73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Patrik vybral dvě různá přirozená čísla a, b, každé napsal na 10 karet a všech 20 karet rozmístil do kruhu. Všiml si, že každé číslo je teď dělitelem součtu dvou čísel na sousedních kartách. Dokažte, že čísla na kartách se ob jedno střídají.

2. Reálná čísla a, b, c, d splňují rovnosti

$$\frac{a-b}{c+d} = \frac{a-c}{b+d} = \frac{b-c}{a+d}.$$

Dokažte, že tyto zlomky jsou rovny nule.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, jejichž délky jsou po řadě 6 a 4. Označme P střed úhlopříčky BD a E průsečík přímek AP a CD. Rovnoběžka s přímkou AP procházející vrcholem D protíná přímku BE v bodě F. Dokažte, že přímka BC půlí úsečku DF.

4. Kolika různými způsoby můžeme vyplnit tabulku 2024×2024 čísly 0 a 1 tak, aby součty čísel v jednotlivých řádcích byly navzájem různé a rovněž součty čísel v jednotlivých sloupcích byly navzájem různé?

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 9. dubna 2024

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Patrik vybral dvě různá přirozená čísla a, b, každé napsal na 10 karet a všech 20 karet rozmístil do kruhu. Všiml si, že každé číslo je teď dělitelem součtu dvou čísel na sousedních kartách. Dokažte, že čísla na kartách se ob jedno střídají.*

(Josef Tkadlec)

Řešení. Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Připusťme tedy, že čísla a, b nejsou rozmístěna střídavě. To zřejmě znamená, že se v kruhu vedle sebe nacházejí někde dvě a a současně někde dvě b.

Vyberme dvě sousední a. Začneme-li od této dvojice aa putovat po kruhu jedním směrem, narazíme na číslo b (jinak by v kruhu byla samá a). Jakmile se to stane, budeme mít sousední trojici aab. Podle zadání pak platí $a \mid a+b$, odkud $a \mid b$. Analogickou úvahou najdeme trojici bba, ze které dostaneme $b \mid a$. Pro přirozená čísla a, b tak platí $a \mid b$ i $b \mid a$, a tedy $a = b$, což je ve sporu s tím, že čísla a, b jsou různá. Tím je celé řešení úlohy hotovo.

Poznámky.

1. Bez újmy na obecnosti jsme od začátku důkazu sporem mohli předpokládat, že platí například $a < b$. Pak bychom vystačili jen s úvahou o trojici bba vedoucí ke spornému závěru $b \mid a$.
2. Ukažme navíc, že pro čísla a, b splňující zadání úlohy musí platit buď $b = 2a$, nebo $a = 2b$. S ohledem na symetrii stačí v případě $a < b$ dokázat rovnost $b = 2a$. Při střídavém rozmístění čísel z trojice aba máme $b \mid 2a$, takže $2a = kb$ pro vhodné přirozené číslo k. Z předpokladu $a < b$ ovšem plyne $kb = 2a < 2b$, odkud $k < 2$ neboli $k = 1$, a proto $2a = kb = b$, jak jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Neúplná řešení, která se zabývají případem, kdy rozmístění čísel a, b není střídavé a kdy řešitel předem nevybere, která z nerovností $a < b$ nebo $b < a$ platí, hodnoťte následovně:

A1. Konstatování, že musí být vedle sebe dvě a i dvě b: 1 bod.
A2. Konstatování, že musí existovat jak úsek aab (nebo baa), tak i úsek abb (nebo bba): 3 body.
A3. Korektní odvození obou dělitelností $a \mid a + b$ a $b \mid a + b$: 4 body.
A4. Dosažení sporu s případnou drobnou argumentační chybou: 5 bodů.

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{A4})$ bodů. Pokud řešitel předem vybere, že z nerovností $a < b$ nebo $a > b$ platí například $a < b$, pak stačí uvést v A1 pouze bb, v A2 pouze bba a v A3 pouze $b \mid a + b$ (viz poznámku 1 za řešením). Postupuje-li řešitel námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.

