73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy školního kola kategorie A

1. Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda takto můžeme získat posloupnost

a) 9, 11, 12, 13, 20, 20, 20,

b) 9, 11, 12, 13, 20, 21, 21.

2. Určete počet všech kvadratických mnohočlenů $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takových, že pro každé reálné číslo x platí

$$x^2 + 2x - 2023 < P(x) < 2x^2.$$

3. Uvnitř půlkruhu nad průměrem AB se středem O uvažme libovolný bod X. Označme G těžiště trojúhelníku XOB a Y průsečík polopřímky AX s hranicí půlkruhu různý od A. Dokažte, že $|YG| = |GB|$.

Školní kolo kategorie A se koná

v úterý 12. prosince 2023

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Z číslic* 1 *až* 9 *vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda takto můžeme získat posloupnost*

a) 9, 11, 12, 13, 20, 20, 20,

b) 9, 11, 12, 13, 20, 21, 21. (Martin Melicher)

ŘEŠENÍ. a) Dokážeme sporem, že nelze získat žádnou posloupnost, která obsahuje třikrát číslo 20, tedy ani tu ze zadání úlohy.

Připusťme naopak, že k některému číslu $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ s navzájem různými číslicemi existují tři indexy $1 \leqq i < j < k \leqq 7$ tak, že platí

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = a_j + a_{j+1} + a_{j+2} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 20. \tag{1}$$

Jelikož součet šesti různých číslic je nejvýše $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39 < 2 \cdot 20$, krajní trojice sčítanců (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) a (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) se musí „překrývat“. Platí tedy $k \leqq i+2$, což s ohledem na $i < j < k$ znamená, že $k = i + 2$, a tedy $j = i + 1$. První rovnost v (1) tak přejde v $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$, odkud $a_i = a_{i+3}$, což je spor. Tím je slíbený důkaz hotov.

b) Ano, vyhovuje například číslo 849 751 623. Součty trojic jeho sousedních číslic jsou totiž (zleva doprava) 21, 20, 21, 13, 12, 9, 11.

KOMENTÁŘ. Přestože je podané řešení úplné, vysvětlíme, jak příklad vyhovujícího čísla pro část b) najít. Zjistíme dokonce, že kromě uvedeného čísla 849 751 623 vyhovuje už jen jeho „zrcadlová“ kopie 326 157 948.

Z úvah obdobných těm z části a) našeho řešení plyne, že potřebné součty rovné číslu 21 nemohou dávat ani dvě disjunktní trojice číslic, ani dvě trojice se dvěma společnými číslicemi – těm říkejme dále sousední trojice. Dvě trojice se součtem 21 tudíž mají jednu společnou číslici, takže obě sousedí se stejnou trojicí o menším součtu.

Pro každé dvě sousední trojice číslic platí, že jejich součty se liší o rozdíl těch dvou číslic, které leží pouze v jedné z obou trojic. Protože takový rozdíl je nejvýše roven $9 - 1 = 8$ a protože součty různé od 21 jsou podle zadání 9, 11, 12, 13 a 20, trojice se součtem 21 může sousedit jedině s trojicemi o součtu 13 nebo 20. To může nastat pouze tehdy, je-li jedna z obou trojic se součtem 21 „na kraji“, tj. sousedí jedině s jednou trojicí.

Rozeberme podrobně situaci, kdy jedna z trojic se součtem 21 je *první zleva.* Podle našich úvah tehdy pro hledané číslo $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ nastane jeden z případů:

(i) $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $a_2 + a_3 + a_4 = 13$, $a_3 + a_4 + a_5 = 21$, $a_4 + a_5 + a_6 = 20$,

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $a_2 + a_3 + a_4 = 20$, $a_3 + a_4 + a_5 = 21$, $a_4 + a_5 + a_6 = 13$.

Případ (i) snadno vyloučíme, neboť tehdy $a_1 - a_4 = 8$, odkud $a_4 = 1$, a proto z rovnosti $a_3 + a_4 + a_5 = 21$ plyne $a_3 + a_5 = 20$, což je zřejmý spor.

