II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Na prohlídce obrazárny se sešla skupina chlapců a děvčat. Během prohlídky nikdo nerušil a neodcházel. Po prohlídce odešlo 15 děvčat a v obrazárně tak zůstalo dvakrát více chlapců než děvčat. Následně odešlo 45 chlapců a v obrazárně zbylo pětkrát více děvčat než chlapců.

Kolik děvčat bylo v obrazárně během prohlídky? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme d a ch počty děvčat a chlapců během prohlídky. Vztahy ze zadání lze zapsat jako

$$ch = 2(d - 15), \quad d - 15 = 5(ch - 45), \tag{$*$}$$

Počet děvčat po prohlídce vyjádřený z prvního vztahu je $d - 15 = \frac{1}{2}ch$. Společně s druhým vztahem dostáváme rovnici s neznámou ch,

$$\frac{1}{2}ch = 5(ch - 45),$$

kterou dořešíme:

$$\begin{aligned} ch &= 10ch - 450, \\ 9ch &= 450, \\ ch &= 50. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $\frac{1}{2}ch = 5(ch-45) = 25$, což odpovídá $d-15$. Tedy $d = 25+15 = 40$. Během prohlídky bylo v obrazárně 40 děvčat.

Poznámky. Soustavu rovnic ($*$) je možné řešit různými způsoby. Např. dosazení první rovnice do druhé dává rovnici s neznámou d, kterou dořešíme následovně:

$$\begin{aligned} d - 15 &= 5(2(d - 15) - 45), \\ d - 15 &= 10d - 375, \\ 9d &= 360, \\ d &= 40. \end{aligned}$$

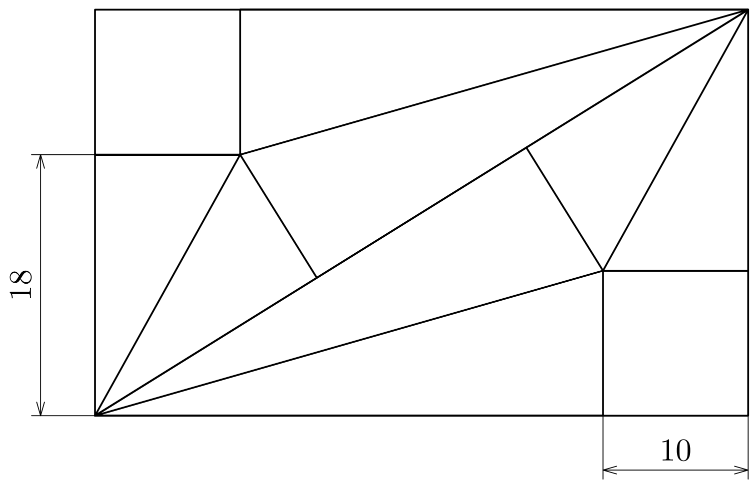
Počet děvčat poté, co jich část odešla, byl dělitelný pěti. Protože jich odešlo 15, byl i počet děvčat během prohlídky dělitelný pěti. Je tedy možné postupně za d dosazovat násobky pěti větší než 15, z první rovnice v ($*$) vypočíst ch a ověřit, zda platí rovnice druhá. Jedinou vyhovující možností je $d = 40$.

Hodnocení. 2 body za formulaci vztahů ($*$); 2 body za dořešení soustavy rovnic; 2 body za kvalitu komentáře. Při zkoušení možností berte v potaz úplnost komentáře, náhodně odhalené nezdůvodněné řešení hodnoťte 2 body.

Z9–II–2

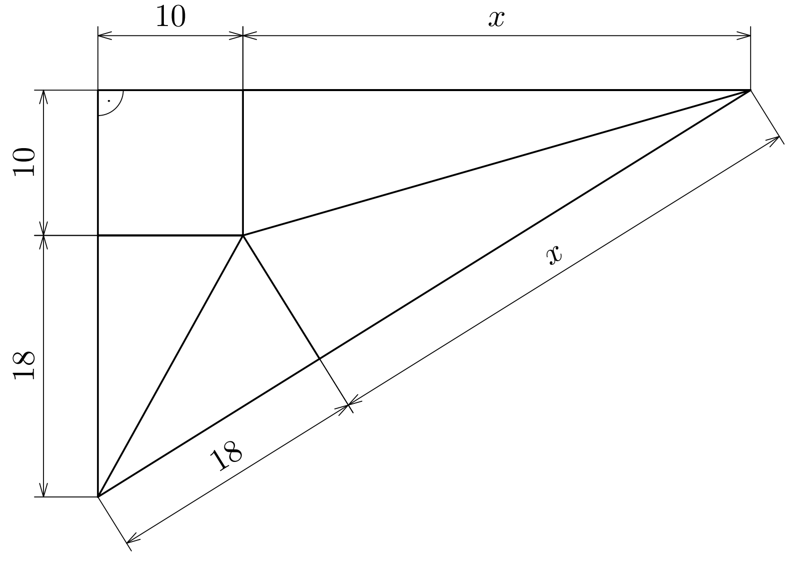
Obdélník na obrázku je rozdělen na dva shodné čtverce, čtyři shodné menší pravoúhlé trojúhelníky a čtyři shodné větší pravoúhlé trojúhelníky. Velikosti některých stran v cm jsou vyznačeny na obrázku.