2. *Reálná čísla a, b, c, d splňují rovnosti*

$$\frac{a-b}{c+d}=\frac{a-c}{b+d}=\frac{b-c}{a+d}.$$

Dokažte, že tyto zlomky jsou rovny nule. (Zdeněk Pezlar)

Komentář. Podat řešení zadané úlohy je možné v mnoha obměnách, proto nejprve popíšeme některé jejich společné prvky a možnosti.

1. Lze si snadno povšimnout, že tvrzení úlohy platí, právě když se rovnají některá dvě z čísel a, b, c. Proto můžeme celé řešení pojmout tak, že z předpokladu různosti čísel a, b, c odvodíme spor. Je ovšem také možné podat nepřímý důkaz rovnosti $b=c$ (první řešení) nebo rovnosti $a=b$ (v poznámce za prvním řešením).
2. Je také vidět, že rovnost prvního a druhého zlomku ze zadání nastane určitě v případě, kdy platí $b=c$. Proto se vyplatí tuto rovnost algebraicky upravovat s cílem, aby přešla do tvaru $(b-c)(\ldots)=0$. Ukážeme dále, že takto vyjde rovnost
$$(b-c)(a-b-c-d)=0. \tag{1}$$
Analogicky z rovnosti druhého a třetího zlomku dostaneme
$$(a-b)(a+b-c+d)=0. \tag{2}$$
(Upravit rovnost prvního a třetího zlomku podobně pěkně nelze.) V prvním řešení vystačíme s odvozením rovnosti (1), ve druhém řešení získáme obě rovnosti (1) a (2) zjednodušeným výpočtem a pak už snadno celé řešení dokončíme.

Řešení. Začneme odvozením rovnosti (1) z komentáře:

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{c+d}&=\frac{a-c}{b+d},\\
(a-b)(b+d)&=(a-c)(c+d),\\
ab+ad-b^2-bd&=ac+ad-c^2-cd,\\
(ab-ac)-(b^2-c^2)-(bd-cd)&=0,\\
a(b-c)-(b-c)(b+c)-d(b-c)&=0,\\
(b-c)(a-b-c-d)&=0.
\end{aligned}$$

Posuďme nejprve případ, kdy $b-c\neq 0$. Z rovnosti (1) tehdy plyne
$$a-b-c-d=0, \tag{3}$$
odkud $a-b=c+d$ a $a-c=b+d$. První dva zadané zlomky tak mají společnou hodnotu 1, kterou musí mít i třetí zlomek:
$$\frac{b-c}{a+d}=1.$$
Odtud máme $b-c=a+d$, což přepíšeme jako
$$a-b+c+d=0. \tag{4}$$
Sečtením rovností (3) a (4) dostaneme $2a-2b=0$ neboli $a-b=0$, což je ve sporu s tím, že zadané zlomky mají hodnotu 1. Posuzovaný případ $b-c\neq 0$ je tak vyloučen, a proto platí $b-c=0$. Třetí zlomek ze zadání je tudíž skutečně roven nule.

Poznámka. Ukažme stručněji, že analogicky z rovnosti (2) plyne $a = b$. V případě $a \neq b$ z (2) máme $a + b - c + d = 0$, takže druhý a třetí zlomek ze zadání mají společnou hodnotu -1, a proto ji má i první zlomek. Pro jeho čitatel a jmenovatel tak platí $a - b = -(c + d)$, což spolu s $a + b - c + d = 0$ vede k závěru $b = c$, který je však určenou hodnotou -1 vyloučen. Tím je důkaz rovnosti $a = b$ hotov.