V případě (ii) máme $a_3 - a_6 = 8$, neboli $a_3 = 9$ a $a_6 = 1$, takže zadané rovnosti můžeme po dosazení zjednodušit na

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 12 \quad \text{a} \quad a_2 + a_4 = 11.$$

Protože číslice 9 už zde nevystupuje, ze dvou součtů rovných 12 plyne, že $\{a_1, a_2\}$ a $\{a_4, a_5\}$ jsou v některém pořadí množiny $\{4, 8\}$ a $\{5, 7\}$. Rovnost $a_2 + a_4 = 11$ pak vede k závěru, že $\{a_2, a_4\} = \{4, 7\}$. Prvních 6 číslic hledaného devítimístného čísla je tak buď 849 751, nebo 579 481. Nyní už k těmto dvěma začátkům začneme zkoušet doplňovat zprava ve vhodném pořadí číslice 2, 3, 6 tak, abychom dostali nové trojice sousedních číslic s dosud chybějícími součty 9, 11 a 12. Nalezneme tak jediné vyhovující číslo 849 751 623 (neukončená doplňování vedou k 849 751 3??, 579 481 26? a 579 481 3??).*

Druhou situaci, kdy trojice se součtem 21 je *první zprava*, není nutné rozebírat. Od takového vyhovujícího čísla $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ totiž můžeme přejít k vyhovujícímu číslu $\overline{a_9a_8\ldots a_1}$, které je podle předchozího rozboru rovno 849 751 623. Druhé situaci tak odpovídá jediné vyhovující číslo 326 157 948.

Jiné řešení. Pro část a) úlohy uvedeme jiný důkaz sporem.

Připusťme tedy, že součty $S_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, kde $1 \leqq i \leqq 7$, mají pro některé vytvořené číslo $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ vzestupně uspořádané hodnoty 9, 11, 12, 13, 20, 20, 20. Z rovnosti

$$S_1 + S_4 + S_7 = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$$

a nerovností $11 + 12 + 13 < 45 < 20 + 20 + 9$ plyne, že právě jeden ze tří součtů S_1, S_4, S_7 je roven 20, tudíž zbylé dva součty jsou zřejmě 12 a 13. Platí tak

$$\{S_1, S_4, S_7\} = \{12, 13, 20\}. \tag{2}$$

Podle (2) rozlišíme dále tři případy, při kterých využijeme toho, že díky rovnostem $S_i - S_{i+1} = a_i - a_{i+4}$ a různosti číslic $a_1, \ldots, a_9$ platí

$$0 < |S_i - S_{i+1}| < 9 \quad (1 \leqq i \leqq 6). \tag{3}$$

(i) V případě $S_1 = 20$ podle (3) platí $0 < |S_2 - 20| < 9$, což je ve sporu s tím, že s ohledem na (2) je S_2 jedno z čísel 9, 11, 20.
(ii) V případě $S_4 = 20$ dostaneme spor jako v (i), kde S_2 zaměníme za S_3.
(iii) V případě $S_7 = 20$ stačí podobně v (i) zaměnit S_2 za S_6.

Tím je důkaz sporem hotov.

Poznámka. K právě dokončenému důkazu sporem dodejme následující. Protože tři ze součtů S_i mají tutéž hodnotu 20, lze potřebný spor získat z nerovností (3) i bez užití výsledku (2) o hodnotách S_1, S_4, S_7. Skutečně, díky (3) mohou tři čísla 20 sousedit v sedmici $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7)$ pouze se dvěma čísly 12 a 13. Je však zřejmé, že každá trojice po dvou nesousedních členů má tu vlastnost, že její členy sousedí dohromady s alespoň třemi dalšími členy.** Tím je nový důkaz sporem hotov.

Komentář. Ukažme, že také úvahy z druhého důkazu sporem je možné využít při hledání všech čísel $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$, která vyhovují zadání části b). Pro libovolné z nich znovu

* Namísto takového zkoušení lze postupovat následovně: Protože součet sedmi čísel ze zadání b) je roven 107, pro každé vyhovující číslo $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ musí platit $2(a_1 + a_9) + (a_2 + a_8) = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) - 107 = 28$. Pro $a_1 = 8$ a $a_2 = 4$ odtud dostáváme $2a_9 + a_8 = 8$, což s ohledem na $\{a_7, a_8, a_9\} = \{2, 3, 6\}$ již zřejmě znamená, že nutně platí $\overline{a_7a_8a_9} = 623$. Pro $a_1 = 5$ a $a_2 = 7$ vychází $2a_9 + a_8 = 11$, což ovšem s číslicemi $a_8, a_9 \in \{2, 3, 6\}$ splnit nelze.

