72. ročník Matematické olympiády (2022/23)

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Z průzkumu v naší škole vyplynulo, že

- všechny děti, které mají rády matematiku, řeší Matematickou olympiádu,
- 90 % dětí, které nemají rády matematiku, Matematickou olympiádu neřeší,
- Matematickou olympiádu řeší 46 % dětí.

Kolik procent dětí z naší školy má rádo matematiku? (*L. Hozová*)

Z9–III–2

Je dán bod B a rovnostranný trojúhelník se stranami délky 1 cm. Vzdálenosti bodu B od dvou vrcholů tohoto trojúhelníku jsou 2 cm a 3 cm.

Vypočítejte vzdálenost bodu B od třetího vrcholu trojúhelníku. (*J. Tkadlec*)

Z9–III–3

Tabulka čísel má 4 sloupce a 99 řádků a je vytvořena následujícím způsobem: počínaje druhým řádkem je čtveřice čísel na každém řádku určena čísly z řádku předchozího, a to postupně jako součet prvního a druhého čísla, rozdíl prvního a druhého čísla, součet třetího a čtvrtého čísla a rozdíl třetího a čtvrtého čísla.

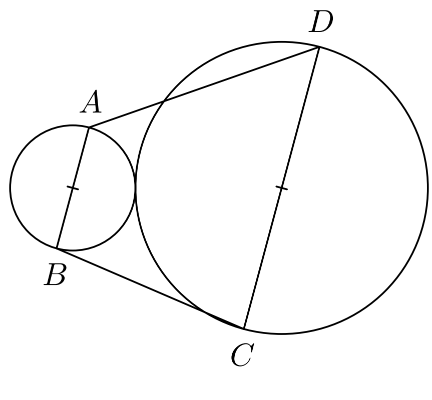
a) Jaký je součet čísel na 3. řádku, pokud je součet čísel na prvním řádku roven 0?
b) Jaký je součet čísel na 25. řádku, pokud je součet čísel na prvním řádku roven 1?

(*K. Pazourek*)

Z9–III–4

Jsou dány dvě kružnice s vnějším dotykem. Úsečka AB je průměrem jedné kružnice a má velikost 6 cm, úsečka CD je průměrem druhé kružnice a má velikost 14 cm. Čtyřúhelník $ABCD$ je lichoběžníkem se základnami AB a CD.

Zjistěte, jaký největší obsah může mít lichoběžník $ABCD$, a zdůvodněte, proč nemůže být větší. (*K. Pazourek*)



Krajské kolo kategorie Z9 se koná **28. března 2023** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 12 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory a jiné elektronické pomůcky povoleny nejsou.

Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 4 hodin a 20 minut po začátku soutěže, nejpozději však ve 14:20. Aby mohly být uznány číselné výsledky, musí odevzdané řešení obsahovat pomocné výpočty.

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Z průzkumu v naší škole vyplynulo, že

- všechny děti, které mají rády matematiku, řeší Matematickou olympiádu,
- 90 % dětí, které nemají rády matematiku, Matematickou olympiádu neřeší,
- Matematickou olympiádu řeší 46 % dětí.

Kolik procent dětí z naší školy má rádo matematiku? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Matematickou olympiádu (MO) řeší všechny děti, které mají rády matematiku, ale jen desetina těch, které matematiku rády nemají.

Dejme tomu, že x % dětí má rádo matematiku, a tedy řeší MO. Potom $(46 - x)$ % dětí matematiku rádo nemá a také řeší MO. Všech dětí, které matematiku rády nemají, je desetkrát víc, tj. $10(46 - x)$ %. Dohromady platí

$$x + 10(46 - x) = 100,$$

odkud jednoduchými úpravami dostáváme $x = 40$.

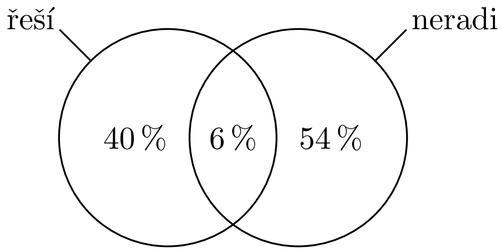
Dětí, které mají rády matematiku, je 40 %.

Poznámky. Jiné značení vede k jiným úpravám. Dejme tomu, že y % dětí nemá rádo matematiku. Potom $\frac{9}{10}y$ % dětí neřeší MO. To odpovídá 54 % dětí ($100 - 46 = 54$). Dohromady platí

$$\frac{9}{10}y = 54,$$

odkud jednoduchými úpravami dostáváme $y = 60$.

