc=0$ ovšem žádný bod neudělujte.

Celkem pak udělte A1 + A2 + A3 bodů.

3. *V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme F průsečík úhlopříček AC, BE a G průsečík prodloužených stran EA, CB. Který ze čtyřúhelníků $CDEF$ a $AGBF$ má větší obsah?* (Mária Dományová)

Řešení. Ukážeme, že porovnávané obsahy čtyřúhelníků $CDEF$ a $AGBF$ jsou si rovny.



Obr. 1

Ze souměrností pravidelného pětiúhelníku (podrobně posouzených v řešení příkladu 5 z domácího kola) plyne, že body D, F, G leží v tomto pořadí na jedné přímce a že platí $BC \parallel AD$. Dohromady dostáváme, že F je průsečík úhlopříček lichoběžníku $GCDA$ se základnami GC a DA. Podle jednoho pravidla dva trojúhelníky vymezené rameny lichoběžníku a jeho úhlopříčkami mají stejný obsah, v našem případě tak platí $S_{DFC} = S_{AFG}$. Pro úplnost tuto rovnost dokážeme v následujícím odstavci.

Díky $DA \parallel GC$ mají trojúhelníky DAC a DAG shodné výšky z vrcholů C a G ke společné straně DA. Proto pro jejich obsahy platí $S_{DAC} = S_{DAG}$, přitom

$$S_{DAC} = S_{DAF} + S_{DFC} \qquad \text{a} \qquad S_{DAG} = S_{DAF} + S_{AFG}.$$

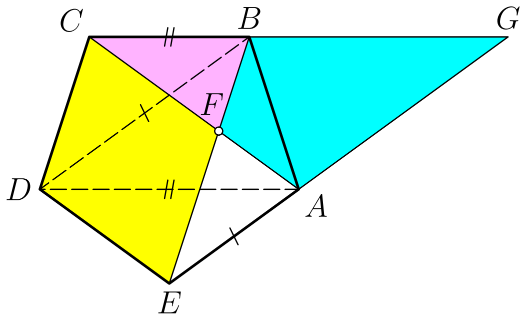
Porovnáním už získáváme rovnost $S_{DFC} = S_{AFG}$, kterou jsme chtěli dokázat.

Nyní si povšimneme, že oba zadané čtyřúhelníky $CDEF$ a $AGBF$ jsou souměrné podle přímky DG, která tak půlí obsah každého z nich. Proto z rovnosti $S_{DFC} = S_{AFG}$ po násobení dvěma dostaneme $S_{CDEF} = S_{AGBF}$. Tím je tvrzení z úvodní věty řešení dokázáno.

Poznámka. Z důvodu symetrie jsme namísto dvojice trojúhelníků DFC a AFG mohli uvážit dvojici trojúhelníků DFE a BFG. Takové obměny dalších řešení už zmiňovat nebudeme (ani v závěrečných pokynech k bodování). Dohodneme se rovněž, že zjevné důsledky souměrností pětiúhelníku $ABCDE$ budeme dále uvádět bez odkazů.

Jiné řešení. Zadané čtyřúhelníky $CDEF$, $AGBF$ doplníme týmž trojúhelníkem BCF po řadě na čtyřúhelník $BCDE$ a trojúhelník AGC (obr. 2). Místo rovnosti $S_{CDEF} = S_{AGBF}$ dále dokážeme ekvivalentní rovnost $S_{BCDE} = S_{AGC}$. K tomu označíme a délku stran daného pětiúhelníku, u délku jeho úhlopříček a v vzdálenost mezi libovolnou stranou a s ní rovnoběžnou úhlopříčkou.

Pro obsah lichoběžníku $BCDE$ platí vzorec $S_{BCDE} = \frac{1}{2}(a+u)v$. Díky rovnoběžníku $AGBD$ má trojúhelník AGC stranu GC délky $|GB| + |BC| = u + a$ a výška k této straně má velikost v, tedy jeho obsah je rovněž $\frac{1}{2}(a+u)v$. Tím je rovnost $S_{BCDE} = S_{AGC}$ dokázána.