** Je-li totiž v každé z obou „mezer“ mezi členy dané trojice pouze po jednom členu, leží aspoň jeden další člen před prvním nebo za posledním členem této trojice.

označíme $S_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, kde $1 \leqq i \leqq 7$. Nerovnosti (3) přitom budeme využívat bez odkazů.

Podle zadaných hodnot 9, 11, 12, 13, 20, 21, 21 součtů S_i tentokrát zjistíme, že $\{S_1, S_4, S_7\}$ je jedna z množin $\{12, 13, 20\}$ nebo $\{11, 13, 21\}$. Čtveřice zbylých součtů (S_2, S_3, S_5, S_6) je tak (až na pořadí) jedna ze čtveřic $(9, 11, 21, 21)$ nebo $(9, 12, 20, 21)$. Protože navíc platí

$$|(S_2 + S_5) - (S_3 + S_6)| = |a_2 - a_8| < 9, \tag{4}$$

každá z dvojic (S_2, S_5) a (S_3, S_6) zřejmě obsahuje číslo 20 nebo 21, přitom pouze jedna z nich i číslo 9. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že touto dvojicí s číslem 9 je (S_2, S_5) (jinak číslice výchozího čísla zapíšeme v opačném pořadí). Dále rozlišíme dva případy.

- Případ $S_2 = 9$. Tehdy jak víme platí $S_5 \geqq 20$ a, jelikož $S_3 < S_2 + 9 < 20$, rovněž $S_6 \geqq 20$. S ohledem na $S_5 \neq S_6$ tak máme $\{S_5, S_6\} = \{20, 21\}$, a proto $\{S_1, S_4, S_7\} = \{11, 13, 21\}$, tudíž S_3 je „zbylá“ hodnota 12. Nyní z $S_2 = 9$ a $S_3 = 12$ plyne, že 21 se nerovná ani S_1 ani S_4, a proto $21 = S_7$, odkud $S_6 = 20$ a $S_5 = 21$. Podle poslední rovnosti je $S_4 > 12$, a proto $S_4 = 13$ a $S_1 = 11$.

Zjistili jsme, že v případě $S_2 = 9$ platí

$$(S_1, S_2, \ldots, S_7) = (11, 9, 12, 13, 21, 20, 21).$$

Odtud vychází $a_7 - a_4 = S_5 - S_4 = 8$, takže $a_4 = 1$ a $a_7 = 9$, tudíž z $S_2 = 9$ plyne $a_2 + a_3 = 8$, a proto v důsledku $S_1 = 11$ je $a_1 = 3$. Umístění číslic 1, 3 a 9 tak známe, zbylé číslice 2, 4, 5, 6, 7, 8 jsou v některém pořadí řešením soustavy rovnic

$$a_2 + a_3 = 8,\ a_3 + a_5 = 11,\ a_5 + a_6 = 12,\ a_6 + a_8 = 11,\ a_8 + a_9 = 12.$$

Vidíme, že číslice 2 je nutně a_2, odkud postupně $a_3 = 6$, $a_5 = 5$, $a_6 = 7$, $a_8 = 4$ a $a_9 = 8$. Dostali jsme vyhovující číslo 326 157 948. Druhé vyhovující číslo s opačným pořadím číslic je 849 751 623.

- Případ $S_5 = 9$. Tehdy jak víme platí $S_2 \geqq 20$ a, jelikož $S_6 < S_5 + 9 < 20$, rovněž $S_3 \geqq 20$. S ohledem na $S_2 \neq S_3$ tak máme $\{S_2, S_3\} = \{20, 21\}$, a proto opět $\{S_1, S_4, S_7\} = \{11, 13, 21\}$, tudíž S_6 je „zbylá“ hodnota 12. Nyní z $S_5 = 9$ a $S_6 = 12$ plyne, že 21 se nerovná ani S_4 ani S_7, a proto $21 = S_1$, odkud $S_2 = 20$ a $S_3 = 21$. Podle poslední rovnosti je $S_4 > 12$, a proto $S_4 = 13$ a $S_7 = 11$.

