I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček.

Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Úlohu můžeme s výhodou řešit odzadu:

- Před druhým (posledním) kolem výměn měli Přemek a Robin o sedm kuliček méně, zatímco Jarda o 14 kuliček více. Tedy Přemek a Robin měli $25 - 7 = 18$ kuliček, zatímco Jarda jich měl $25 + 14 = 39$.
- Před prvním kolem výměn měl Robin dvojnásobek kuliček (polovinu dal Jardovi, zbyla mu polovina) a Přemek tři poloviny kuliček (třetinu dal Jardovi, zbyly mu dvě třetiny). Tedy Robin měl $2 \cdot 18 = 36$ kuliček a Přemek $\frac{3}{2} \cdot 18 = 27$ kuliček.
- Během přerozdělování byl celkový počet kuliček stále stejný. Součet po druhém, resp. prvním kole výměn byl $25 + 25 + 25 = 18 + 18 + 39 = 75$ kuliček. Před první výměnou (po hře) měl Robin 36 a Přemek 27 kuliček. Tedy po hře měl Jarda

$$75 - 36 - 27 = 12 \text{ kuliček.}$$

Poznámka. Znázornění předchozích úvah, příp. kontrola výsledků může vypadat takto:

stavy	Robin	Přemek	Jarda	výměny
po 2. kole výměn	25	25	25	
		$\uparrow 7$	$\downarrow 7$	Jarda Přemkovi
	$\uparrow 7$		$\downarrow 7$	Jarda Robinovi
po 1. kole výměn	18	18	39	
	$\downarrow 18$		$\uparrow 18$	Robin Jardovi
		$\downarrow 9$	$\uparrow 9$	Přemek Jardovi
po hře	36	27	12	

Z6–I–2

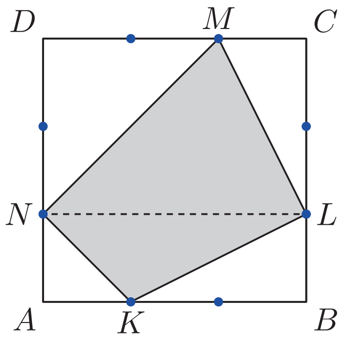
Karolína narýsovala čtverec o straně 6 cm. Na každé straně čtverce vyznačila modrou barvou dva body, kterými rozdělila příslušnou stranu na tři shodné části. Potom sestrojila čtyřúhelník, který měl všechny vrcholy modré a jehož žádné dva vrcholy neležely na stejné straně čtverce.

Jaké obsahy čtyřúhelníků mohla Karolína dostat? Uveďte všechny možnosti.

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Čtyřúhelníky s různými obsahy lze rozlišit následovně:

a) Některá úhlopříčka čtyřúhelníku je rovnoběžná se stranou čtverce. Označme vrcholy čtverce a čtyřúhelníku tak, že úhlopříčka LN je rovnoběžná se stranami AB a CD:

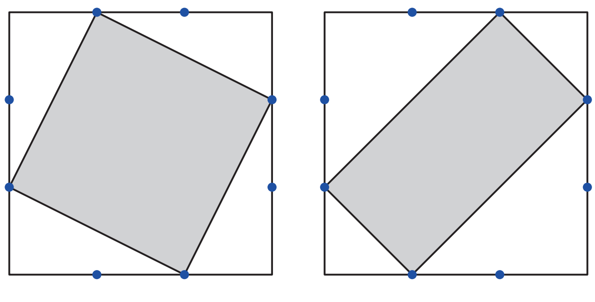


Obsah trojúhelníku LNK je polovinou obsahu obdélníku $LNAB$, obsah trojúhelníku LNM je polovinou obsahu obdélníku $LNDC$. Trojúhelníky LNK a LNM tvoří dohromady celý čtyřúhelník, obdélníky $LNAB$ a $LNDC$ tvoří dohromady daný čtverec. Obsah čtverce je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{cm}^2)$, obsah čtyřúhelníku $KLMN$ je poloviční:

$$36 : 2 = 18\,(\mathrm{cm}^2).$$

Není podstatné, zda rovnoběžné úsečky uvažujeme vodorovně nebo svisle. Také umístění bodů K a M na stranách čtverce nehraje v předchozí úvaze žádnou podstatnou roli.

b) Žádná úhlopříčka čtyřúhelníku není rovnoběžná se stranou čtverce. V tomto případě rozlišujeme dvě možnosti:



Skutečně platí, že záměna kteréhokoli vrcholu v kterémkoli z těchto čtyřúhelníků dává čtyřúhelník, jehož úhlopříčka je rovnoběžná se stranou čtverce (tedy případ diskutovaný výše). Uvedené čtyřúhelníky mají navzájem různé obsahy, a ty vyjádříme jako rozdíl obsahu celého čtverce a obsahů čtyř trojúhelníkových rožků. Obsah čtverce je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{cm}^2)$. Rožky jsou trojího typu a jejich obsahy jsou