Uvedené vztahy lze znázornit pomocí Vennova diagramu takto:



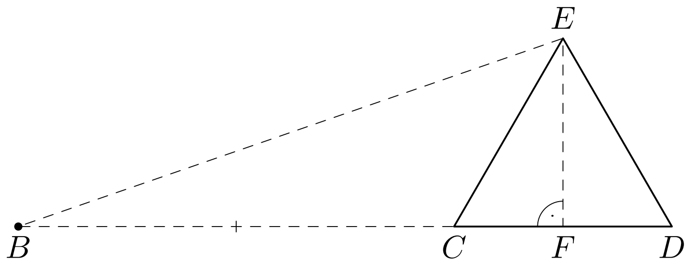
Hodnocení. 2 body za pomocná značení a dílčí pozorování; 2 body za výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Z9–III–2

Je dán bod B a rovnostranný trojúhelník se stranami délky 1 cm. Vzdálenosti bodu B od dvou vrcholů tohoto trojúhelníku jsou 2 cm a 3 cm.

Vypočítejte vzdálenost bodu B od třetího vrcholu trojúhelníku. (*J. Tkadlec*)

Možné řešení. Vrcholy trojúhelníku označíme C, D, E a vzdálenosti ze zadání přiřadíme velikostem úseček BC a BD. Jelikož $1 + 2 = 3$, leží bod B na přímce CD. Vzdálenost bodu B od třetího vrcholu E je přeponou vyznačeného pravoúhlého trojúhelníku BFE:



Úsečka EF je výškou rovnostranného trojúhelníku CDE, tedy

$$|EF| = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm};$$

to je známý vztah, který lze najít v tabulkách, příp. spočítat pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku CFE. Bod F je středem úsečky CD, tedy

$$|BF| = |BC| + |CF| = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}.$$

Velikost přepony trojúhelníku BFE je podle Pythagorovy věty rovna

$$|BE| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}\,(\mathrm{cm}).$$

Vzdálenost bodu B od třetího vrcholu trojúhelníku je $\sqrt{7}$ cm.

Hodnocení. 1 bod za zjištění, že B leží na přímce CD; 3 body za dopočítání $|BE|$; 2 body za kvalitu komentáře.

Z9–III–3

Tabulka čísel má 4 sloupce a 99 řádků a je vytvořena následujícím způsobem: počínaje druhým řádkem je čtveřice čísel na každém řádku určena čísly z řádku předchozího, a to postupně jako součet prvního a druhého čísla, rozdíl prvního a druhého čísla, součet třetího a čtvrtého čísla a rozdíl třetího a čtvrtého čísla.

a) Jaký je součet čísel na 3. řádku, pokud je součet čísel na prvním řádku roven 0?
b) Jaký je součet čísel na 25. řádku, pokud je součet čísel na prvním řádku roven 1?

(*K. Pazourek*)

Možné řešení. Celá tabulka je určena čísly na prvním řádku. Prvních několik řádků tabulky vypadá takto:

1	a	b	c	d
2	$a+b$	$a-b$	$c+d$	$c-d$
3	$2a$	$2b$	$2c$	$2d$
4	$2(a+b)$	$2(a-b)$	$2(c+d)$	$2(c-d)$
5	$4a$	$4b$	$4c$	$4d$
6	$4(a+b)$	$4(a-b)$	$4(c+d)$	$4(c-d)$
7	$8a$	$8b$	$8c$	$8d$
8	$8(a+b)$	$8(a-b)$	$8(c+d)$	$8(c-d)$
9	$16a$	$16b$	$16c$	$16d$
$\vdots$				

a) Součet čísel na třetím řádku je dvojnásobkem součtu čísel na prvním řádku. Pokud je součet prvního řádku roven 0, je také součet třetího řádku roven 0.

b) Součty čísel na dalších lichých řádcích se postupně zdvojnásobují: součet 5. řádku je 4-násobkem součtu prvního řádku ($2 \cdot 2 = 4 = 2^2$), součet 7. řádku je 8-násobkem součtu prvního řádku ($2 \cdot 4 = 8 = 2^3$), součet 9. řádku je 16-násobkem součtu prvního řádku ($2 \cdot 8 = 16 = 2^4$) atd.

Kladná lichá čísla jsou tvaru $2i+1$, kde $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Předchozí pozorování jsou při tomto značení zobecněna následovně: součet $(2i+1)$-tého řádku je 2^i-násobkem součtu prvního řádku.

Jelikož $25 = 2 \cdot 12 + 1$, je součet 25. řádku roven 2^{12}-násobku prvního řádku. Pokud je součet prvního řádku roven 1, je součet 25. řádku roven

$$2^{12} = 8^4 = 64^2 = 4\,096. \qquad (*)$$

Hodnocení. 1 bod za přípravná pozorování (několik řádků tabulky); 1 bod za odpověď na otázku a); 2 body za odpověď na otázku b); 2 body za kvalitu komentáře.