Zjistili jsme, že v případě $S_5 = 9$ platí

$$(S_1, S_2, \ldots, S_7) = (21, 20, 21, 13, 9, 12, 11).$$

Odtud vychází $a_3 - a_6 = S_3 - S_4 = 8$, takže $a_3 = 9$ a $a_6 = 1$, tudíž z $S_6 = 12$ plyne $a_7 + a_8 = 11$, a proto v důsledku $S_7 = 11$ je $a_9 = 0$, a to je spor. Žádné vyhovující číslo se součtem $S_5 = 9$ proto nevyhovuje.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za část a) a 3 body za část b).

V neúplných řešeních části a) oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Zformulovaná hypotéza o tom, že nelze mít tři trojice se součtem 20: 1 bod, jen pokud řešitel nevyřeší část b), jinak 0 bodů.

A2. Dvě trojice se součtem 20 nemohou být disjunktní (s důkazem): 1 bod.

A3. Dvě trojice se součtem 20 nemohou být sousední, tj. mít dvě společné číslice (s důkazem): 1 bod.
A4. Žádná trojice se součtem 20 nemůže sousedit s trojicí se součtem 9 ani 11 (s důkazem): 1 bod.
Celkem pak za neúplné řešení části a) udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2} + \mathrm{A3}, \mathrm{A3} + \mathrm{A4})$ bodů.

Jak jsme uvedli v komentáři, řešení části b) je úplné i v případě, kdy řešitel číslo 849 751 623 nebo 326 157 948 uvede bez vysvětlení, jak na něho přišel. Za neúplné řešení části b) udělte 1 bod, pokud řešitel například dokáže, že dvě trojice se součtem 21 mají společnou právě jednu číslici a že trojice, které s některou z nich sousedí, mají součet 13 nebo 20. Pokud řešitel odvodí, jak musí vypadat šestimístné začátky nebo konce všech vyhovujících čísel, udělte za část b) 2 body.

2. *Určete počet všech kvadratických mnohočlenů $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takových, že pro každé reálné číslo x platí*

$$x^2 + 2x - 2023 < P(x) < 2x^2.$$

(Ján Mazák, Michal Rolínek)

Řešení. Vyhovující mnohočleny $P(x)$ mají mít tvar $P(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou celá čísla. Pokud by pro koeficient u x^2 platilo $a < 1$, první zadaná nerovnost by neplatila pro velké hodnoty x. Obdobně druhá nerovnost vylučuje možnost, že platí $a > 2$. Zbylé dva případy $a \in \{1, 2\}$ posoudíme jednotlivě.

Pro $a = 1$ přepíšeme zadané nerovnosti do tvaru

$$(b - 2)x + (c + 2023) > 0 \quad \text{a} \quad x^2 - bx - c > 0.$$

V případě $b \neq 2$ má první nerovnost nenulový koeficient u x, takže nemůže být splněna pro všechna x, ať je c jakékoli. Musí proto platit $b = 2$ a první nerovnost pak přejde v $c > -2023$. Druhá nerovnost platí pro všechna x, právě když trojčlen $x^2 - bx - c$ s kladným koeficientem u x^2 má záporný diskriminant, tedy právě když $b^2 + 4c < 0$. To díky $b = 2$ přechází v $c < -1$. Dohromady dostáváme, že v případě $a = 1$ je platnost obou nerovností pro všechna x ekvivalentní s dvojicí podmínek $b = 2$ a $-1 > c > -2023$, které zřejmě splňuje 2021 trojčlenů $P(x)$.