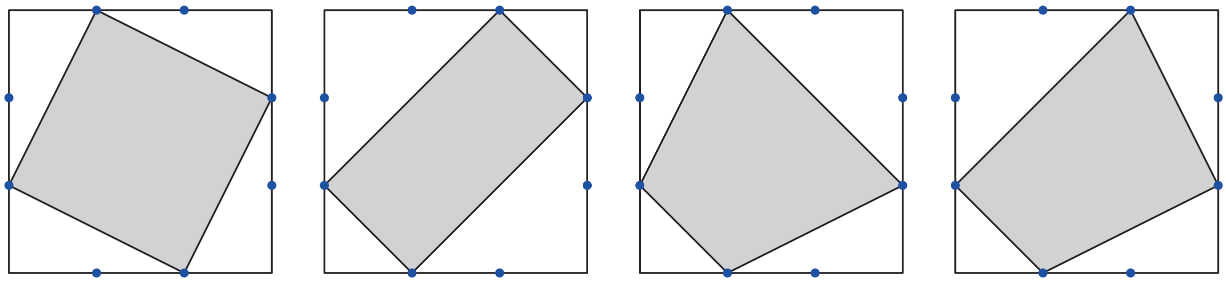
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2\,(\mathrm{cm}^2), \quad \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4\,(\mathrm{cm}^2), \quad \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsahy prvního a druhého čtyřúhelníku jsou

$$36 - 4 \cdot 4 = 20\,(\mathrm{cm}^2), \quad 36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 8 = 16\,(\mathrm{cm}^2).$$

Karolína mohla dostat čtyřúhelníky s obsahy 16, 18 a $20\,(\mathrm{cm}^2)$.

Jiné řešení. Na každé straně čtverce Karolína vybírala jeden ze dvou modrých bodů jako vrchol čtyřúhelníku. Takto mohla sestrojit celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ čtyřúhelníků. Mnohé z nich jsou však navzájem shodné, tedy mají stejné obsahy. Navzájem neshodné čtyřúhelníky, které mohla Karolína sestrojit, jsou čtyři:



Skutečně platí, že záměna kteréhokoli vrcholu v kterémkoli čtyřúhelníku dává čtyřúhelník, který je shodný s jiným z těchto čtyřúhelníků.

Obsah každého čtyřúhelníku lze vyjádřit jako rozdíl obsahu celého čtverce a obsahů čtyř trojúhelníkových rožků. U třetího a čtvrtého čtyřúhelníku odečítáme stejné rožky (pouze jiným způsobem), proto jsou obsahy těchto čtyřúhelníků stejné. Stačí tedy prověřit první tři čtyřúhelníky. Jejich obsahy jsou vypočteny v předchozím řešení.

Karolína mohla dostat čtyřúhelníky s obsahy 16, 18 a $20\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámky. Případné shodnosti v předchozí úvaze patří mezi souměrnosti čtverce, tj. zobrazení, které zachovávají daný čtverec. Ty zahrnují osové souměrnosti, středovou souměrnost a otáčení o 90°. Čtverec má celkem osm souměrností.

Z6–I–3

V osmimístném čísle je každá jeho číslice (kromě poslední) větší než číslice následující. Kolik je všech takových čísel? (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Popsaná čísla lze sestavit tak, že z deseti dostupných číslic se odstraní dvě a zbylých osm se uspořádá sestupně. To je stejné, jako by se z desetimístného čísla 9876543210 odstranily dvě číslice:

- Pokud bychom z tohoto čísla jako první číslici odstranili 9, potom zbývá devět možností, kterou číslici odstranit jako druhou.

- Pokud bychom jako první číslici odstranili 8, potom zbývá osm možností, kterou číslici odstranit jako druhou (odstranění dvojice 8 a 9 je zahrnuto v předchozím případě).
- Pokud bychom jako první číslici odstranili 7, potom zbývá sedm možností, kterou číslici odstranit jako druhou (odstranění dvojic 7, 8 a 7, 9 je zahrnuto v předchozích případech).
- V podobném duchu uvažujeme až do konce…
- Pokud bychom jako první číslici odstranili 1, potom zbývá jediná možnost, kterou číslici odstranit jako druhou, a to 0.