Jiné řešení. Zaveďme tři nová (podle zadání nenulová) čísla

$$A = a + d, \quad B = b + d, \quad C = c + d. \tag{5}$$

Díky rovnostem $A - B = a - b$, $A - C = a - c$, $B - C = b - c$ dostáváme

$$\frac{A - B}{C} = \frac{A - C}{B} = \frac{B - C}{A}.$$

Takto zjednodušené rovnosti nyní upravíme současně:

$$\begin{aligned}
\frac{A - B}{C} &= \frac{A - C}{B}, & \frac{A - C}{B} &= \frac{B - C}{A},\\
(A - B)B &= (A - C)C, & (A - C)A &= (B - C)B,\\
AB - B^2 &= AC - C^2, & A^2 - AC &= B^2 - BC,\\
(AB - AC) - (B^2 - C^2) &= 0, & (A^2 - B^2) - (AC - BC) &= 0,\\
A(B - C) - (B - C)(B + C) &= 0, & (A - B)(A + B) - C(A - B) &= 0,\\
(B - C)(A - B - C) &= 0, & (A - B)(A + B - C) &= 0.
\end{aligned}$$

Odtud po dosazení vztahů (5) už dostaneme rovnosti z komentáře

$$(b - c)(a - b - c - d) = 0 \quad (1) \qquad \text{a} \qquad (a - b)(a + b - c + d) = 0 \quad (2).$$

Je-li $b - c = 0$ nebo $a - b = 0$, tvrzení úlohy platí. V opačném případě z rovností (1) a (2) plyne

$$a - b - c - d = 0 \quad \text{a} \quad a + b - c + d = 0,$$

což po sečtení dává $2a - 2c = 0$ neboli $a - c = 0$, takže i tehdy tvrzení úlohy platí.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Neúplná řešení hodnoťte takto:

A1. Konstatování, že stačí dokázat rovnost dvou ze tří čísel a, b, c: 1 bod.

A2. Odvození jedné z rovností (1) nebo (2): 3 body.

A3. Odvození obou rovností (1) a (2): 4 body.

A4. Důkaz tvrzení, že v případě tří různých čísel a, b, c by společná hodnota zadaných zlomků byla rovna 1 nebo -1: 4 body.

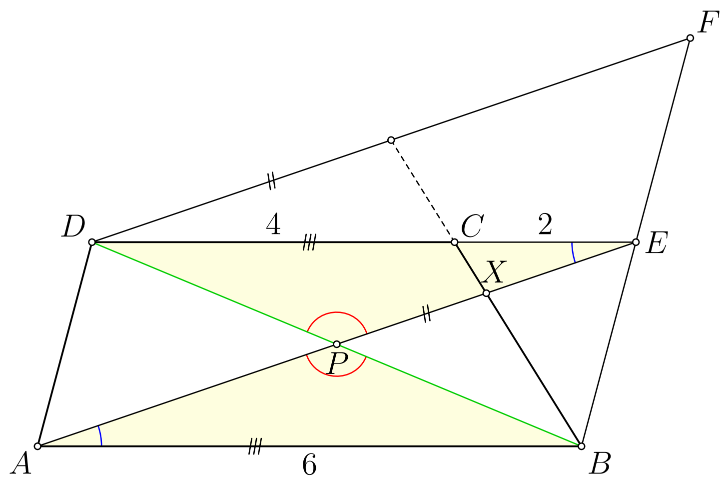
A5. Řešení s drobným argumentačním nedostatkem: 5 bodů.

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{A4}, \mathrm{A5})$ bodů. Postupuje-li řešitel námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.

3. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, jejichž délky jsou po řadě 6 a 4. Označme P střed úhlopříčky BD a E průsečík přímek AP a CD. Rovnoběžka s přímkou AP procházející vrcholem D protíná přímku BE v bodě F. Dokažte, že přímka BC půlí úsečku DF.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Dokážeme, že bod C je těžištěm trojúhelníku BFD, z čehož už vyplyne, že přímka BC skutečně půlí jeho stranu DF.

Nejdříve si povšimneme, že z rovnoběžnosti základen AB a CD plyne shodnost střídavých úhlů PAB a PED. Protože shodné jsou také vrcholové úhly APB a EPD, trojúhelníky PAB a PED jsou podobné, a tedy díky rovnosti $|PB| = |PD|$ dokonce shodné. Proto platí $|DE| = |BA| = 6$. Bod E zřejmě leží na polopřímce DC,* takže $|DC| = 4$, což spolu s $|DE| = 6$ znamená, že bod C leží na úsečce DE a přitom $|DC| = 2\,|CE|$.