Vypočtěte rozměry obdélníku. (*M. Dományová*)



Možné řešení. V rozích obdélníku jsou shodné čtverce se stranou délky 10 cm. Tedy svislá strana obdélníku měří $18 + 10 = 28$ (cm).

Na stranách obdélníku je jenom jedna neznámá úsečka (ovšem dvakrát), a tu označíme x. Ze shodností dílčích trojúhelníků umíme určit také části úhlopříčky obdélníku. Tato úhlopříčka dělí obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, jehož strany jsou popsány takto:



Podle Pythagorovy věty platí

$$(18 + x)^2 = 28^2 + (10 + x)^2. \qquad (*)$$

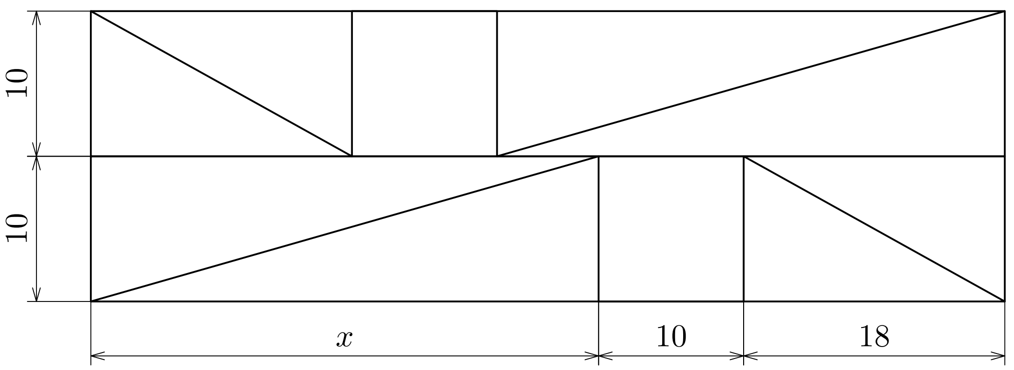
Po umocnění a úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 18^2 + 36x + x^2 &= 28^2 + 100 + 20x + x^2, \\ 16x &= 28^2 + 100 - 18^2 = \\ &= 784 + 100 - 324 = 560. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Tedy $x = 560/16 = 35$ a vodorovná strana obdélníku měří $35 + 10 = 45$ (cm).

Rozměry obdélníku jsou 28 cm a 45 cm.

Jiné řešení. Dále používáme stejné značení jako v předchozím řešení. Obsah daného obdélníku v cm^2 je roven $28(10+x)$. Obdélník sestává z deseti menších částí, které všechny mají aspoň jeden pravý úhel a aspoň jednu stranu délky 10 cm. Z těchto částí lze složit obdélník jako na obrázku:



Obsah tohoto obdélníku v cm^2 je roven $20(28 + x)$. Přeskládáním se však obsah nezměnil. Tak dostáváme rovnici,

$$28(10 + x) = 20(28 + x), \tag{$***$}$$

kterou dořešíme:

$$\begin{aligned} 280 + 28x &= 560 + 20x, \\ 8x &= 280, \\ x &= 35. \end{aligned}$$

Vodorovná strana obdélníku měří $35+10 = 45$ (cm); rozměry obdélníku jsou 28 cm a 45 cm.

Hodnocení. 1 bod za svislou stranu obdélníku; 1 bod za vyjádření dalších částí pomocí neznámé a formulaci ($*$) či ($***$); 2 body za dořešení a výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámky. Všechna čísla v ($**$) jsou dělitelná čtyřmi, což pro druhé mocniny vidíme bez umocnění takto: $28^2 = (2 \cdot 14)^2 = 4 \cdot 14^2$, $18^2 = (2 \cdot 9)^2 = 4 \cdot 9^2$. Rovnice ($**$) je tedy ekvivalentní s $4x = 14^2 + 25 - 9^2$. Při ručním počítání je toto vyjádření výhodnější.

Místo obdélníku ve druhém řešení úlohy se lze omezit na jeho polovinu, tzn. trojúhelník jako výše. V tomto duchu by všechny diskutované obsahy byly poloviční, zejména místo rovnice ($***$) bychom odvodili ekvivalentní rovnici $14(10+x) = 10(28+x)$. Pravou stranu této rovnice lze interpretovat jako

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o,$$

kde $o = 2(28+x)$ je obvod trojúhelníku a $r = 10$ poloměr jemu vepsané kružnice (středem této kružnice je společný bod vyznačených úseček uvnitř trojúhelníku). Tento vzorec lze najít v povolených tabulkách, tedy na něm založené řešení by mělo být považováno za správné.