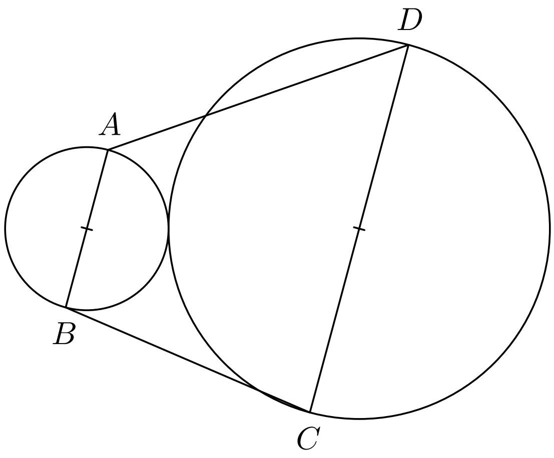
Poznámky. Kterýkoli z výrazů v $(*)$, či jiné ekvivalentní vyjádření, považujte za správnou odpověď na otázku b).

Také pro sudé řádky platí, že se jejich součty postupně zdvojnásobují. Tyto součty jsou násobkem $a+c$, tedy součtu dvou čísel z prvního řádku.

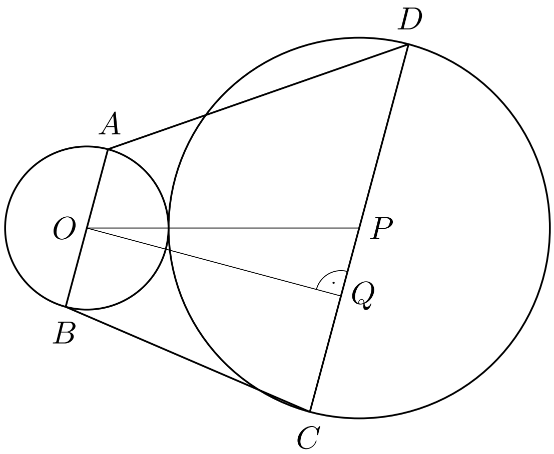
Z9–III–4

Jsou dány dvě kružnice s vnějším dotykem. Úsečka AB je průměrem jedné kružnice a má velikost 6 cm, úsečka CD je průměrem druhé kružnice a má velikost 14 cm. Čtyřúhelník $ABCD$ je lichoběžníkem se základnami AB a CD.

Zjistěte, jaký největší obsah může mít lichoběžník $ABCD$, a zdůvodněte, proč nemůže být větší. (*K. Pazourek*)

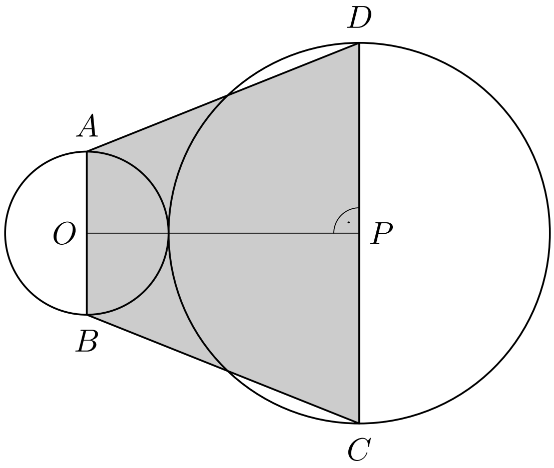


Možné řešení. Lichoběžníků s uvedenými vlastnostmi je nepřeberné množství. Všechny mají stejné velikosti základen, mění se jejich výšky. Tato výška však nemůže být větší než vzdálenost středů kružnic:



Označme středy kružnic O, P a patu výšky z bodu O označme Q. Pokud body P a Q nesplývají, potom výška OQ je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku OQP, a proto je menší než jeho přepona OP.

Tedy lichoběžník s největším obsahem je takový, jehož základny jsou kolmé ke spojnici středů kružnic:



Základny lichoběžníku mají délky $|AB| = 6\,\text{cm}$ a $|CD| = 14\,\text{cm}$, velikost výšky je $|OP| = \frac{1}{2}(6+14) = 10\,\text{cm}$. Obsah tohoto lichoběžníku, a tedy největší možný obsah, je

$$\frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right) \cdot |OP| = \frac{1}{2}(6+14) \cdot 10 = 100\,(\text{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za uvědomění, že základny se nemění a mění se jen výška; 2 body za obsah největšího lichoběžníku; 2 body za zdůvodnění a kvalitu komentáře.

Poznámka. Ve zdůvodnění, že úsečka OP je větší než OQ, stačí argumentovat tím, že proti většímu vnitřnímu úhlu trojúhelníku je větší strana.