Přejděme nyní již k trojúhelníku BDF. Jelikož bod P je střed jeho strany BD a $PE \parallel DF$, je úsečka PE jeho střední příčkou, tudíž bod E je střed strany BF. Úsečka DE je proto těžnicí, takže její bod C určený rovností $|DC| = 2|CE|$ je skutečně těžištěm tohoto trojúhelníku, jak jsme slíbili dokázat.

Poznámka. Ukážeme, že po důkazu shodnosti trojúhelníků PAB a PED lze zbytek řešení dokončit jinak. Díky zmíněné shodnosti je totiž čtyřúhelník $ABED$ rovnoběžník, neboť jeho strany AB a ED jsou shodné a rovnoběžné. Dále pokračujme následovně:

- ▷ Protože $ABED$ je rovnoběžník, je také čtyřúhelník $AEFD$ rovnoběžník, a to díky rovnoběžnosti svých protějších stran. Z obou rovnoběžníků tak dostáváme $|BE| = |AD| = |EF|$, což znamená, že bod E je střed úsečky BF.
- ▷ V rovnoběžníku $ABED$ platí $|DE| = |AB| = 6$, v lichoběžníku $ABCD$ máme $|DC| = 4$. Dohromady to znamená, že bod C leží na úsečce DE a $|CE| = 6 - 4 = 2$, a proto $|DC| = 2\,|CE|$.

* Shodné trojúhelníky PAB a PED jsou totiž souměrně sdružené podle středu P, stejně jako rovnoběžné polopřímky BA a DC.

Podle první odvozené vlastnosti je úsečka DE těžnice trojúhelníku BFD, a proto bod C je díky druhé vlastnosti jeho těžištěm.* Přímka BC tak skutečně půlí stranu DF, jak jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že $|AP| = |EP|$ a že bod C leží na úsečce DE tak, že $|EC| = 2$. Protože PE je střední příčka trojúhelníku BDF rovnoběžná s jeho stranou DF, stačí dokázat, že přímka BC půlí úsečku PE. Pak totiž bude půlit i úsečku DF, neboť trojúhelník BDF je dvojnásobným zvětšením trojúhelníku BPE.**

Označme proto X průsečík úseček BC, PE a ukažme, že skutečně platí $|PX| = |EX|$. Jelikož trojúhelník ECX je podobný trojúhelníku ABX podle věty *uu*, z rovnosti $|AB| = 3\,|EC|$ plyne také $|AX| = 3\,|EX|$. Odtud $|AX| = \frac{3}{4}|AE|$ a $|EX| = \frac{1}{4}|AE|$, podobně z $|AP| = |EP|$ máme $|AP| = \frac{1}{2}|AE|$, a proto

$$|PX| = |AX| - |AP| = \tfrac{3}{4}|AE| - \tfrac{1}{2}|AE| = \tfrac{1}{4}|AE| = |EX|,$$

tedy $|PX| = |EX|$, jak jsme slíbili ukázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Neúplné postupy hodnoťte následovně:

A1. Konstatování, že tvrzení úlohy bude dokázáno, když ukážeme, že bod C je těžištěm trojúhelníku BDF: 1 bod.

B1. Určení polohy bodu C na úsečce DE (například rovností $|CE| = 2$): 2 body.

B2. Důkaz poznatku, že bod E je středem úsečky BF: 2 body.

B3. Dokončení důkazu, že bod C je těžištěm trojúhelníku BDF: 1 bod.

C1. Důkaz shodnosti trojúhelníků PAB a PED: 1 bod.

C2. Důkaz poznatku, že $ABED$ je rovnoběžník: 2 body. Je-li tento poznatek pouze konstatován (případně označen za zřejmý), udělte pouze 1 bod.