Z9–II–3

Iveta postupně vypisovala přirozená čísla tvořená číslicemi 1, 3, 5, 7. Žádné jiné číslice nepoužila, postupovala vzestupně od nejmenšího čísla a žádné číslo neopomněla. Čísla psala bezprostředně za sebou a tak sestavovala jedno mimořádně dlouhé číslo:

$$1357111315173133\ldots$$

Která číslice je v tomto čísle na 1286. místě? (*E. Novotná*)

Možné řešení. Z daných číslic Iveta vytvořila 4 jednomístná čísla. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle 4 místa.

Z daných číslic Iveta vytvořila $4^2 = 16$ dvojmístných čísel. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle $2 \cdot 16 = 32$ míst. Poslední číslice posledního dvojmístného čísla je na 36. místě $(4 + 32 = 36)$.

Z daných číslic Iveta vytvořila $4^3 = 64$ trojmístných čísel. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle $3 \cdot 64 = 192$ míst. Poslední číslice posledního trojmístného čísla je na 228. místě $(36 + 192 = 228)$.

Z daných číslic Iveta vytvořila $4^4 = 256$ čtyřmístných čísel. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle $4 \cdot 256 = 1024$ míst. Poslední číslice posledního čtyřmístného čísla je na 1252. místě $(228 + 1024 = 1252)$.

Do 1286. místa chybí 34 míst, a ta jsou obsazena pětimístnými čísly. Přitom $34 : 5$ je 6 a zbytek 4. Tedy hledaná číslice je 4. číslicí v 7. pětimístném čísle, které Iveta vytvořila. Tato čísla seřazená vzestupně jsou:

$$11111, 11113, 11115, 11117, 11131, 11133, 111\underline{3}5.$$

V Ivetině dlouhém čísle je na 1286. místě číslice 3.

Hodnocení. 2 body za počty jedno-, dvoj-, troj- a čtyřmístných čísel; 2 body za počty míst těchto čísel v Ivetině dlouhém čísle; 2 body za určení hledané číslice a kvalitu komentáře.

Z9–II–4

V pěti pytlících je dohromady 52 kuliček. V žádných dvou pytlících není stejný počet kuliček, některý pytlík může být i prázdný. Všechny kuličky z kteréhokoli (neprázdného) pytlíku lze přemístit do ostatních čtyř pytlíků tak, že v nich budou stejné počty kuliček.

a) Najděte nějaké rozdělení kuliček do pytlíků, které má všechny uvedené vlastnosti.
b) Ukažte, že při jakémkoli rozdělení s uvedenými vlastnostmi je v některém pytlíku právě 12 kuliček. (*J. Zhouf*)

Možné řešení. Po přemístění kuliček je jeden pytlík prázdný a v ostatních čtyřech jsou jich stejné počty. Dohromady je kuliček 52, tedy po přemístění je v neprázdných pytlících po 13 kuličkách ($52 : 4 = 13$). Proto původně nemohlo být v žádném pytlíku víc než 13 kuliček.

a) Možné původní počty kuliček v pytlících odpovídají možným vyjádřením čísla 52 jakožto součtu pěti navzájem různých nezáporných celých čísel, která nejsou větší než 13. Zkoušením lze najít tyto možnosti:

$$52 = 13 + 12 + 11 + 10 + 6 = 13 + 12 + 11 + 9 + 7 = 13 + 12 + 10 + 9 + 8.$$

b) Pokud by v žádném pytlíku nebylo víc než 12 kuliček, potom by ve všech dohromady bylo nejvýše $12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 50$ kuliček. Tedy v některém pytlíku muselo být 13 kuliček.

Pokud by v žádném pytlíku nebylo 12 kuliček, potom by ve všech dohromady bylo nejvýše $13 + 11 + 10 + 9 + 8 = 51$ kuliček. Tedy v některém pytlíku muselo být 12 kuliček.

Poznámka. Rozdělení uvedená v části a) jsou jediná možná. To lze zdůvodnit systematickým dosazováním postupně se zmenšujících navzájem různých sčítanců ne větších než 13 a kontrolou jejich součtu. V každé z uvedených možností se vskutku vyskytuje číslo 12.

Hodnocení. 1 bod za nějaké vyhovující rozdělení; 2 body za zdůvodnění, že v žádném pytlíku nebylo víc než 13 kuliček; 3 body za zdůvodnění, že v některém pytlíku bylo 12 kuliček. Řešení části b) založená na předchozí poznámce mohou být hodnocena plným počtem bodů v závislosti na úplnosti komentáře k části a). Řešení obsahující všechny možnosti bez zdůvodnění hodnoťte 2 body.