Obr. 2

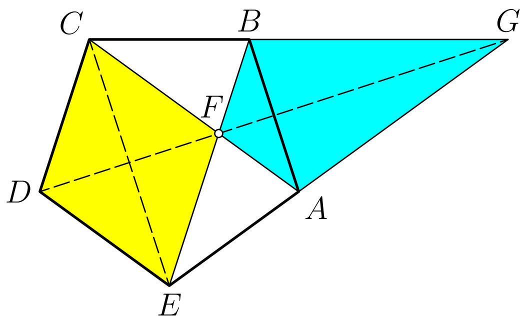
Jiné řešení. Jelikož oba čtyřúhelníky $CDEF$ a $AGBF$ mají navzájem kolmé úhlopříčky, pro jejich obsahy platí vzorce

$$S_{CDEF} = \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |FD| \qquad \text{a} \qquad S_{AGBF} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |GF|.$$

Tyto obsahy tak budou stejné, bude-li platit $|EC| \cdot |FD| = |AB| \cdot |GF|$ neboli

$$|EC| : |AB| = |GF| : |FD|. \tag{1}$$

K důkazu (1) využijeme příčku BF trojúhelníku GCD, která je rovnoběžná s jeho stranou CD (viz obr. 3). Proto bod F dělí stranu GD ve stejném poměru, jako bod B dělí stranu GC, tj. platí $|GF| : |FD| = |GB| : |BC|$. Vztah (1) tudíž můžeme přepsat ve tvaru $|EC| : |AB| = |GB| : |BC|$. Poslední skutečně platí, neboť $|EC| = |AD| = |GB|$ a $|AB| = |BC|$.



Obr. 3

Jiné řešení. Při posledním postupu dokážeme rovnost $S_{EFC} = S_{GBF}$, z níž rovněž zřejmě plyne kýžený závěr o rovnosti obsahů čtyřúhelníků $DCEF$ a $AGBF$ (viz obr. 3).

Podle řešení úlohy D3 k příkladu 5 domácího kola víme, že v pravidelném pětiúhelníku pro délku stran a a délku úhlopříček u platí $u : a = a : (u - a)$ (tzv. zlatý řez), což dále využijeme jako rovnost $a^2 = (u - a)u$. Tu můžeme přepsat ve tvaru $|FC| \cdot |FE| = |BF| \cdot |BG|$, neboť z kosočtverců $CDEF$ a $AGBD$ plyne $|FC| = |FE| = a$ a $|BG| = u$, odkud $|BF| = |BE| - |FE| = u - a$. Podle známého vzorce* tak bude slíbená rovnost $S_{EFC} = S_{GBF}$ dokázána, ověříme-li shodnost úhlů EFC a GBF. To jsou ale vnější úhly při vrcholech F a B trojúhelníku FBC se stranami FC a BC téže délky a. Proto jsou úhly EFC a GBF skutečně shodné.

* Obsah každého trojúhelníku je roven jedné polovině součinu délek dvou jeho stran se sinem úhlu, který tyto dvě strany svírají.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Zjevné důsledky osových souměrností pravidelného pětiúhelníku není nutné dokazovat (ani zmiňovat, že jsou známé z domácího kola); totéž se týká i pravidla o lichoběžníku z prvního řešení.

U postupu z prvního řešení udělte 1 bod za přechod od porovnání obsahů $CDEF$ a $AGBF$ k porovnání jejich polovin, při tomto postupu obsahů trojúhelníků CDF a AGF. Podle úplnosti důkazu jejich rovnosti udělte 0–5 bodů, z toho 1 bod za výchozí pozorování, že $DA \parallel GC$.

U postupu z druhého řešení udělte 2 body za přechod od porovnání obsahů $CDEF$ a $AGBF$ k ekvivalentnímu porovnání obsahů čtyřúhelníku $BCDE$ a trojúhelníku AGC. Podle úplnosti důkazu jejich rovnosti udělte 0–4 body, z toho 1 bod za konstatování, že $BCDE$ je lichoběžník a 2 body za rovnost $|GB| = u$.