Analogicky budeme postupovat i případě $a = 2$, jen to zapíšeme stručněji. Přepsané nerovnosti mají tentokrát tvar

$$x^2 + (b - 2)x + (c + 2023) > 0 \quad \text{a} \quad bx + c < 0.$$

Druhá nerovnost platí pro všechna x, právě když $b = 0$ a $c < 0$. Platnost první nerovnosti pro všechna x opět vyjádříme podmínkou záporného diskriminantu. Tento výraz $(b - 2)^2 - 4(c + 2023)$ je po dosazení $b = 0$ záporný, právě když $c > -2022$. V případě $a = 2$ tak vyhovují trojčleny $P(x)$, pro něž $b = 0$ a $0 > c > -2022$. I těch je zřejmě 2021.

Závěr. Hledaný počet mnohočlenů je roven $2 \cdot 2021 = 4042$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Konstatování, že nutně platí $a \in \{1, 2\}$ (lze brát za zřejmý důsledek známých vlastností kvadratické funkce): 2 body.

A2. Určení b (lze brát za zřejmé) a vymezení c u obou lineárních nerovností: celkem 1 bod.

A3. Vymezení c u dvou kvadratických nerovností: po 1 bodu za každou z nich.

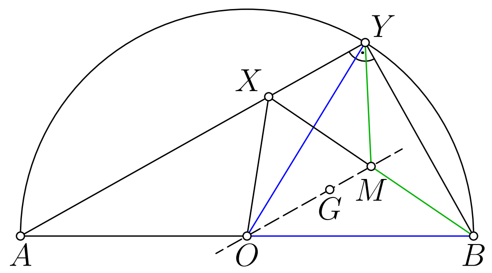
A4. Určení správného počtu mnohočlenů: 1 bod.

Celkem pak udělte A1 + A2 + A3 + A4 bodů. Pokud se řešitel zabývá pouze případy $a \in \{1, 2\}$ a nenapíše, že to stačí, udělte nejvýše 4 body.

3. *Uvnitř půlkruhu nad průměrem AB se středem O uvažme libovolný bod X. Označme G těžiště trojúhelníku XOB a Y průsečík polopřímky AX s hranicí půlkruhu různý od A. Dokažte, že $|YG| = |GB|$.* (Jiří Blažek, Josef Tkadlec)

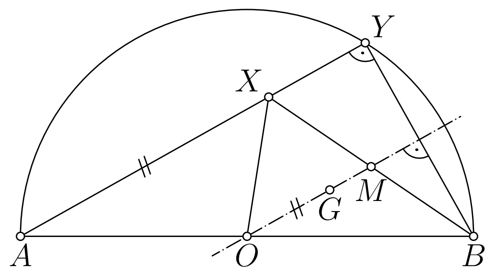
Řešení. Označme ještě M střed úsečky XB. Ukážeme, že těžnice OM trojúhelníku OXB leží na ose úsečky BY.* Jelikož těžiště G této těžnici náleží, bude tím kýžená rovnost $|GB| = |GY|$ dokázána.

Protože bod Y leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB se středem O, platí $|OY| = |OB|$ a úhel AYB je pravý. Bod M je tak středem přepony XB pravoúhlého trojúhelníku XBY a jako takový je i středem kružnice jemu opsané. Platí tak $|MY| = |MB|$. To spolu s $|OY| = |OB|$ znamená, že oba krajní body O, M těžnice OM leží na ose úsečky BY. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Poznámka. Podaný výklad můžeme drobně obměňovat úvahami o středních příčkách trojúhelníků BAX, BAY či BXY. Jejich zapojením můžeme kupříkladu dokazovat tato tvrzení (v závorkách naznačíme jak):

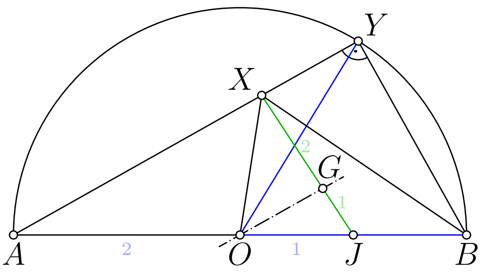
- ▷ Přímka OM (kde M je střed XB) je osou úsečky BY. (Úsečka OM je střední příčkou trojúhelníku BAX, tudíž $OM \parallel AX \perp BY$.)
- ▷ Osa úsečky BY půlí obě úsečky AB a XB. (Střední příčky obou pravoúhlých trojúhelníků BAY a BXY, které jsou rovnoběžné s AY, a tedy kolmé k BY, leží na ose jejich společné odvěsny BY.)