D1. Zavedení průsečíku X úseček BC, PE se záměrem dokázat rovnost $|PX| = |EX|$: 1 bod.

D2. Důkaz rovnosti $|AX| = 3\,|EX|$: 1 bod.

D3. Důkaz rovnosti $|PX| = |EX|$: 1 bod.

D4. Dokončení důkazu užitím odvozeného poznatku, že přímka BC půlí střední příčku PE trojúhelníku BDF: 1 bod.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\mathrm{A1} + \mathrm{B1} + \mathrm{B2} + \mathrm{B3},\ \mathrm{A1} + \max(\mathrm{C1}, \mathrm{C2}) + \mathrm{B2} + \mathrm{B3},\ \mathrm{B1} + \mathrm{D1} + \mathrm{D2} + \mathrm{D3} + \mathrm{D4}\bigr)$ bodů. Pokud řešitel postupuje námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.

* K tomuto závěru jsme tentokrát nevyužili střed P strany BD.

** Toto zvětšení se v geometrii nazývá *stejnolehlost* se středem B a koeficientem 2.

4. *Kolika různými způsoby můžeme vyplnit tabulku* 2024×2024 *čísly* 0 *a* 1 *tak, aby součty čísel v jednotlivých řádcích byly navzájem různé a rovněž součty čísel v jednotlivých sloupcích byly navzájem různé?* (Eliška Macáková)

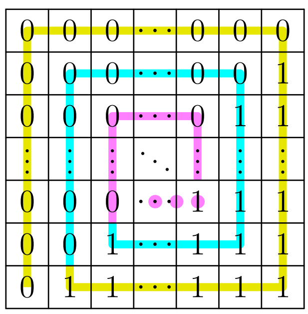
Řešení. Ukážeme, že hledaný počet je $2 \cdot (2024!)^2$. Každou správně vyplněnou tabulku budeme dále nazývat jen „tabulkou“, výhodně označíme $n = 2024$ a vyřešíme úlohu pro tabulku $n \times n$ s obecně zvoleným n, kdy počet správných vyplnění vyjde $2 \cdot (n!)^2$.

Protože součty čísel v řádcích tabulky jsou podle zadání navzájem různé, chybí mezi nimi jediná z $n+1$ možných hodnot $0, 1, \ldots, n$ takových součtů. Totéž platí i pro součty čísel v jednotlivých sloupcích tabulky. Odtud plyne, že jak mezi řádkovými, tak mezi sloupcovými součty je zastoupeno aspoň jedno z čísel 0 nebo n. Znamená to, že v tabulce vždy najdeme řádek se samými 0 nebo samými 1 i takový sloupec. Zřejmě ovšem nemohou být v jednom směru někde samé 0 a ve druhém směru někde samé 1. Právě jedno z čísel tak vyplňuje celý řádek i celý sloupec, takže řádkové i sloupcové součty jsou vždy buď $0, 1, \ldots, n-1$, nebo $1, 2, \ldots, n$. Podle toho všechny tabulky rozlišíme na dva *druhy*.

Vysvětlíme nyní, proč tabulek obou druhů je stejný počet. Skutečně, pokud v tabulce jednoho druhu všechna čísla „převrátíme“ (z 0 na 1 a z 1 na 0), dostaneme zřejmě tabulku druhého druhu.* Proto se dále budeme věnovat pouze určení počtu těch tabulek, jejichž řádkové i sloupcové součty jsou $0, 1, \ldots, n-1$.

Dále ve dvou etapách dokážeme, že pokud jednotlivé součty $0, 1, \ldots, n-1$ předem libovolně přiřadíme jak konkrétním řádkům, tak konkrétním sloupcům, bude odpovídající tabulka existovat a navíc bude jediná. Protože pro přiřazení jednotlivých součtů $0, 1, \ldots, n-1$ konkrétním řádkům i konkrétním sloupcům máme právě $n! \cdot n! = (n!)^2$ možností, počet tabulek se součty $0, 1, \ldots, n-1$ pak bude roven $(n!)^2$. Jak už víme, stejný je i počet tabulek se součty $1, 2, \ldots, n$. Hledaný celkový počet tabulek tak bude skutečně roven $2 \cdot (n!)^2$.