U postupu z třetího řešení udělte 1 bod za vyjádření obsahů obou čtyřúhelníků užitím součinu délek jejich úhlopříček a 0–5 bodů za úplnost důkazu jejich rovnosti, z toho 2 body za závěr spojený s příčkou BF trojúhelníku GCD a 2 body za shodnost úsečky GB s úhlopříčkami pětiúhelníku.

U postupu z čtvrtého řešení udělte 1 bod za přechod od porovnání obsahů $CDEF$ a $AGBF$ k porovnání jejich polovin, při tomto postupu obsahů trojúhelníků EFC a GBF. Za úplnost důkazu jejich rovnosti udělte 0–5 bodů, z toho 3 body za přepis rovnosti $u : a = a : (u - a)$ z textu domácího kola do tvaru $|FC| \cdot |FE| = |BF| \cdot |BG|$, 1 bod za shodnost úhlů EFC, GBF a 1 bod za dvojí užití vzorce pro obsah obecného trojúhelníku z poznámky pod čarou.

Dílčí bodové zisky z různých postupů nelze sčítat, celkově udělte maximální z nich. Za pouhé uhodnutí odpovědi žádný bod neudělujte.

4. *Čtyři navzájem různá prvočísla p, q, r, s splňují rovnost*

$$72 + p = q \cdot r \cdot s.$$

Určete nejmenší možnou hodnotu p. (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Pokud je jedno z prvočísel q, r, s rovno dvěma, je pravá strana dané rovnosti sudá, a tedy podle levé strany je rovněž prvočíslo p sudé, tedy $p = 2$, což je vyloučeno kvůli podmínce různosti jednotlivých prvočísel. Podobně žádné z prvočísel q, r, s není rovno třem, neboť součet na levé straně by pak byl násobkem tří, a tudíž i prvočíslo p by muselo být rovno třem.

Víme tedy, že všechna tři prvočísla q, r, s jsou větší než 3. Tři nejmenší taková prvočísla jsou 5, 7 a 11, takže nutně platí

$$q \cdot r \cdot s \geqq 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385,$$

odkud plyne

$$p = q \cdot r \cdot s - 72 \geqq 385 - 72 = 313.$$

Snadno ukážeme, že číslo 313 je prvočíslo, a že je to tedy hledaná nejmenší možná hodnota p (na pravé straně zadané rovnosti jsou pak menší prvočísla 5, 7 a 11).

Kdyby číslo 313 nebylo prvočíslo, bylo by díky odhadu $18^2 = 324 > 313$ dělitelné některým z nejmenších prvočísel od 2 do 17. Dělitelnost prvočísly 2, 3 a 5 je však vyloučena podle známých kritérií a pro zbylá prvočísla 7, 11, 13 a 17 snadno ověříme, že příslušná dělení* vyjdou se zbytky:

$$313 = 7 \cdot 44 + 5 = 11 \cdot 28 + 5 = 13 \cdot 24 + 1 = 17 \cdot 18 + 7.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho po 1 bodu za každé z obou vysvětlení, že žádné z prvočísel q, r, s není 2 ani 3, další 3 body za nalezení odhadu $p \geqq 313$ a konečně 1 bod za ověření, že 313 je prvočíslo (řešitel se přitom může odvolat na školní MF tabulky nebo může konstatovat, že vyloučil dělitelnost všemi prvočísly od 2 do 17, což není nutné zaznamenávat).

Pokud řešitel hodnotu $p = 313$ určí dosazením prvočísel 5, 7 a 11 do pravé strany rovnosti a možnost $p < 313$ nevyloučí, udělte pouze 1 bod.

* Při ověřování si lze ušetřit práci úvahou: Jelikož $72 = 2^3 \cdot 3^2$, z rovnosti $72 + 313 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ plyne, že číslo 313 není dělitelné dvěma, třemi, pěti, sedmi ani jedenácti. Stačí proto vydělit číslo 313 prvočísly 13 a 17.