Celkový počet možností, tedy počet všech čísel vyhovujících zadání, je

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45.$$

Jiné řešení. Počet možností, jak odstranit dvě číslice z desíti, lze určit následovně:

První číslici z desíti lze vybrat deseti způsoby. Druhou číslici ze zbylých devíti číslic lze vybrat devíti způsoby. To dává celkově $10\cdot 9=90$ možností, jak vybrat dvě číslice z desíti s ohledem na pořadí výběru. Toto pořadí nás však nezajímá — není podstatné, v jakém pořadí číslice vybíráme, ale které vybereme. Tedy celkový počet možností je poloviční:

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9=45.$$

Poznámka. Předchozí dvojí vyjádření téhož výsledku lze zobecnit takto:

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1).$$

Toto číslo vyjadřuje počet všech dvojic, které lze utvořit z n prvků (bez ohledu na pořadí výběru).

Z6–I–4

V následujícím písemném násobení dvou trojmístných čísel jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & * & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 3 & 1 & 7 & 5 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
 & * & * & 6 & * & *
\end{array}$$

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Podle známého postupu je druhý mezivýsledek 3175 součinem prvního činitele a druhé číslice druhého činitele. Jako součin trojmístného a jednomístného čísla lze číslo 3175 vyjádřit jediným způsobem, a to $635 \cdot 5$ (prvočíselný rozklad je $3175 = 5 \cdot 5 \cdot 127$). Tedy můžeme doplnit:

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & 3 & 5 \\ \times & & * & 5 & * \\ \hline & * & * & * & * \\ 3 & 1 & 7 & 5 & \\ * & * & * & & \\ \hline * & * & 6 & * & * \end{array}$$

Třetí mezivýsledek je trojmístné číslo, které je součinem 635 a první číslice druhého činitele. Jediným trojmístným násobkem čísla 635 je samo toto číslo. Tedy můžeme doplnit:

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & 3 & 5 \\ \times & & 1 & 5 & * \\ \hline & * & * & * & * \\ 3 & 1 & 7 & 5 & \\ 6 & 3 & 5 & & \\ \hline * & * & 6 & * & * \end{array}$$

První mezivýsledek je čtyřmístné číslo, které je součinem 635 a třetí číslice druhého činitele. Čtyřmístné násobky čísla 635 jsou tyto:

$$\begin{array}{llll} 635 \cdot 2 = 1270, & 635 \cdot 3 = 1905, & 635 \cdot 4 = 2540, & 635 \cdot 5 = 3175, \\ 635 \cdot 6 = 3810, & 635 \cdot 7 = 4445, & 635 \cdot 8 = 5080, & 635 \cdot 9 = 5715. \end{array}$$

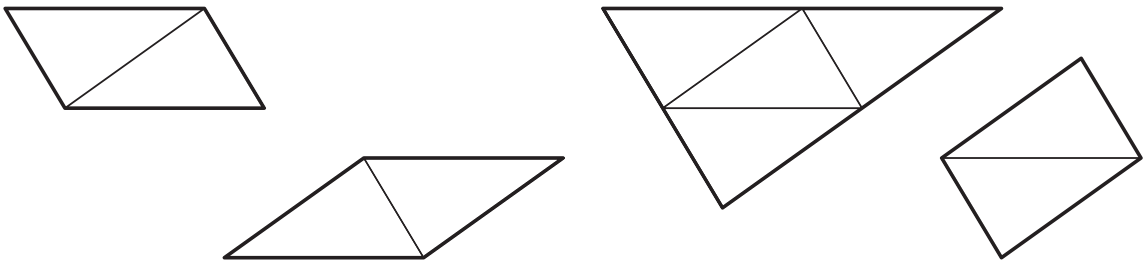
Aby třetí číslice ve výsledném součinu byla 6, musí být druhá číslice prvního mezivýsledku buď 3, nebo 4 (podle toho, zda došlo k přechodu přes desítku či nikoli). Mezi výše uvedenými kandidáty splňuje tuto podmínku pouze číslo 4445. Tedy můžeme doplnit a dopočítat výsledek:

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & 3 & 5 \\ \times & & 1 & 5 & 7 \\ \hline & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & \\ 6 & 3 & 5 & & \\ \hline 9 & 9 & 6 & 9 & 5 \end{array}$$

Z6–I–5

Péťa složil z navzájem shodných trojúhelníků několik rovinných útvarů, viz obrázek. Obvody prvních tří jsou postupně 8 cm, 11,4 cm a 14,7 cm.