Jiné řešení. Užitím druhé těžnice XJ trojúhelníku XOB (J je střed strany OB) ukážeme jako v prvním řešení, že úsečka OG leží na ose úsečky BY. Bod O na ní leží díky zřejmé rovnosti $|OB| = |OY|$, stačí tudíž pouze ověřit, že platí $OG \perp BY$ neboli $OG \parallel AY$, jelikož úhel AYB je pravý podle Thaletovy věty.

Podle známé polohy těžiště G na těžnici XJ platí $|JG| = \frac{1}{3}|JX|$ a kromě toho je zřejmě i $|JO| = \frac{1}{3}|JA|$. Dohromady to znamená, že úsečka OG je stejnolehlá s úsečkou AX

* Tato hypotéza není tolik překvapivá, neboť s ohledem na zřejmou rovnost $|OB| = |OY|$ je dokazovaná rovnost $|GB| = |GY|$ ekvivalentní s tím, že přímka OG je osou úsečky BY.



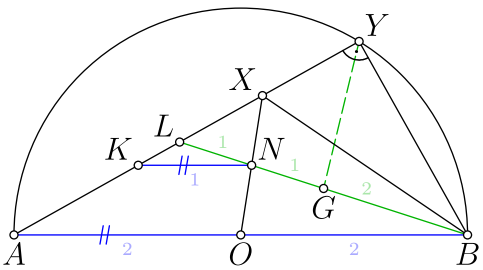
podle středu J. Platí tudíž $OG \parallel AX$. Tím je kýžený vztah $OG \parallel AY$ ověřen, neboť X je vnitřní bod úsečky AY.

Jiné řešení. Ukážeme, že k řešení úlohy lze využít i třetí těžnici BN trojúhelníku XOB, kde N je střed jeho strany XO.

Označme ještě K střed úsečky AX a L průsečík polopřímky BN s úsečkou AX. Pro střední příčku KN trojúhelníku XAO platí $|KN| = \frac{1}{2}|AO| = \frac{1}{4}|AB|$ a $KN \parallel AO$ čili $KN \parallel AB$. V důsledku toho je úsečka KN obrazem úsečky AB ve stejnolehlosti se středem L a koeficientem $1/4$. Platí tak $|LN| = \frac{1}{4}|LB|$, odkud $|LN| = \frac{1}{3}|BN|$. Tuto délku má i úsek NG těžnice BN, takže dohromady dostáváme

$$|LG| = |LN| + |NG| = \tfrac{1}{3}|BN| + \tfrac{1}{3}|BN| = |GB|. \tag{1}$$

Všimněme si nyní trojúhelníku BLY. Ten má u vrcholu Y pravý úhel díky Thaletově kružnici nad průměrem AB. Střed jeho přepony BL je ovšem podle (1) právě bod G, tudíž podle Thaletovy věty má rovněž úsečka YG délku $\frac{2}{3}|BN|$. Tím je rovnost $|YG| = |GB|$ dokázána.



Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných postupech podle vzorových řešení nebo poznámky oceňte částečné kroky následovně (nové body značíme stejně jako v textech řešení):

A1. Zápis hypotézy, že na ose úsečky BY leží nejen těžiště G, ale celá těžnice OM: 1 bod.
A2. Za hypotézu z A1 spolu s konstatováním, že $|OB| = |OY|$: 2 body.
A3. Důkaz rovnosti $|MB| = |MY|$: 3 body.
A4. Důkaz rovnoběžnosti $OM \parallel AX$: 2 body.
A5. Důkaz kolmosti $OM \perp BY$: 3 body.
B1. Vysvětlení, proč stačí dokázat $OG \perp BY$: 2 body.
B2. Důkaz rovnoběžnosti $OG \parallel AX$: 2 body.
C1. Důkaz tvrzení, že bod G je středem úsečky BL: 4 body.
Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A1}+\mathrm{A3}, \mathrm{A1}+\mathrm{A4}, \mathrm{A1}+\mathrm{A5}, \mathrm{B1}, \mathrm{B1}+\mathrm{B2}, \mathrm{C1})$ bodů.