Etapa 1. Předpokládejme nejprve, že součty $0, 1, \ldots, n-1$ jsou v tomto pořadí předepsány řádkům tabulky shora dolů a jejím sloupcům zleva doprava. Vysvětlíme, proč pro tento speciální případ je vyplnění tabulky jediné možné a vypadá jako na následujícím obrázku.



S vyplňováním tabulky začneme v levém spodním rohu a budeme postupovat ke středu tabulky „spirálovitě“ po krocích, které odpovídají barevně rozlišeným úsekům vykreslené čáry. Tak v prvním kroku půjde o „okrajová“ pole celé tabulky: sloupec i řádek pro součet 0 musíme vyplnit samými nulami a poté prázdných $n-1$ polí ve sloupci i řádku

* Libovolný řádkový i sloupcový součet totiž změní svou hodnotu s na hodnotu $n-s$, neboť každé zapsané číslo c jsme zaměnili číslem $1-c$.

pro součet $n-1$ musíme vyplnit samými jedničkami. Ve druhém kroku obdobně musíme vyplnit všechna okrajová pole z dosud nevyplněného „zbytku“ tabulky, atd. Nakonec tak dojdeme k jedinému možnému vyhovujícímu vyplnění celé tabulky.

Etapa 2. Uveďme nejdříve zřejmá pravidla, které budeme v této části potřebovat: Pozměníme-li v jakékoli vyplněné tabulce pořadí jejích řádků, dojde ke stejné změně pořadí původních hodnot řádkových součtů, zatímco sloupcové součty nezmění ani své hodnoty, ani své pořadí. Analogické pravidlo platí i pro změny pořadí sloupců.

Předpokládejme nyní, že součty $0, 1, \ldots, n-1$ jsou předepsány jak řádkům tabulky v libovolném pořadí, tak i jejím sloupcům v libovolném pořadí. Pak její vyhovující vyplnění dostaneme, když v tabulce vyplněné jako na obrázku výše pozměníme patřičnými způsoby nejprve pořadí řádků (pokud je toho vůbec zapotřebí) a poté (opět jen v případě nutnosti) i pořadí sloupců. Stejně snadno vysvětlíme, proč je takto sestrojené vyhovující vyplnění jediné: Z každé vyhovující tabulky musíme opačnými změnami pořadí řádků a sloupců dostat tabulku z obrázku, neboť ta je, jak už víme, pro tento speciální případ jediná možná. Tím je potřebné tvrzení dokázáno.

Poznámka. Ukažme pro zajímavost, jak lze postup vyplňování tabulky s řádkovými i sloupcovými součty $0, 1, \ldots, n-1$ v libovolných dvou pořadích formalizovat.

V prvním kroku uvážíme dva řádky a dva sloupce tabulky s předepsanými součty 0 a $n-1$. Řádek i sloupec pro součet 0 musíme vyplnit (místo toho dále píšeme jen „vyplníme“) samými 0 a poté prázdných $n-1$ míst v řádku i sloupci pro součet $n-1$ vyplníme samými 1. V každém dalším i-tém kroku, dokud $2i \leqq n$, předpokládáme, že jsou vyplněny právě řádky a sloupce pro všechny součty $s < i-1$ a $s > n-i$ a přitom v každém ze zbývajících $n-2i+2$ řádků a $n-2i+2$ sloupců už máme $i-1$ krát 0 a $i-1$ krát 1, a tedy $n-2i+2$ volných míst. Nejprve tato místa v řádku i sloupci pro součet $i-1$ vyplníme samými 0, poté zbylá volná místa (v počtu $n-2i+1$) v řádku i sloupci pro součet $n-i$ doplníme samými 1 (jedině tak v nich dosáhneme součtu $(i-1)+(n-2i+1) = n-i$). V případě lichého $n = 2t+1$ uskutečníme ještě jeden krok s pořadovým číslem $t+1$, kdy dáme 0 na poslední volné místo – to leží v řádku i sloupci pro součet t, ve kterých už je t krát 0 a t krát 1. Tak dostaneme požadovanou tabulku $n \times n$ pro sudá i lichá n.