Určete obvod čtvrtého útvaru. (*E. Semerádová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

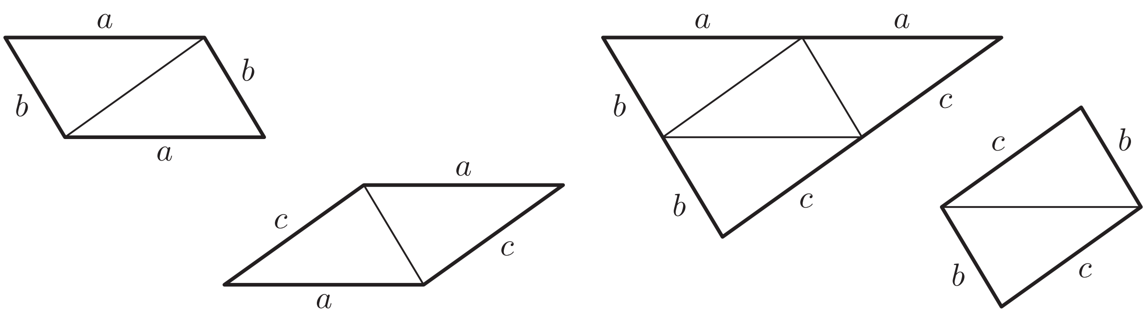
Možné řešení. V obvodech prvního, druhého a čtvrtého útvaru jsou započteny vždy dvě ze tří stran základního trojúhelníku, a to tak, že každá ze dvou stran je započtena dvakrát a v obvodech různých útvarů jsou zahrnuty různé dvojice stran.

V obvodu třetího útvaru jsou započteny všechny strany základního trojúhelníku, a to opět každá dvakrát.

Tedy součet obvodů prvního, druhého a čtvrtého útvaru je roven dvojnásobku obvodu třetího útvaru. To znamená, že neznámý obvod čtvrtého útvaru je roven rozdílu obvodů prvního a druhého útvaru od dvojnásobku obvodu třetího:

$$2 \cdot 14{,}7 - 8 - 11{,}4 = 29{,}4 - 19{,}4 = 10\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámky. Ze zadání lze odvodit velikosti stran základního trojúhelníku, které pro tento účel označíme a, b, c:



Rozdíl obvodů třetího a prvního útvaru je roven dvojnásobku c, tedy

$$c = \frac{1}{2}(14{,}7 - 8) = 3{,}35\,(\mathrm{cm}).$$

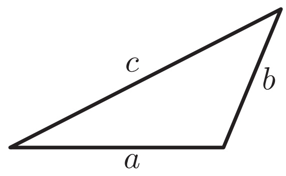
Rozdíl obvodů třetího a druhého útvaru je roven dvojnásobku b, tedy

$$b = \frac{1}{2}(14{,}7 - 11{,}4) = 1{,}65\,(\mathrm{cm}).$$

Odtud a ze známých obvodů prvních tří útvarů lze vyjádřit velikost poslední strany základního trojúhelníku:

$$a = \frac{8}{2} - 1{,}65 = \frac{11{,}4}{2} - 3{,}35 = \frac{14{,}7}{2} - 1{,}65 - 3{,}35 = 2{,}35\,(\mathrm{cm}).$$

Hodnoty a, b, c splňují trojúhelníkové nerovnosti ($1{,}65 + 2{,}35 > 3{,}35$ atd.), tedy trojúhelník se stranami těchto délek skutečně existuje a (až na měřítko) vypadá takto:



Z uvedeného můžeme pro kontrolu odvodit obvod čtvrtého útvaru:

$$2(b + c) = 2(1{,}65 + 3{,}35) = 10\,(\mathrm{cm}).$$

Z6–I–6

Aleš, Bára, Cyril, Dana, Eva, František a Gábina se stali na svých školách vítězi ve stolním fotbálku a sešli se na dvoudenním turnaji o celkového vítěze. Každé z těchto sedmi dětí mělo během turnaje sehrát jednu hru s každým jiným. První den turnaje odehrál Aleš jednu hru, Bára dvě hry, Cyril tři, Dana čtyři, Eva pět her a František šest.

Kolik her odehrála první den Gábina? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Dětí bylo sedm, tedy každé mohlo odehrát nejvýše šest her. František odehrál šest her, takže hrál s každým z přítomných dětí.

Aleš odehrál jednu hru, takže nehrál s nikým jiným než s Františkem. Eva odehrála pět her, takže hrála se všemi kromě Aleše.

Bára odehrála dvě hry, takže nehrála s nikým jiným než s Františkem a Evou. Dana odehrála čtyři hry, takže hrála se všemi kromě Aleše a Báry.

Cyril odehrál tři hry, a to s Františkem, Evou a Danou.

S Gábinou hráli František, Eva a Dana, tedy Gábina odehrála tři hry.

Poznámka. Předchozí závěry jsou přehledně vidět v tabulce:

	A	B	C	D	E	F	G
A	–					*	
B		–			*	*	
C			–	*	*	*	
D			*	–	*	*	*
E		*	*	*	–	*	*
F	*	*	*	*	*	–	*
G				*	*	*	–