Jiné řešení. První část původního řešení (o existenci tabulek $n \times n$ dvou druhů a rovnosti jejich počtů) opakovat nebudeme. Pouze jiným způsobem odvodíme, že pro počet $P(n)$ všech tabulek $n \times n$ se součty $0, 1, \ldots, n-1$, který je jak víme roven počtu těchto tabulek se součty $1, 2, \ldots, n$, platí $P(n) = (n!)^2$ pro každé $n \geqq 1$.

Všechny tabulky $n \times n$ s daným $n > 1$ a součty $0, 1, \ldots, n-1$ rozdělíme do $n \cdot n = n^2$ skupin podle toho, který řádek a který sloupec je v tabulce sestaven ze samých 0. Pokud tento řádek a tento sloupec z tabulky vyškrtneme, zůstane nám tabulka $(n-1) \times (n-1)$, jejíž řádkové součty i sloupcové součty jsou čísla $1, 2, \ldots, n-1$. Naopak z každé tabulky $(n-1) \times (n-1)$ se součty $1, 2, \ldots, n-1$, kterých je $P(n-1)$, sestavíme n^2 různých tabulek $n \times n$ se součty $0, 1, \ldots, n-1$, když v ní libovolně (před první řádek, mezi dva sousední řádky, nebo za poslední řádek) uděláme místo pro nový řádek, stejně tak pak uděláme místo pro nový sloupec a nakonec nový řádek i sloupec vyplníme samými 0. Proto pro každé $n > 1$ platí $P(n) = n^2 P(n-1)$, což spolu se zřejmou hodnotou $P(1) = 1$ už vede ke vzorci $P(n) = (n!)^2$, který jsme slíbili odvodit.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Neúplná řešení hodnoťte následovně:

A1. Hypotéza, že řádkové i sloupcové součty vyplněné tabulky tvoří stejnou skupinu čísel, a to buď $0, 1, \ldots, 2023$, nebo $1, 2, \ldots, 2024$: 1 bod.

A2. Důkaz hypotézy z A1: 1 bod.
Přitom ani poznatek, že řádkové i sloupcové součty tvoří stejnou skupinu čísel, nelze považovat za zřejmý a musí být zdůvodněn, nejspíše úvahou o dvojím sčítání všech čísel tabulky (po řádcích a po sloupcích).

B1. Určení počtu možných rozmístění řádkových a sloupcových součtů (pro jeden ze dvou druhů tabulek): 1 bod.

B2. Hypotéza, že jakákoli konkretizace jednotlivých řádkových a sloupcových součtů vždy určuje právě jednu tabulku: 1 bod.

B3. Důkaz hypotézy z B2: 1 bod.

C1. Zdůvodnění, proč pro jedno řešitelem vybrané rozložení řádkových a sloupcových součtů existuje právě jedno vyplnění tabulky: 1 bod.

C2. Zdůvodnění, proč z jedné tabulky z C1 lze dostat permutacemi řádků a sloupců všechny tabulky jednoho druhu: 1 bod.

D1. Odvození vztahů mezi počty tabulek $n \times n$ pro různá n (tabulek ať už jednoho, či obou možných druhů dohromady), které umožňují rekurentní výpočet výsledku: 3 body.

E1. Uvedení správného výsledku: 1 bod.

Celkem pak udělte $\mathrm{A1} + \mathrm{A2} + \max(\mathrm{B1} + \mathrm{B2} + \mathrm{B3}, \mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathrm{B1}, \mathrm{D1}) + \mathrm{E1}$ bodů. Při správném postupu i výsledku s menšími argumentačními nedostatky udělte 5 bodů, stejně jako při jinak správném postupu s numerickou chybou. Postupuje-li řešitel námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.